

Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
16.01.2026

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

9. Vorlesung

Plan für die heutige Vorlesung

- Kurze Wiederholung: Ausbreitung eines Virus auf einem komplexen Netzwerk
- Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken
 - Spiele auf einem räumlichen Netzwerk (Spatial Games)
 - Dominante (2 x 2)-Spiele auf einem räumlichen Gitter
 - Räumliche Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele

Inhalte Vorlesung 8

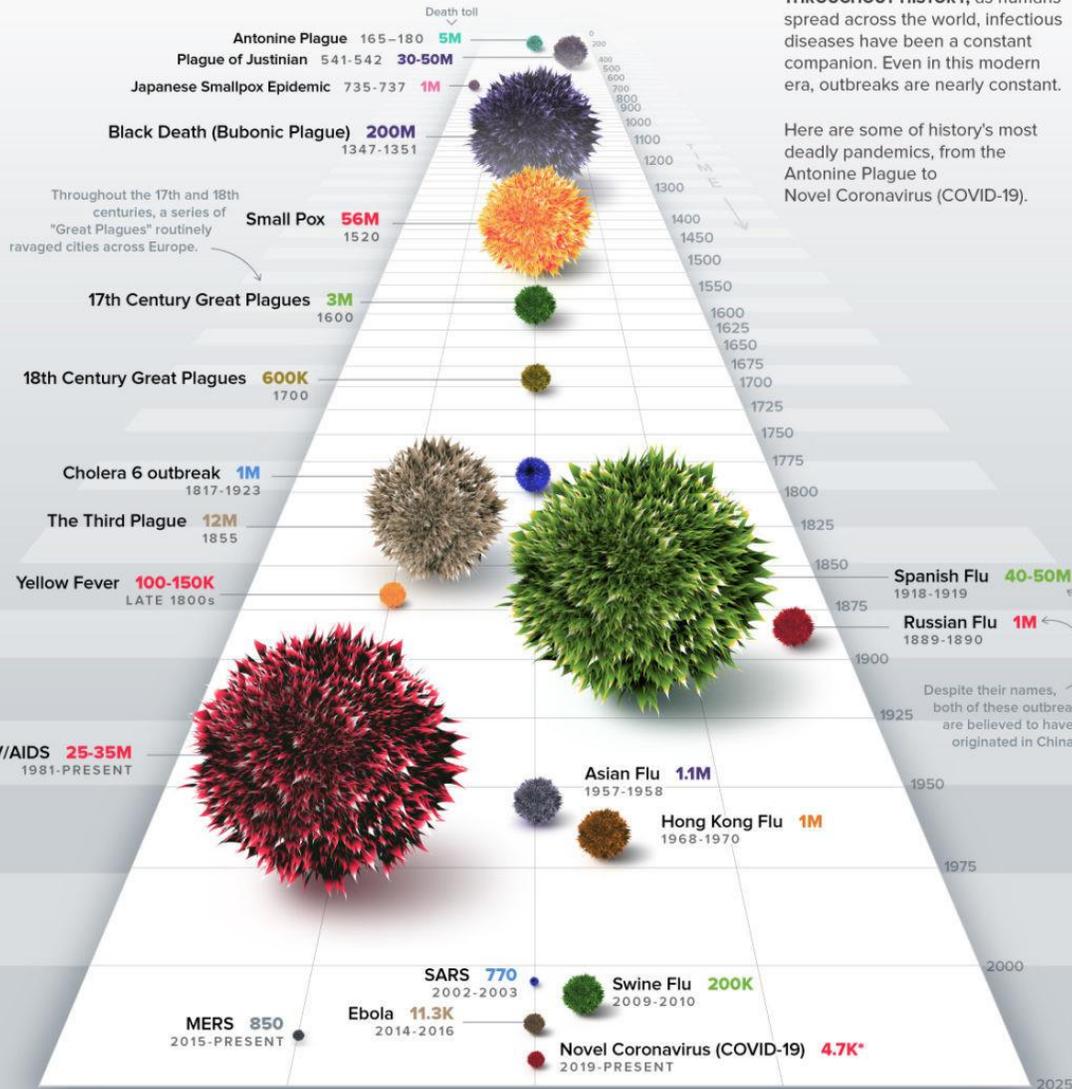
- Ausbreitung eines Virus auf einem komplexen Netzwerk
 - Einführung in die Epidemiologie
 - Das deterministische SIR Modell
 - Simulationsbasierte Ansätze

HISTORY OF PANDEMICS

PAN-DEM-IC (of a disease) prevalent over a whole country or the world.

THROUGHOUT HISTORY, as humans spread across the world, infectious diseases have been a constant companion. Even in this modern era, outbreaks are nearly constant.

Here are some of history's most deadly pandemics, from the Antonine Plague to Novel Coronavirus (COVID-19).



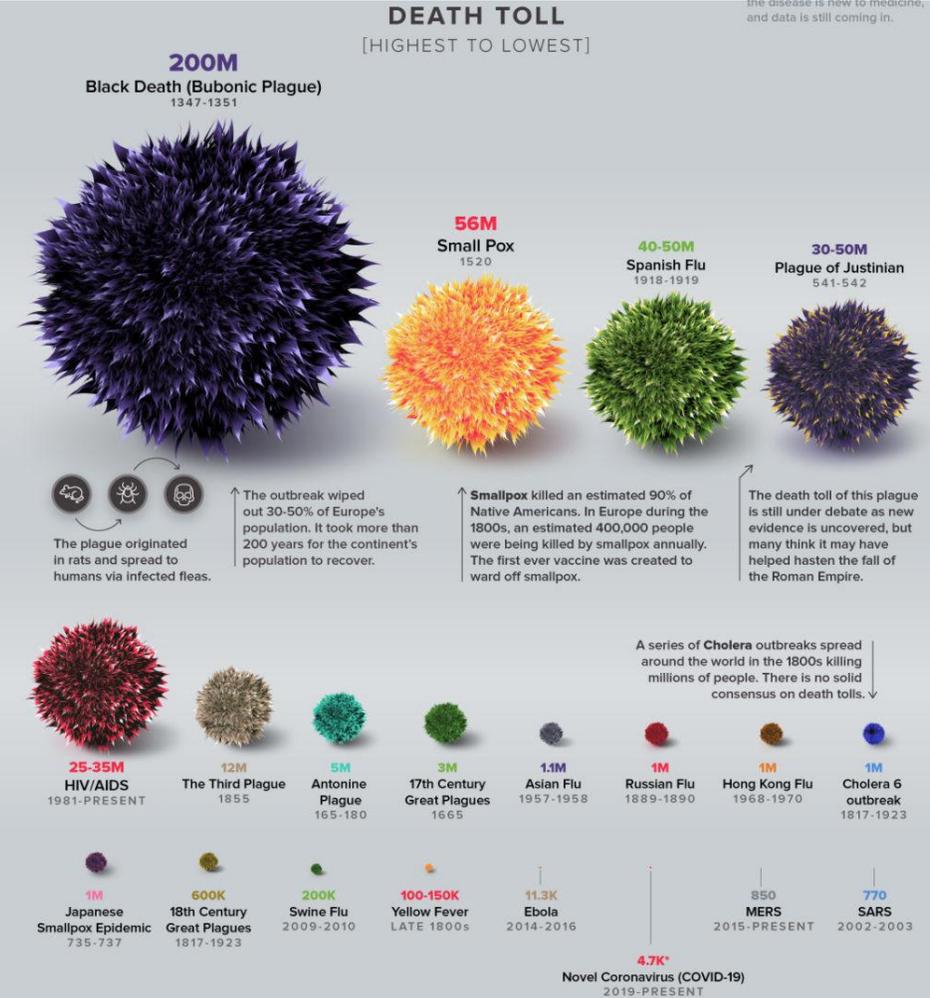
*As of Mar 11, officially a pandemic according to WHO

It is hard to calculate and forecast the impact of COVID-19 because the disease is new to medicine, and data is still coming in.

DEATH TOLL

Ausbreitung eines Virus auf einem komplexen Netzwerk

Die Geschichte der Pandemien



The disease is new to medicine, and data is still coming in.



The plague originated in rats and spread to humans via infected fleas.

The outbreak wiped out 30-50% of Europe's population. It took more than 200 years for the continent's population to recover.

Smallpox killed an estimated 90% of Native Americans. In Europe during the 1800s, an estimated 400,000 people were being killed by smallpox annually. The first ever vaccine was created to ward off smallpox.

The death toll of this plague is still under debate as new evidence is uncovered, but many think it may have helped hasten the fall of the Roman Empire.

A series of Cholera outbreaks spread around the world in the 1800s killing millions of people. There is no solid consensus on death tolls.

Sources: CDC, WHO, BBC, Wikipedia, Historical records, Encyclopedia Britannica



Facebook: /visualcapitalist, Twitter: @visualcap, Instagram: @visualcap, Website: visualcapitalist.com

Allgemein: Ausbreitungsphänomene auf komplexen Netzwerken

| Phenomena | Agent | Network |
|--------------------------|---------------------------|----------------------------------|
| Venereal Disease | Pathogens | Sexual Network |
| Rumor Spreading | Information, Memes | Communication Network |
| Diffusion of Innovations | Ideas, Knowledge | Communication Network |
| Computer Viruses | Malwares, Digital viruses | Internet |
| Mobile Phone Virus | Mobile Viruses | Social Network/Proximity Network |
| Bedbugs | Parasitic Insects | Hotel - Traveler Network |
| Malaria | Plasmodium | Mosquito - Human network |

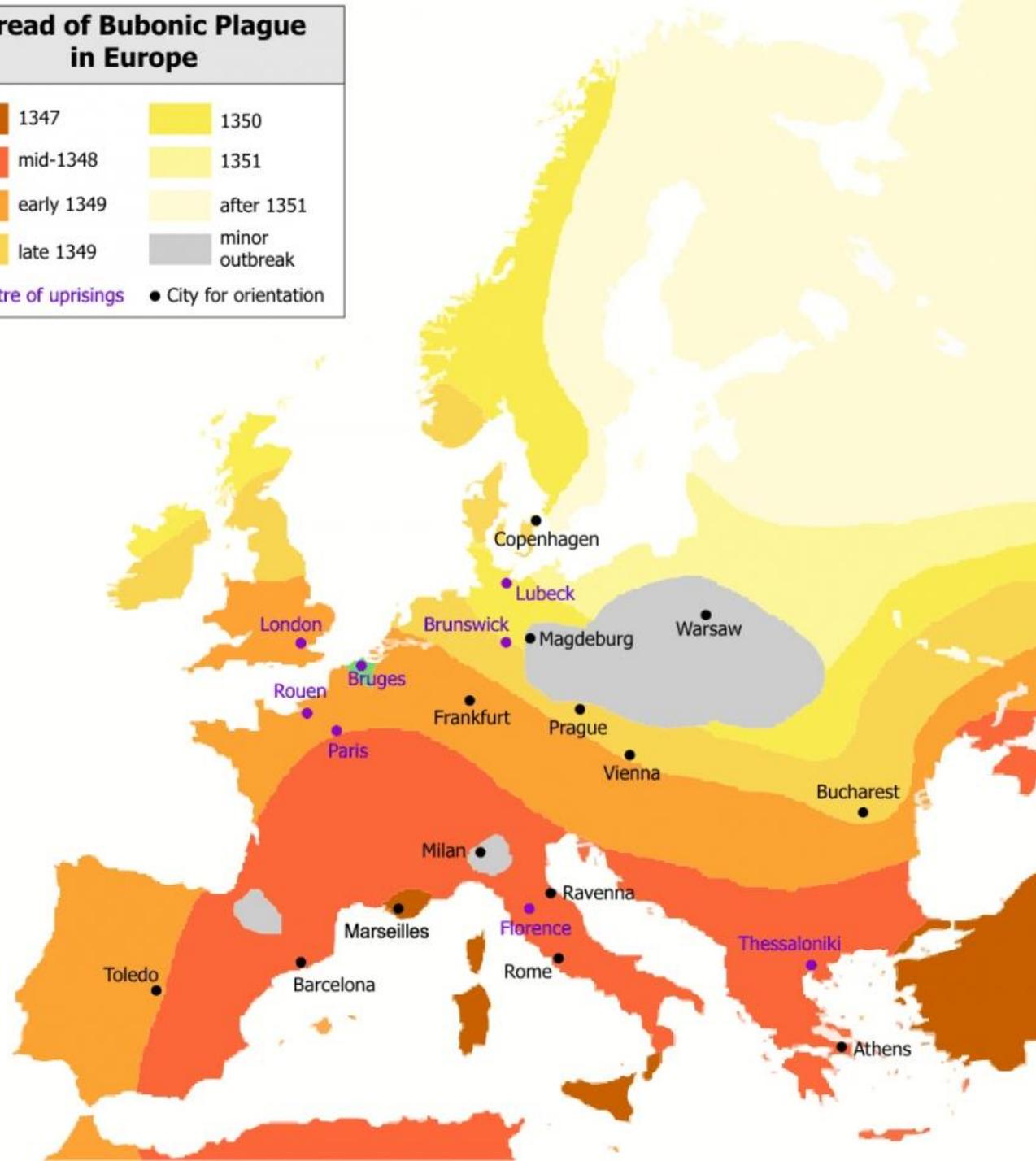
Table 10.1

Networks and Agents

The spread of a pathogen, a meme or a computer virus is determined by the network on which the agent spreads and the transmission mechanism of the responsible agent. The table lists several much studied spreading phenomena, together with the nature of the particular spreading agent and the network on which the agent spreads.

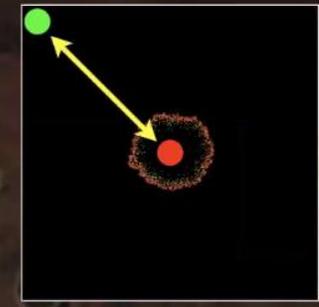
Spread of Bubonic Plague in Europe

- 1347
- mid-1348
- early 1349
- late 1349
- 1350
- 1351
- after 1351
- minor outbreak
- Centre of uprisings
- City for orientation



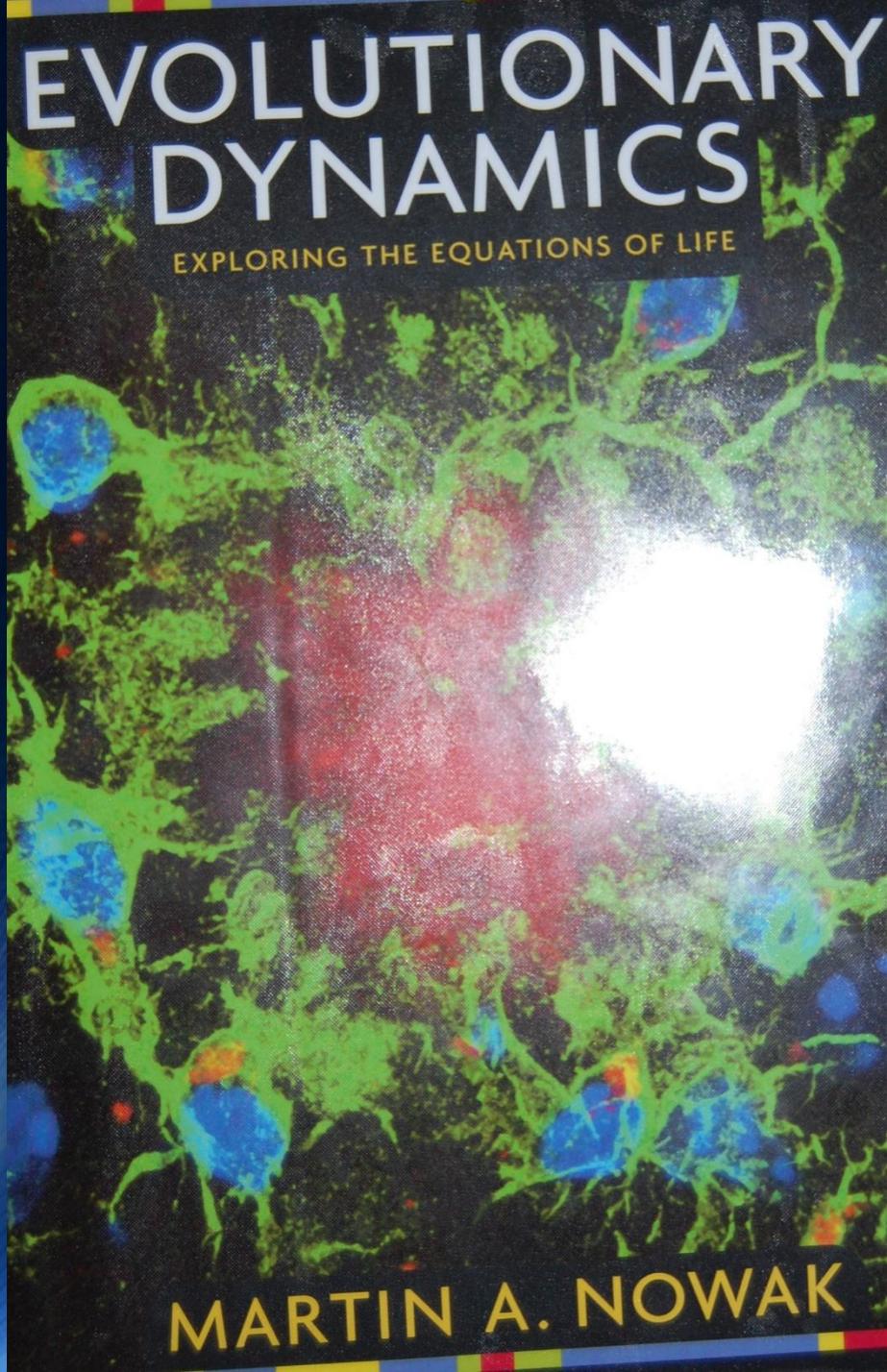
Ausbreitung der Beulenpest in den Jahren 1347-1351

Zoom Meeting
Streaming Service You are viewing dirk's screen View Options



Ausbreitung auf einem räumlichen Gitter-Netzwerk





Einführung in Teil III

Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

Die folgenden Beispiele sind an das Kapitel 9 im Buch M.A. Nowak „**Evolutionary Dynamics**“ (Kapitel 9: Spatial Games) angelehnt.

A **quasispecies** is a population of reproducing RNA or DNA molecules

| | |
|----------------------|-----------------------------------|
| ATCAGGACTCA | 0000110011000110 |
| ATC G GGACTCA | 0000110011 1 00110 |
| ATCAGGA A TCA | 1 000110011000 0 10 |
| ... | ... |

4-nucleotide alphabet Binary alphabet

Figure 3.3 The ensemble of genomes of a natural population form a quasispecies: the genomes of different individuals are similar but not identical. Biology has chosen a four-letter alphabet consisting of the nucleotides A, T, C, and G for its genes. Most in silico evolution uses a binary alphabet for convenience. Sequence differences (mutations) are shown in red.

Evolution is **adaptation** of the **quasispecies** on the fitness landscape



Figure 3.5 Quasispecies love to climb mountains in high-dimensional spaces. The higher they get, the fitter they are. Adaptation means to go up.

The **quasispecies equation**

Frequency of j Mutation from j to i

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n x_j f_j Q_{ji} - \phi(\vec{x}) x_i$$

Time derivative of frequency of i Fitness of j Average fitness

$$\phi(\vec{x}) = \sum_i f_i x_i$$

Figure 3.4 The quasispecies equation, formulated by Manfred Eigen and Peter Schuster, is one of the most important equations in theoretical biology. It describes the mutation and selection of an infinitely large population on a constant fitness landscape.

Das Konzept der Quasi-Spezien (Ensemble von ähnlichen Genomen Sequenzen (Erbgut eines Lebewesens) welches durch einen Prozess der Mutation und Selektion entstanden ist) wurde von Manfred Eigen und Peter Schuster entwickelt. Die Struktur der Quasi-Spezien Differentialgleichung ist den Gleichungen der evolutionären Spieltheorie sehr ähnlich.

Populationsmodelle der epidemischen Ausbreitung

- Population-based models
 - Deterministic or stochastic
 - Continuous time
 - Ordinary differential equation
 - Partial differential equations
 - Delay differential equations
 - Integro-differential equations
 - Discrete time
 - Difference equations
- Agent-based/individual-based models
 - Usually stochastic



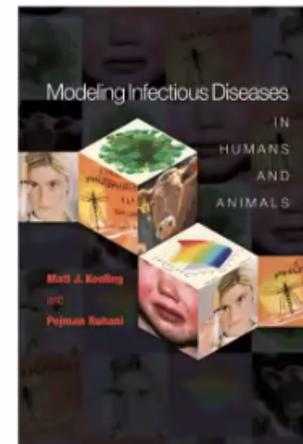
Spreading dynamics on networks: from social interactions to epidemics and pandemics

Fakhteh Ghanbarnejad
Sharif University of Technology, Tehran
<http://www.pks.mpg.de/~fakhteh>

18 March
DPG 2020, Online!



Fakhte

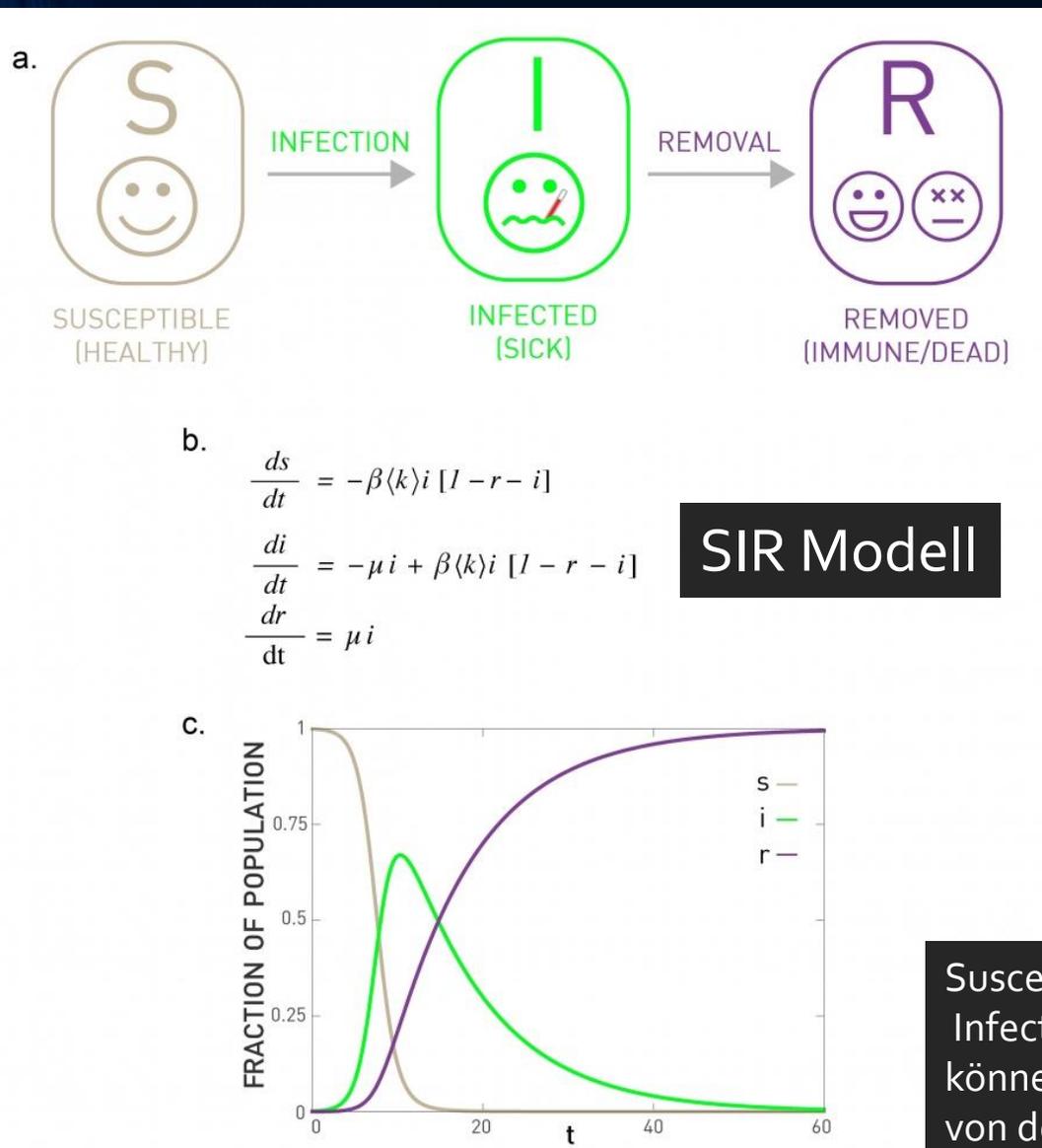


<http://www.modelinginfectiousdiseases.org/>

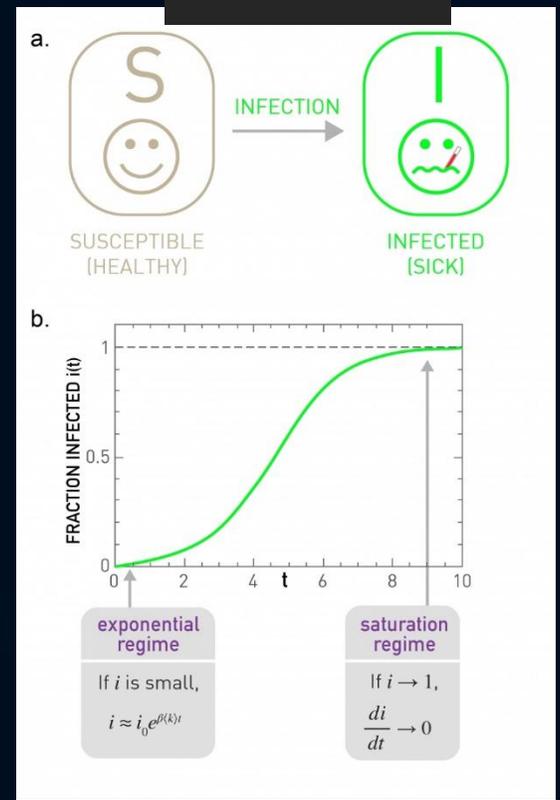
Deterministische Modelle der epidemischen Ausbreitung

Online-Buch 'Network Science' von Albert-Laszlo Barabasi,
Chapter 10: Spreading phenomena

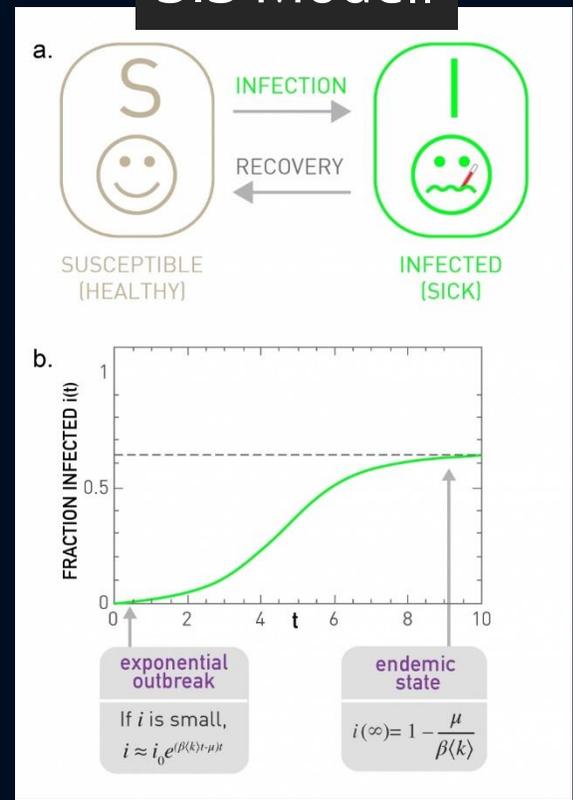
Die deterministischen Populationsmodelle der Epidemiologie basieren auf gewissen vereinfachten Grundannahmen.



SI Modell

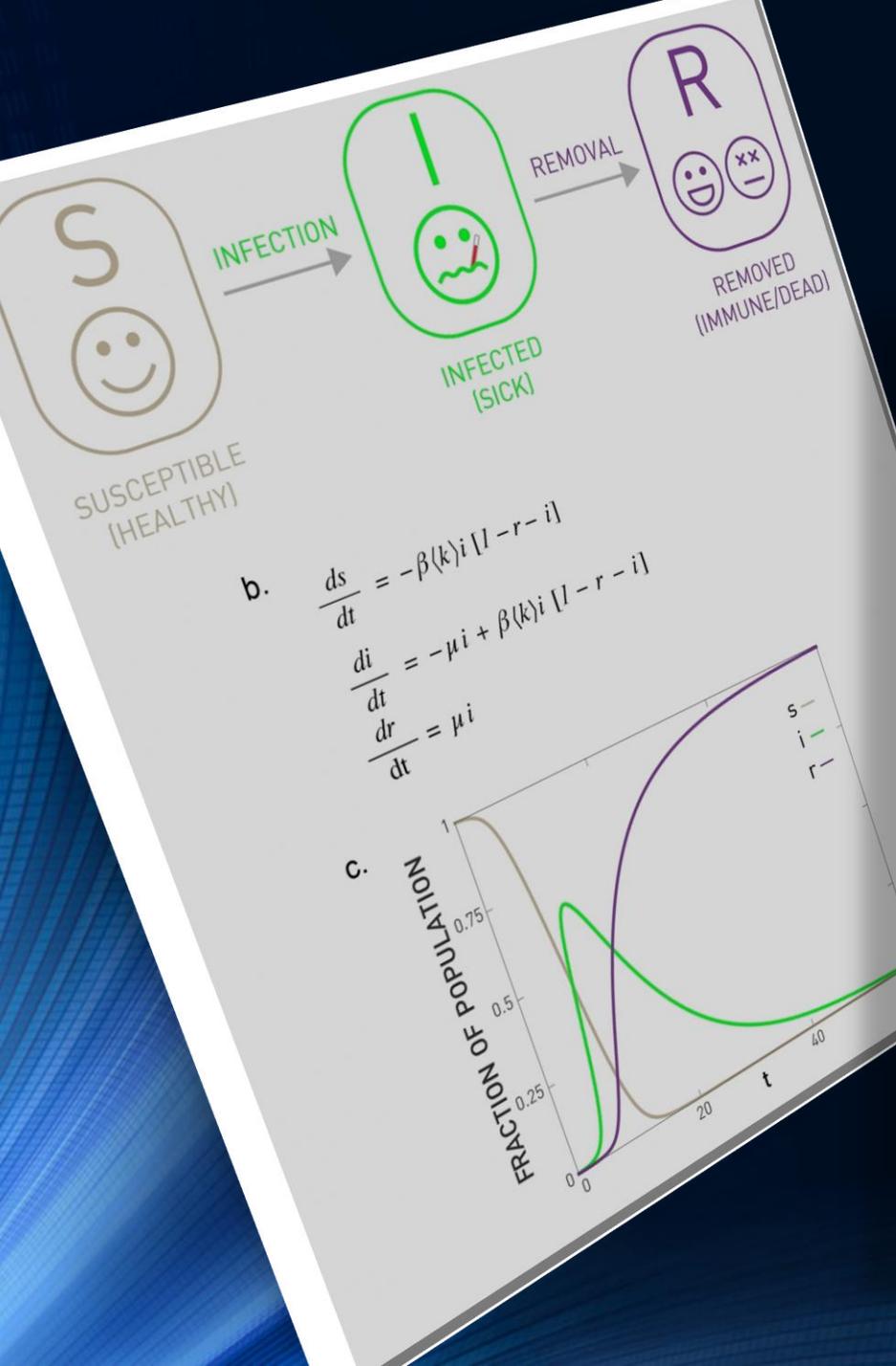


SIS Modell



Susceptible (S: Gesunde Personen, die mit dem Virus noch keinen Kontakt hatten)
 Infected (I: Infizierte Personen, die mit dem Virus Kontakt hatten und andere anstecken können),
 Recovered (Personen, die infiziert waren aber nicht mehr infektiös sind und sich von der Krankheit erholt haben),
 Removed (R: Recovered + gestorbene Personen)

Das deterministische SIR Modell

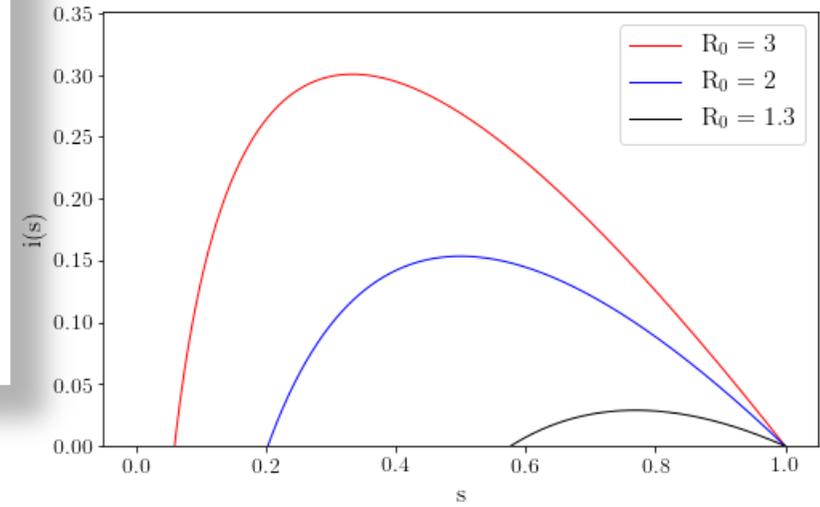
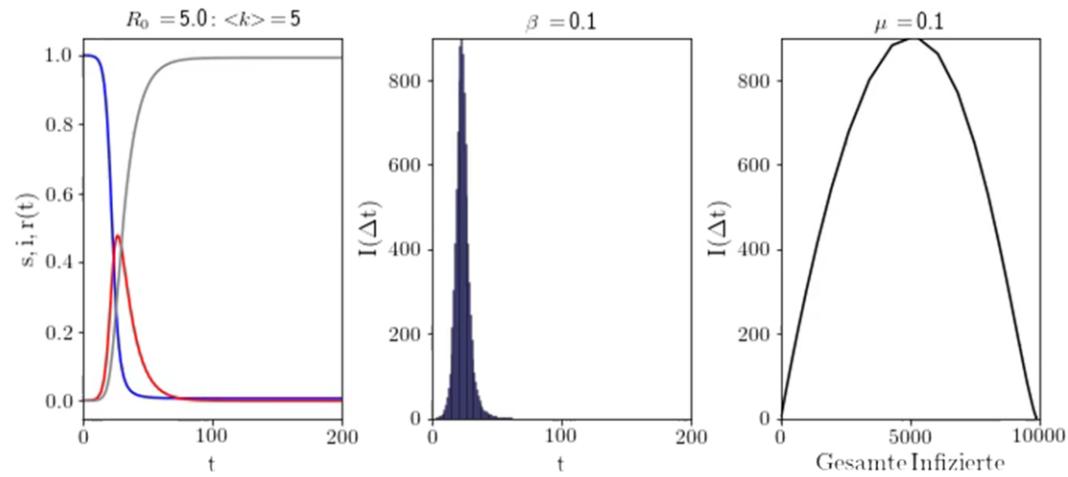


$$\frac{ds(t)}{dt} = - \underbrace{\beta \langle k \rangle i(t) \cdot s(t)}_{\text{pro } \Delta t \text{ neu Infizierte}}$$

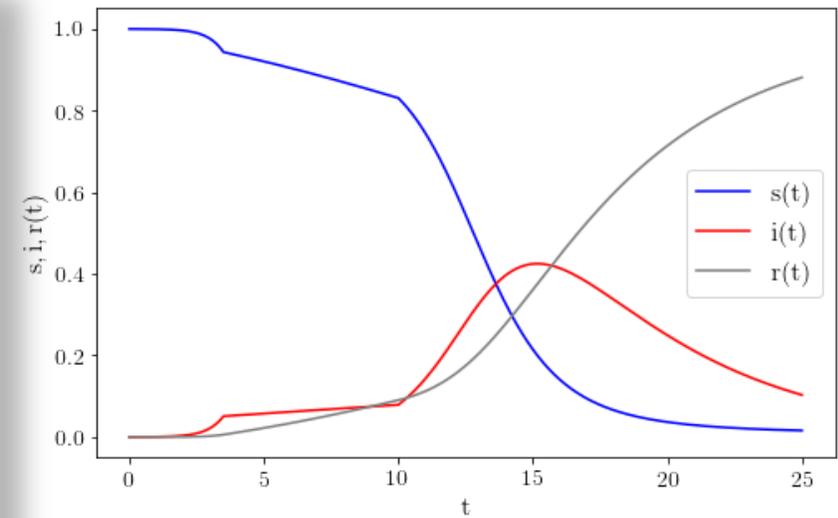
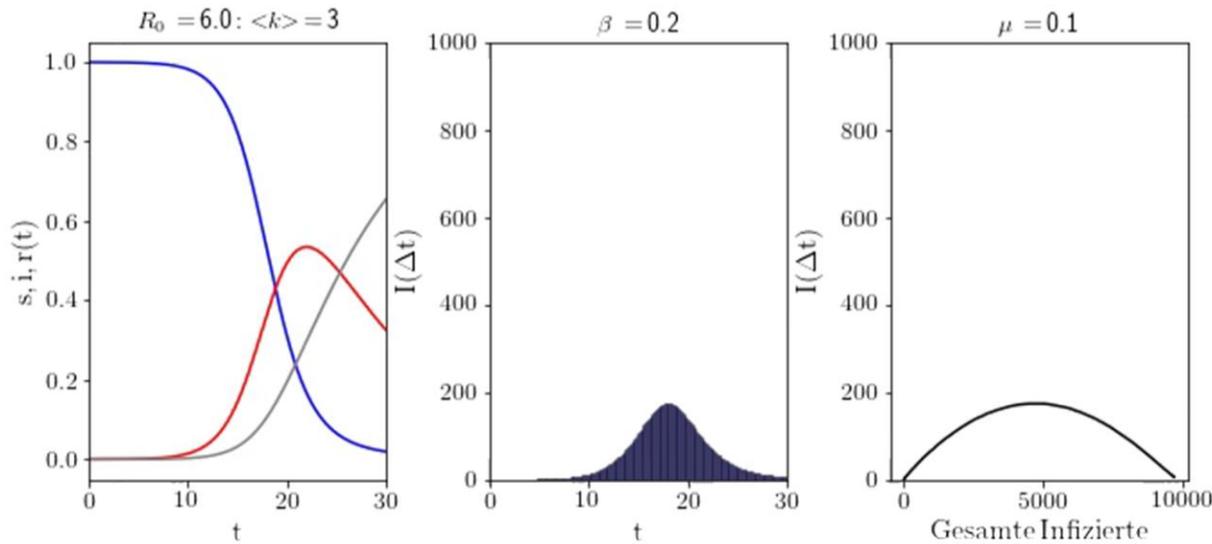
$$\frac{di(t)}{dt} = - \underbrace{\mu i(t)}_{\text{pro } \Delta t \text{ Gen. und Gest.}} + \underbrace{\beta \langle k \rangle i(t) \cdot s(t)}_{\text{pro } \Delta t \text{ neu Infizierte}}$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = \underbrace{\mu i(t)}_{\text{pro } \Delta t \text{ Genesene und Gestorbene}},$$

wobei $s(t) = \frac{S(t)}{N}$ der Anteil der noch nicht erkrankten Personen, $i(t) = \frac{I(t)}{N}$ der Anteil der infizierten Personen und $r(t) = \frac{R(t)}{N}$ der Anteil der genesenen und gestorbenen Personen darstellt.



Jupyter Notebook: Das deterministische SIR Modell



Simulationsbasierte, Stochastische Modelle

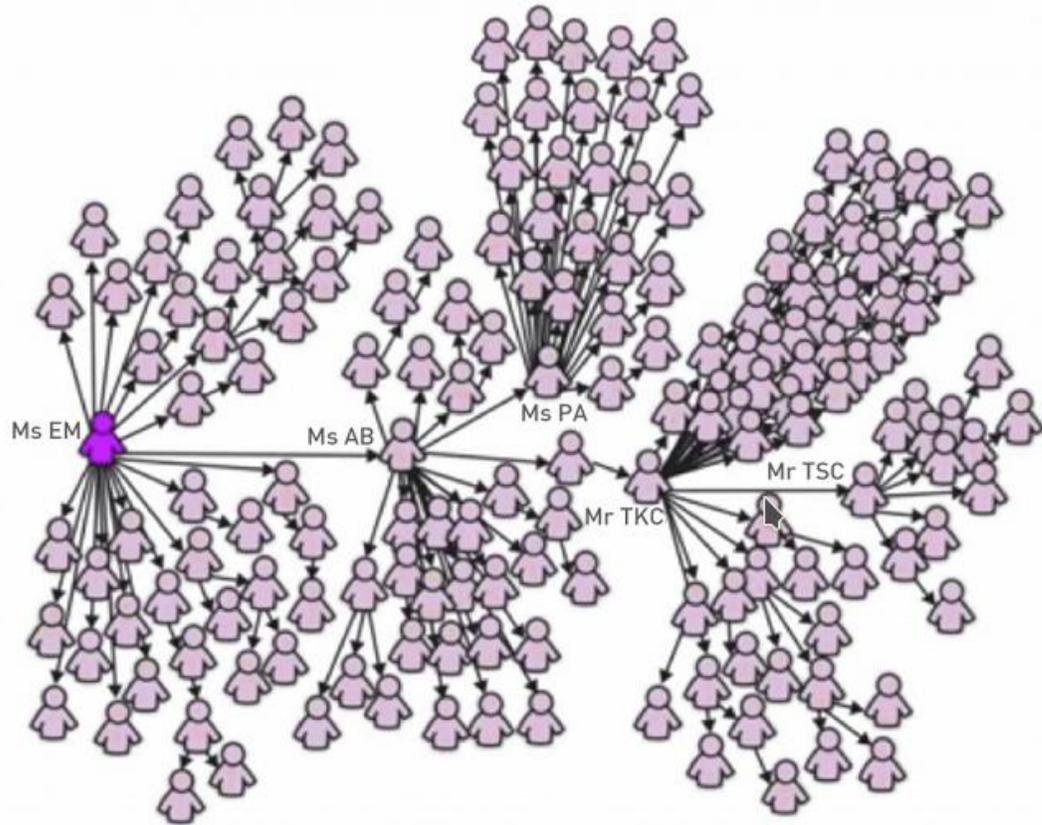


Image 10.1

Super-spreaders

One-hundred-and-forty-four of the 206 SARS patients diagnosed in Singapore were traced to a chain of five individuals that included four *super-spreaders*. The most important of these was *Patient Zero*, the physician from Guangdong Province in China, who brought the disease to the Metropole Hotel. After [1].

Eine bedeutende Einschränkung des deterministischen SIR-Modells der Virusausbreitung ist die im Modell angenommene vereinfachte Kontakt-Netzwerkstruktur der das Virus verbreitenden Personen. Die Ausbreitung eines Krankheitserregers (z.B. Covid-19 Virus), eines Computervirus im Internet oder eines Gerüchts ("Fake-News") in einem sozialen Netzwerk hängt jedoch stark von der Topologie des zugrundeliegenden komplexen Netzwerkes ab.

Die Grundhypothesen des SIR Modells sind in der Realität nicht erfüllt und beobachtbare Effekte, wie z.B. das Super-Spreader Phänomen, können durch das SIR-Modell nicht beschrieben werden.

Simulationsbasierte Modelle berechnen hingegen die Ausbreitung eines Krankheitserregers auf einer komplexen Netzwerkstruktur, wobei die einzelnen Personen in ihrem Mobilitäts- und Kontakt-Netzwerk eingebettet sind.

Simulationsbasierte, Stochastische Modelle

Eine der die Ausbreitung am stärksten bestimmende Größe ist die zugrundeliegende Kontakt-Netzwerkstruktur der das Virus verbreitenden Personen.

In den simulationsbasierten Modellen kann man die Auswirkungen der Topologie des Kontakt-Netzwerks studieren. Die Verteilungsfunktion der Knotengrade spielt hierbei wieder eine bedeutende Rolle und kann mittels der 'degree block'-Approximation analysiert werden (siehe Image 10.9 in [Chapter 10: Spreading phenomena](#)).

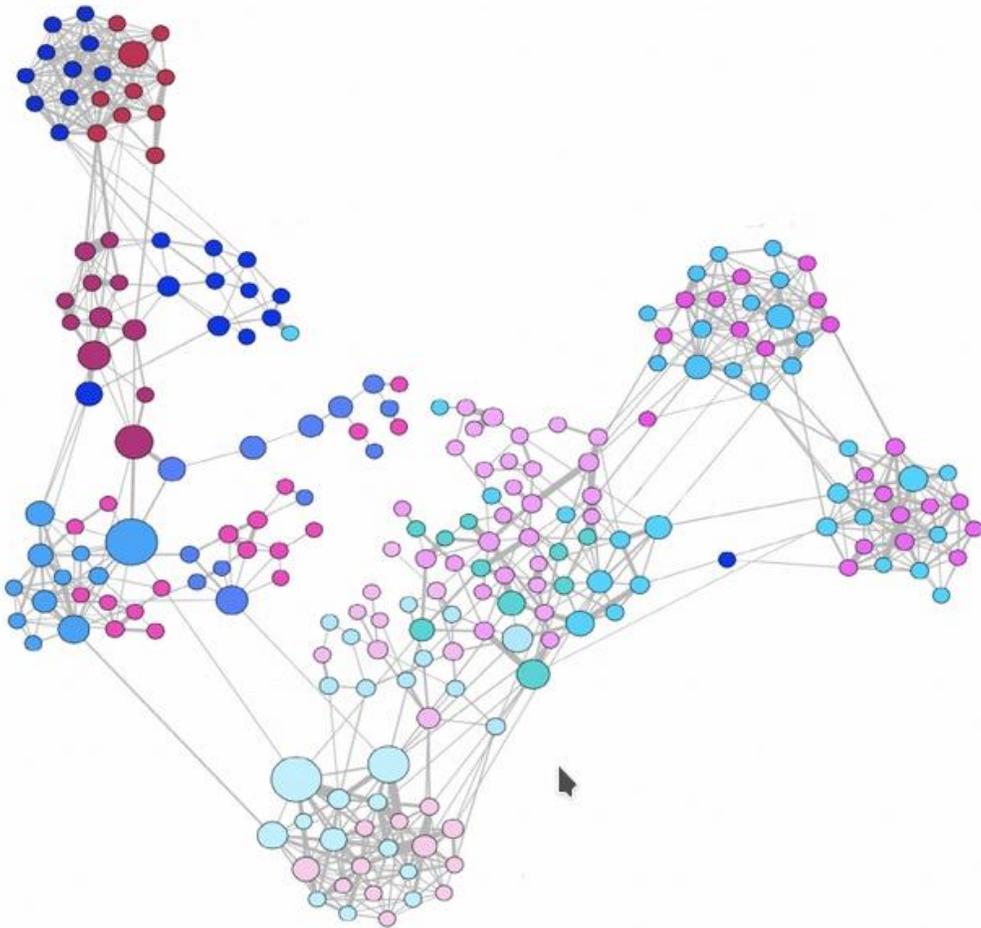
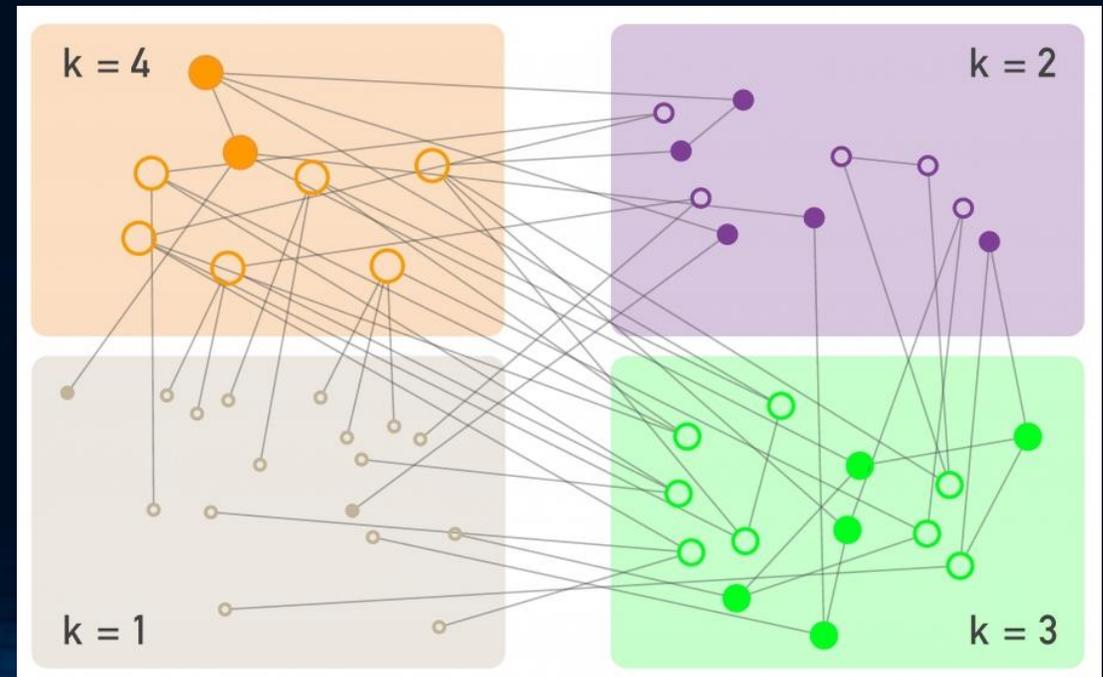


Image 10.16

A Face-to-face Interactions

A face-to-face contact network mapped out using RFA tags, capturing interactions between 232 students and 10 teachers across 10 classes in a school [31]. The structure of the maps obtained by RFID tags depend on the context in which they are collected. For example the school network shown here reveals the presence of clear communities. In contrast, a study capturing the interactions between individuals that visited a museum reveal an almost linear network [29]. Finally, a network of attendees of a small conference is rather dense, as most participants interact with most others [29]. After [31].



Jupyter Notebook: Ausbreitung eines Virus auf einem komplexen Netzwerk *Simulationsbasierte Lösungen*

Computer

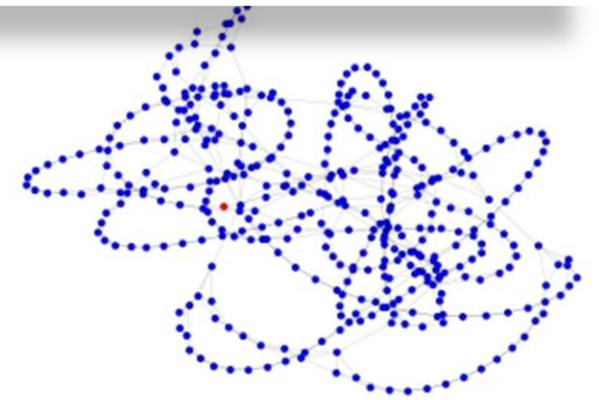
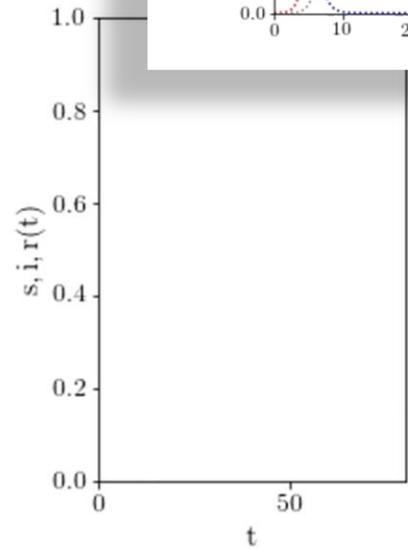
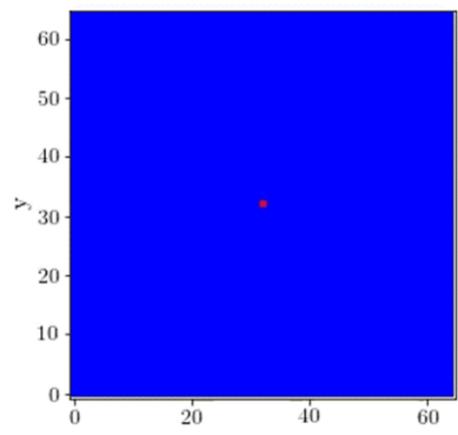
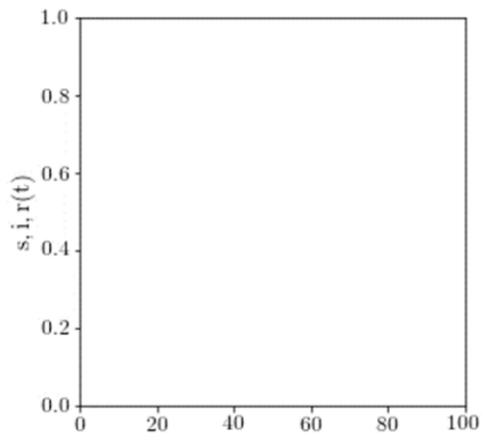
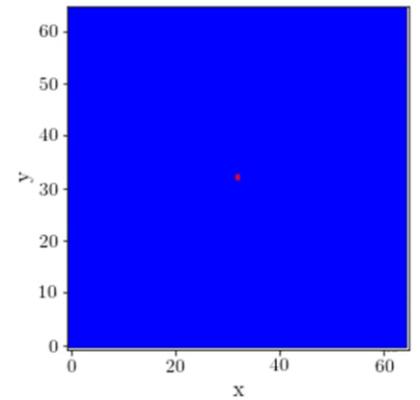
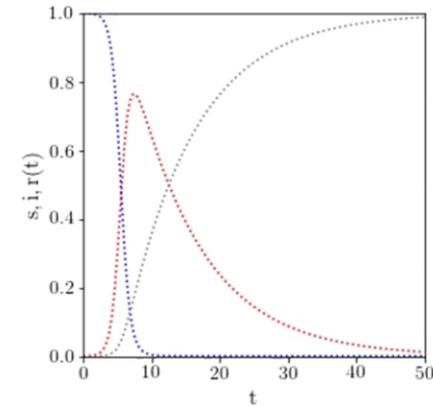
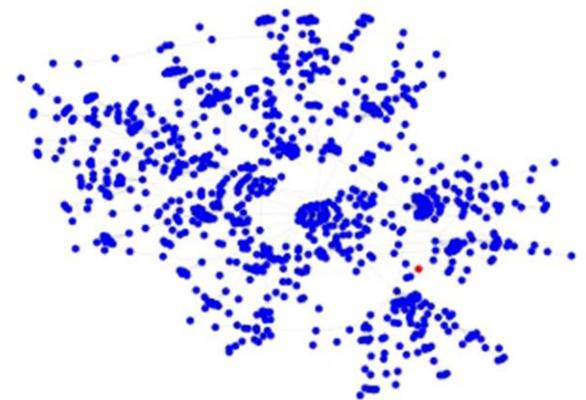
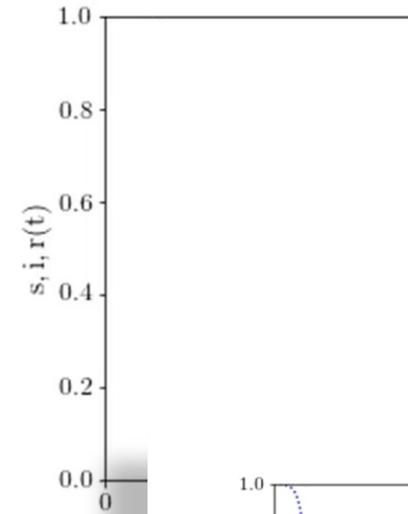
Physik der sozio-ökonomischen Systeme
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
Frankfurt am Main 31.12.2020

Zweiter Vorlesungsteil:
Ausbreitung eines Virus auf einem komplexen Netzwerk
Simulationsbasierte Lösungen

vereinfachte Kontakt-
matrix im Internet oder
in der Literatur
Angenommen, die Ausbreitung des Virus erfolgt über ein Netzwerk
von Kontakten (z.B. im Internet oder in der Literatur)



Wozu?

Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

Die **deterministische evolutionäre Spieltheorie** und die Differentialgleichung der Replikatordynamik benutzen ähnliche Annahmen wie das **deterministische SIR-Modell** der Ausbreitung eines Krankheitserregers auf einem komplexen Netzwerk. Beide mathematischen Modelle betrachten das zu untersuchende System aus einer Art gemittelten Sichtweise und beschreiben es durch die kontinuierliche Populationsfunktionen, die Ihrerseits deterministischen Differentialgleichungen folgen. Die nötigen Voraussetzungen einer solchen Beschreibung sind hierbei die Folgenden:

- Jedes Individuum der Population kann mit jedem anderen in Kontakt treten, bzw. Jeder Spieler der Population kann mit jedem anderen das zugrundeliegende Spiel spielen
- Die Anzahl der Individuen/Spieler der Population ist unendlich groß

In dem, in dieser Vorlesung dargestellten Jupyter Notebook „Ausbreitung eines Virus auf einem komplexen Netzwerk (*Simulationsbasierte Lösungen*)“, hatten wir gesehen, wie eine Agentenbasierte Simulation des deterministischen SIR-Modells aussieht und inwieweit die simulierten Ergebnisse mit den Vorhersagen des mathematischen Modells übereinstimmen. Zusammenfassend ist hierbei festzuhalten, dass allein im Limes eines sehr großen, vollständig verbundenem Netzwerks, die Vorhersagen der deterministischen Populationsmodelle mit den Simulationsergebnissen übereinstimmen können.

Das Versagen der deterministischen Modelle zur Beschreibung eines realen Systems, zeigte sich in deutlicher Weise während der Covid-Pandemie. Eine **Physik der sozio-ökonomischen Systeme**, deren Zweck darin besteht real-existierende Vorgänge zu beschreiben und zu analysieren, um so die zukünftige Entwicklung eines Populationsverhaltens vorhersagen zu können, ist somit auf simulationsbasierte Ansätze unter Verwendung komplexer Netzwerke angewiesen. Jedoch versagten auch die meisten simulationsbasierten Modelle, da das reale Verhalten der Population komplizierter ist. So änderte sich z.B. das Kontaktnetzwerk nicht nur allein durch die verordnete Kontaktbeschränkung, sondern auch durch die mediale Verbreitung einer hohen Gefahr der Ansteckung. Die Rolle der Medien (beschränkte/selektive Informationsausbreitung), und als Folge die Gruppenbildung (siehe „Formation of Communities“) und die mit ihr einhergehende „Parallelweltbild-Entstehung“ innerhalb der Sub- Communities (z.B. „Medienkritische-Gruppe“ vs. „Medienkonforme-Gruppe“) sind nur einige Beispiele der komplexen Realität.

Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

Viele in der Realität vorkommende evolutionäre Spiele werden auf einer definierten Netzwerkstruktur (Topologie) gespielt. Die Spieler der betrachteten Population sind hierbei nicht gleichwertig, sondern wählen als Spielpartner nur mit ihnen durch das Netzwerk verlinkte (verbundene) Partner aus.

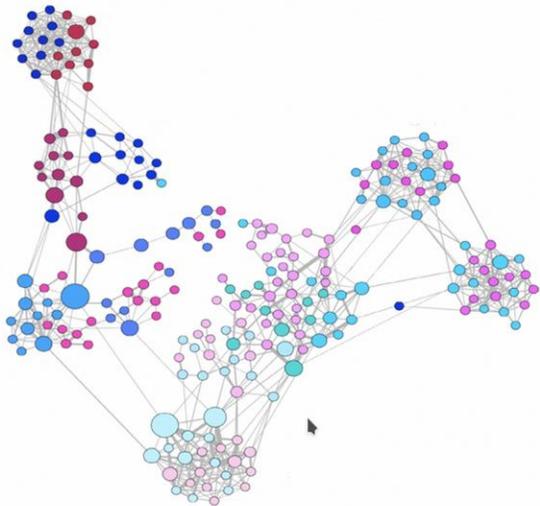
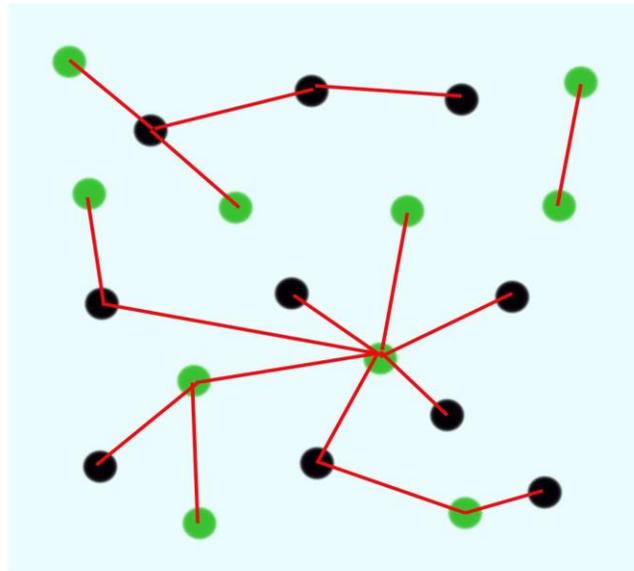


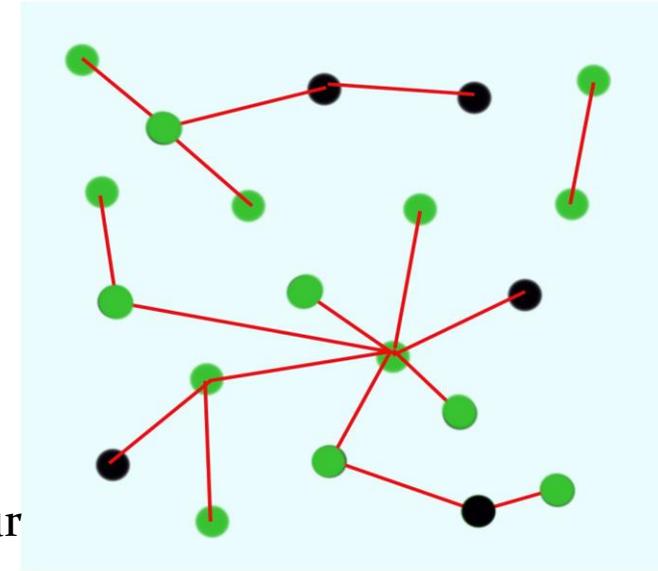
image 10.16
A Face-to-face Interactions
A face-to-face contact network mapped out using RFA tags, capturing interactions between 232 students and 10 teachers across 10 classes in a school [31]. The structure of the maps obtained by RFID tags depend on the context in which they are collected. For example the school network shown here reveals the presence of clear communities. In contrast, a study capturing the interactions between individuals that visited a museum reveal an almost linear network [29]. Finally, a network of attendees of a small conference is rather dense, as most participants interact with most others [29]. After [31].



$$x(0)=0.5$$



zeitliche
Entwicklung
der
Population auf
vorgegebener
Netzwerkstruktur



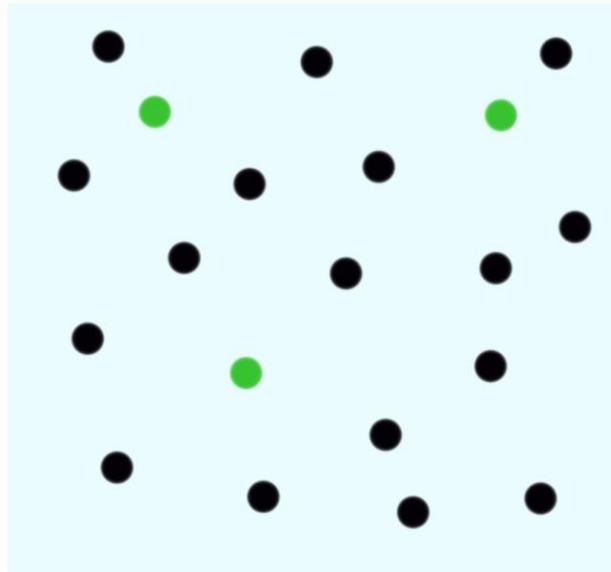
$$x(10)=0.75$$

Mögliche Strategien: (grün , schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
 $x(t)$: Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.
Die roten Verbindungslinien beschreiben die möglichen Spielpartner des Spielers

Wiederholung: Evolutionäre Spieltheorie

Symmetrische (2x2)-Spiele einer Population

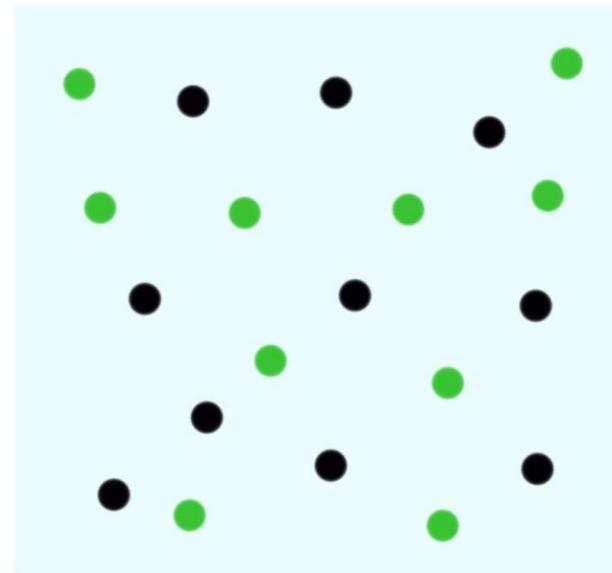
Die evolutionäre Spieltheorie betrachtet die zeitliche Entwicklung des strategischen Verhaltens einer gesamten Spielerpopulation.



$$x(0)=0.15$$



zeitliche
Entwicklung
der
Population



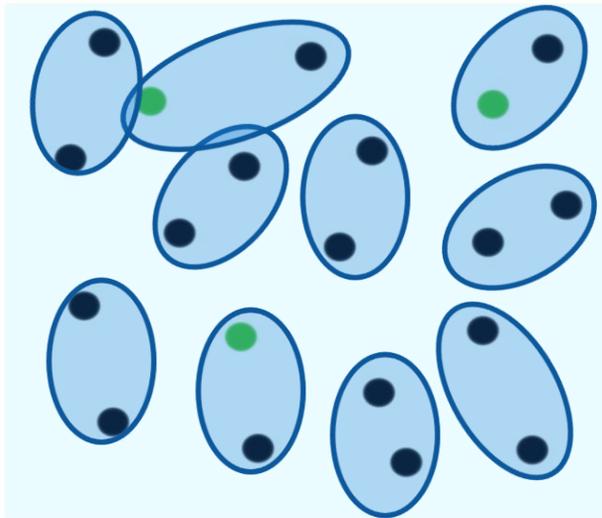
$$x(10)=0.5$$

Mögliche Strategien: (grün, schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
 $x(t)$: Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.

Evolutionäre Spieltheorie

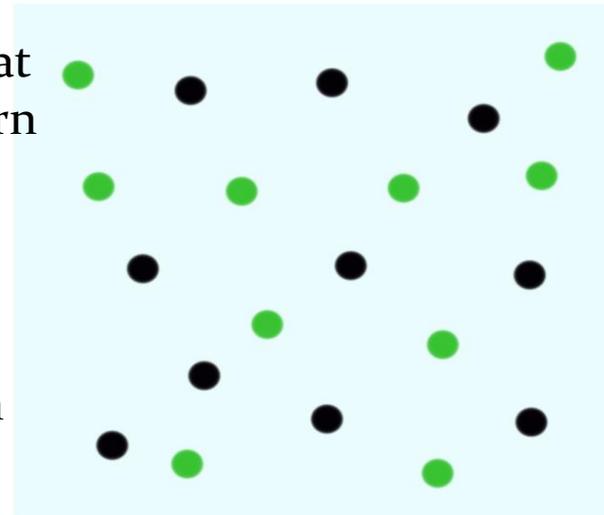
Symmetrische (2x2)-Spiele einer Population

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner wechseln .



$$x(0)=0.15$$

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt $t=0$ das erste Mal das Spiel. Die Spieler wählen im Mittel zu 15% die grüne Strategie.



$$x(10)=0.5$$

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die Spieler zunehmend attraktiver. Zum Zeitpunkt $t=10$ spielen schon 50% grün.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_i^A(t)}{dt} &= \left[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \$_{il}^A x_l^B(t)}_{\text{Fitness der Strategie i}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{k=1}^{m_A} \$_{kl}^A x_k^A(t) x_l^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population A}} \right] x_i^A(t) \quad (1) \\
 \frac{dx_j^B(t)}{dt} &= \left[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \$_{lj}^B x_l^A(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \sum_{k=1}^{m_B} \$_{lk}^B x_l^A(t) x_k^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population B}} \right] x_j^B(t) \quad ,
 \end{aligned}$$

wobei $x_i^A(t)$, $i = 1, 2, \dots, m_A$ und $x_j^B(t)$, $j = 1, 2, \dots, m_B$ die Anteile der in den Spielergruppen A und B zur Zeit t gewählten Strategien widerspiegeln und in der Soziobiologie den Frequenzen der *Quasispezies* entsprechen.

Nimmt man zusätzlich ein symmetrisches Spiel an ($\hat{\$} := \hat{\$}^A = \left(\hat{\$}^B\right)^T$), in welchem die Auszahlungswerte (Fitness-Werte) der Populationsgruppen gleich sind, so kann man die beiden Gruppen von ihrer mathematischen Struktur her als ununterscheidbare Spielergruppen mit identischen Populationsvektoren $x(t) = y(t)$ annehmen. Die Differentialgleichung schreibt sich dann wie folgt:

$$\frac{dx(t)}{dt} = [(\$_{11} - \$_{21})(x - x^2) + (\$_{12} - \$_{22})(1 - 2x + x^2)] x(t) =: g(x) \quad (3)$$

Verallgemeinert man diese Differentialgleichung wieder auf mehr als zwei Strategien, so kann man abkürzend die folgende Formulierung schreiben:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \hat{\mathbf{x}} \left(\hat{\$} \vec{x} \right) - \left(\left(\hat{\$} \vec{x} \right)^T \vec{x} \right) \vec{x}$$

Replikatorodynamik

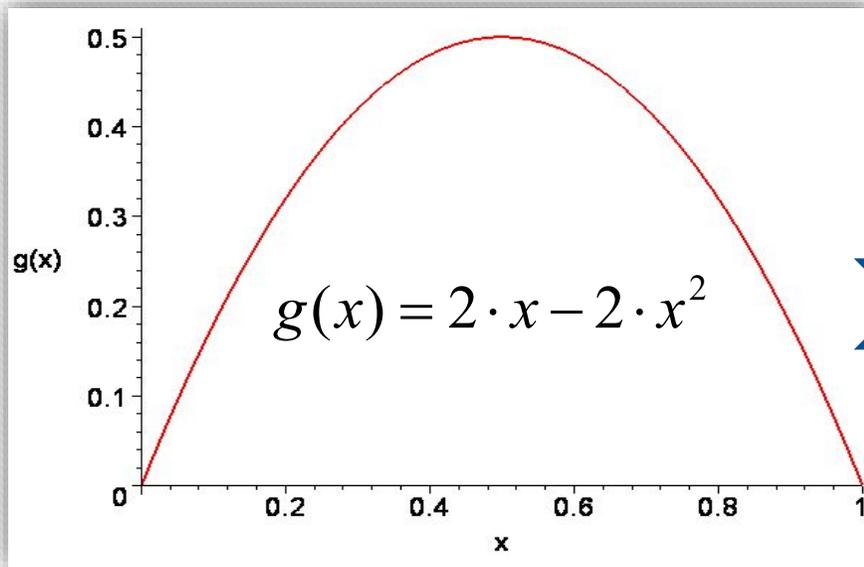
(für das Gefangenendilemma)

Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das Gefangenendilemma lautet:

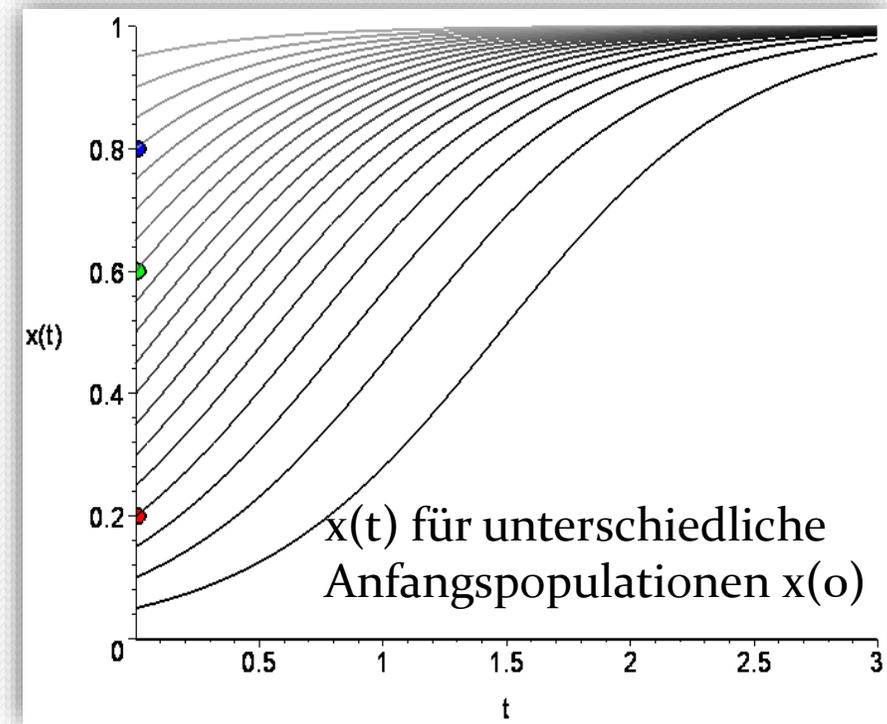
$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot x(t) - 2 \cdot (x(t))^2 = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((-7 - (-9)) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (-3 - (-1)) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

| | Ge | Sc |
|----|----------|----------|
| Ge | (-7, -7) | (-1, -9) |
| Sc | (-9, -1) | (-3, -3) |



Beispiel: Gefangenendilemma
 $g(x)=g(x(t))$ im Bereich $[0,1]$ dargestellt



Replikatorodynamik

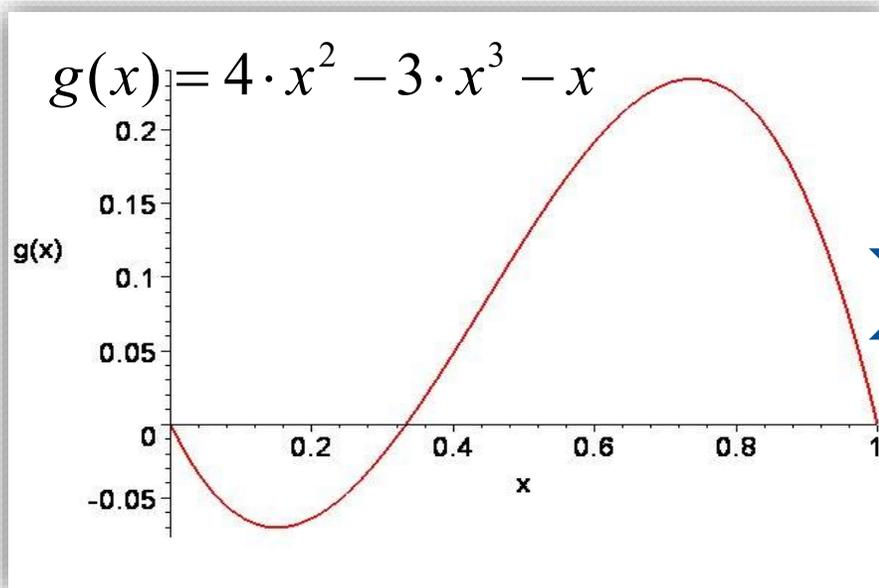
(für das Hirschjagt-Spiel)

Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das Hirschjagt-Spiel lautet:

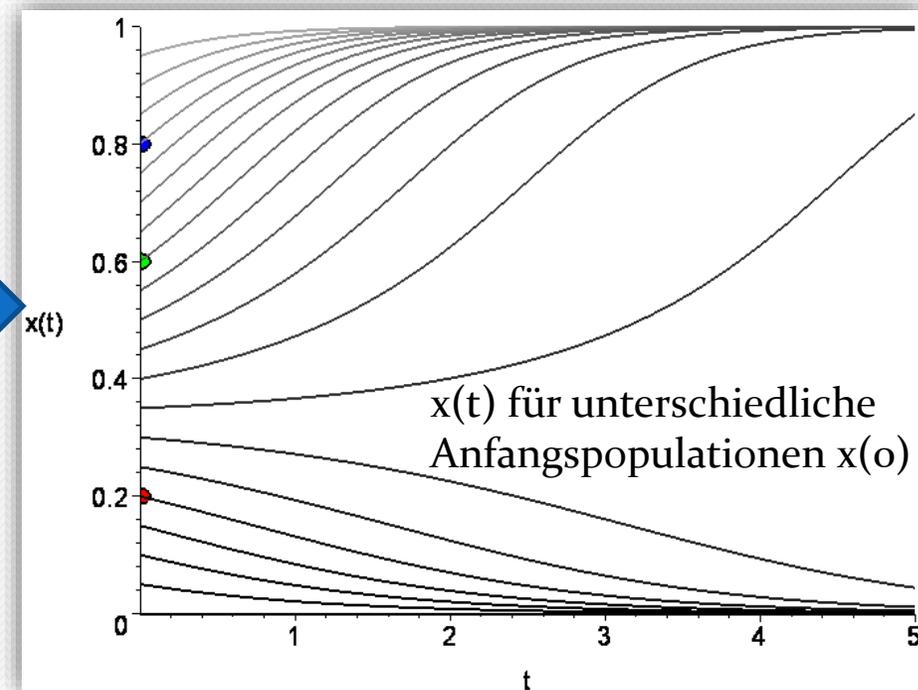
$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 4 \cdot (x(t))^2 - 3 \cdot (x(t))^3 - x(t) =: g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((2 - 0) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (5 - 4) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

| | Hasen | Hirsch |
|--------|--------|--------|
| Hasen | (2, 2) | (4, 0) |
| Hirsch | (0, 4) | (5, 5) |



Beispiel: Hirschjagt-Spiel
 $g(x) = g(x(t))$ im Bereich $[0,1]$ dargestellt



Replikatordynamik

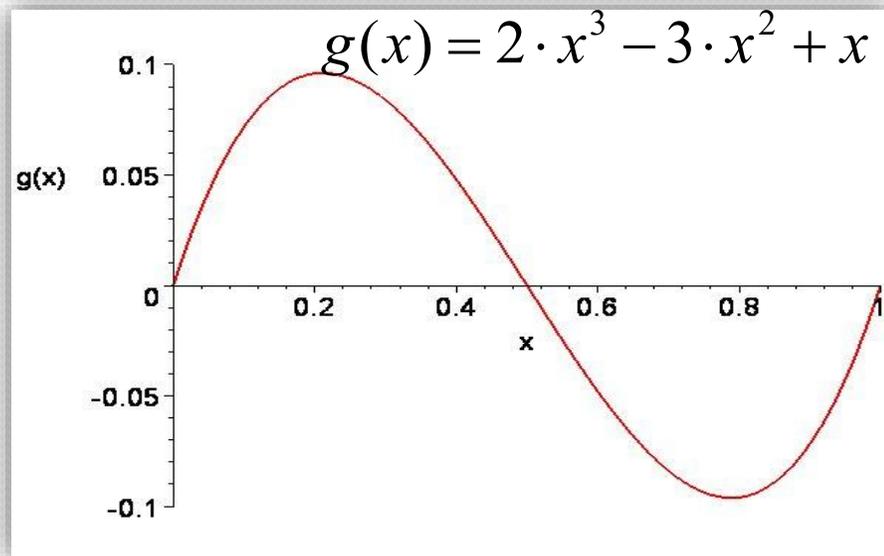
(für das Angsthasen-Spiel)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Angsthasen-Spiel lautet:

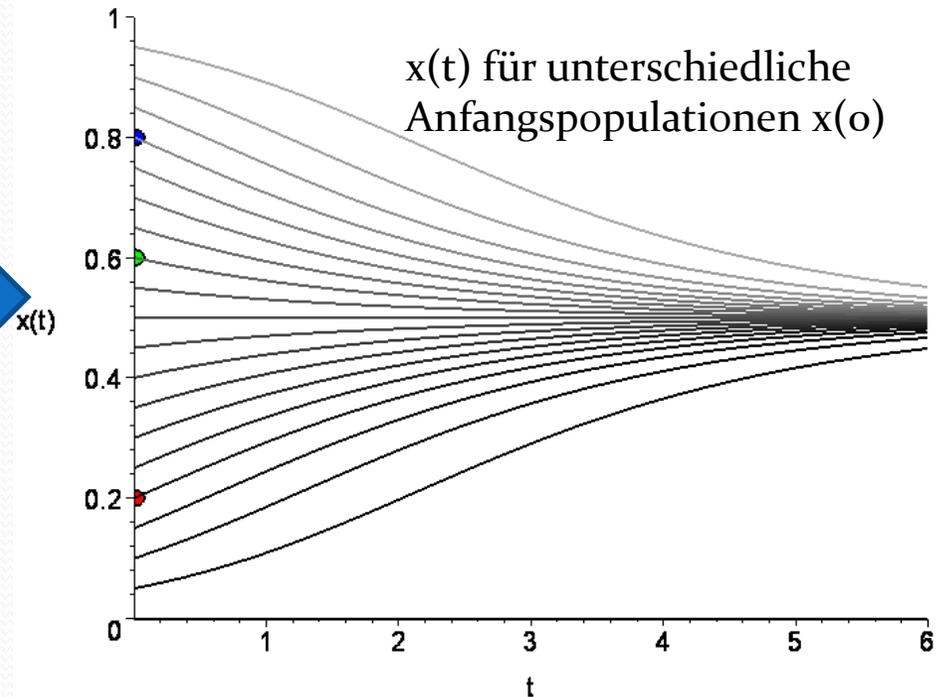
$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot (x(t))^3 - 3 \cdot (x(t))^2 + x(t) = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((-1 - 0) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (1 - 2) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

| | Springe nicht | Springe |
|---------------|---------------|---------|
| Springe nicht | (-1, -1) | (2, 0) |
| Springe | (0, 2) | (1, 1) |

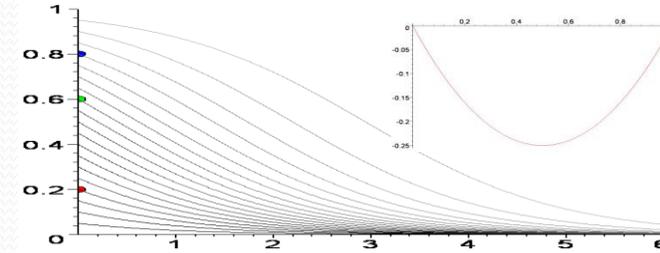


Beispiel: Angsthasen-Spiel
 $g(x)=g(x(t))$ im Bereich $[0,1]$ dargestellt

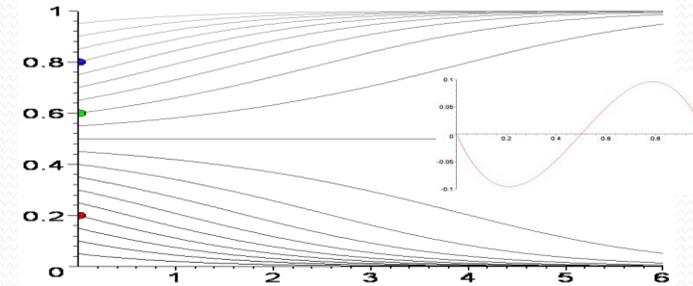


Klassifizierung von evolutionären, symmetrischen (2x2)-Spielen

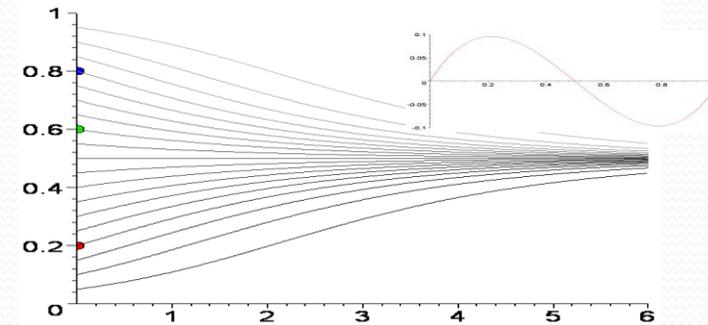
- **Dominante Spiele**
(2. Strategie dominiert 1.Strategie)
Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei $x=0$.



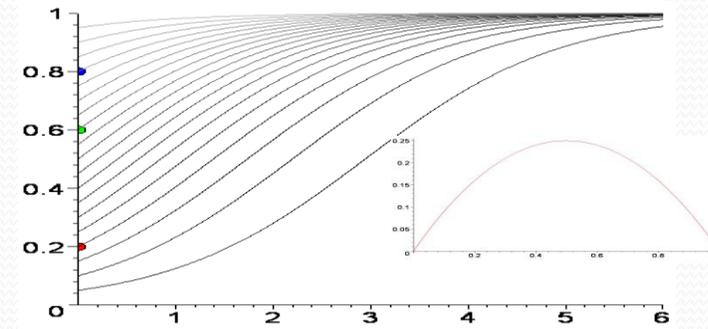
- **Koordinationsspiele**
Es existieren drei Nash - Gleichgewichte und zwei reine ESS, die abhängig von der Anfangsbedingung realisiert werden.



- **Anti - Koordinationsspiele**
Es existieren drei Nash - Gleichgewichte aber nur eine gemischte ESS, die unabhängig von der Anfangsbedingung realisiert wird.



- **Dominante Spiele**
(1. Strategie dominiert 2.Strategie)
Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei $x=1$.



Frequency-dependent selection dynamics between two strategies, A and B

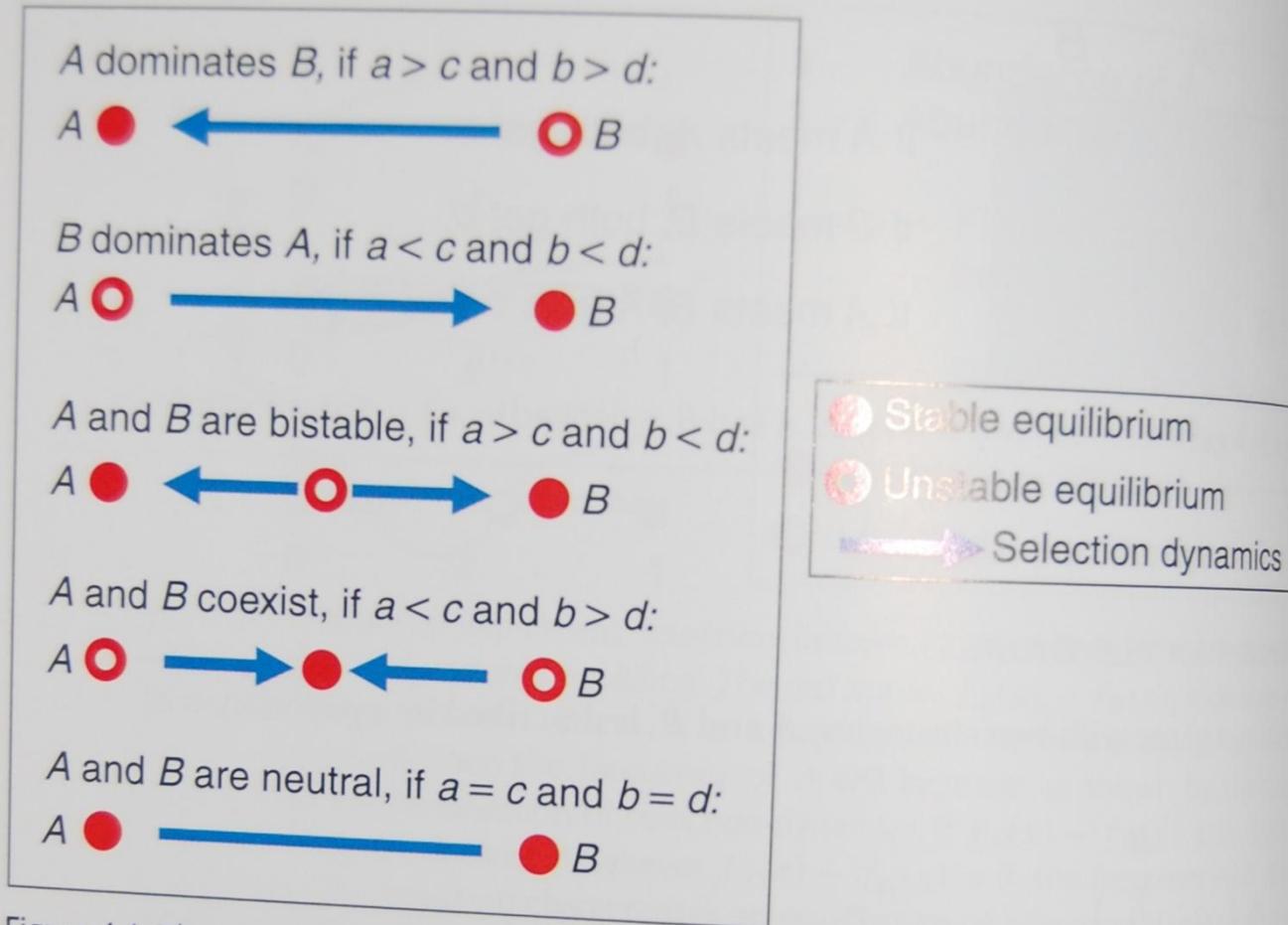
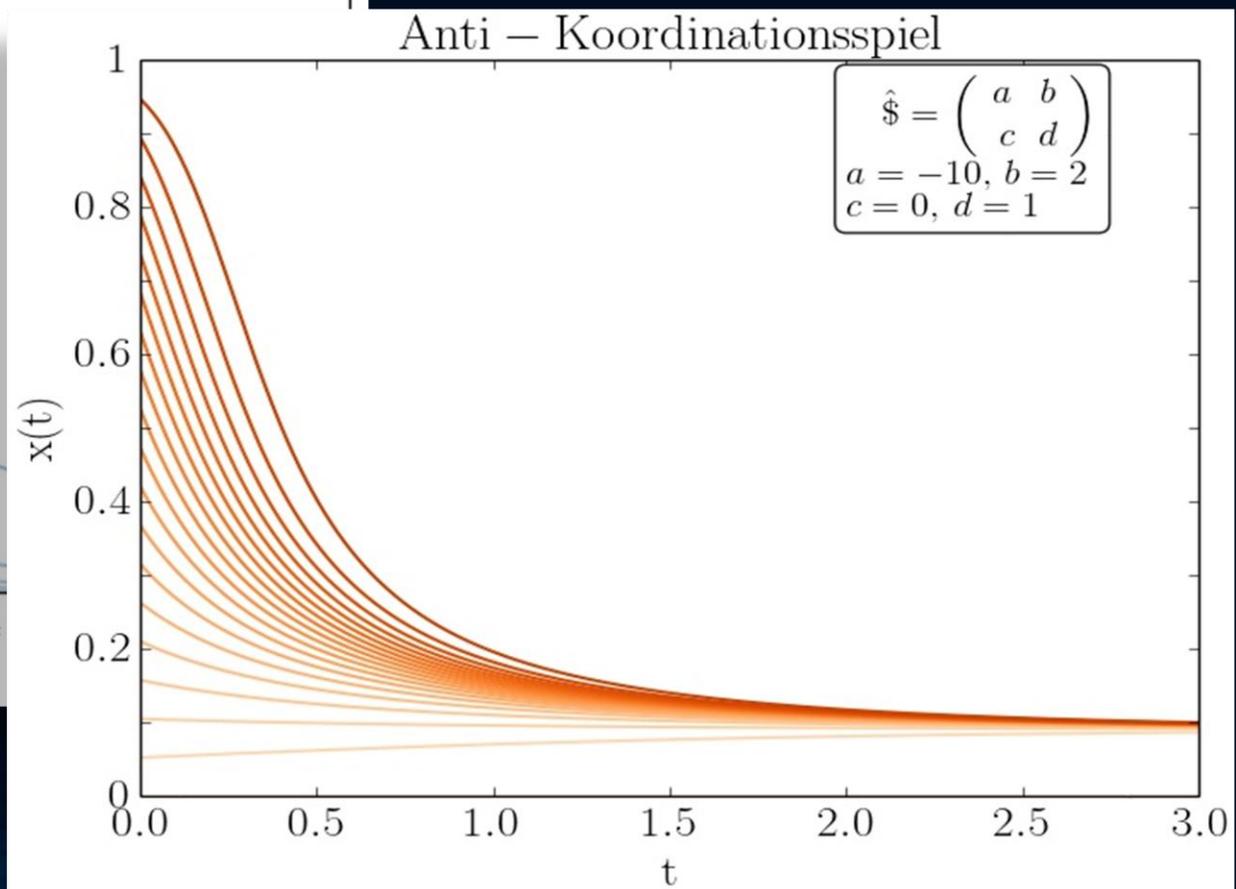
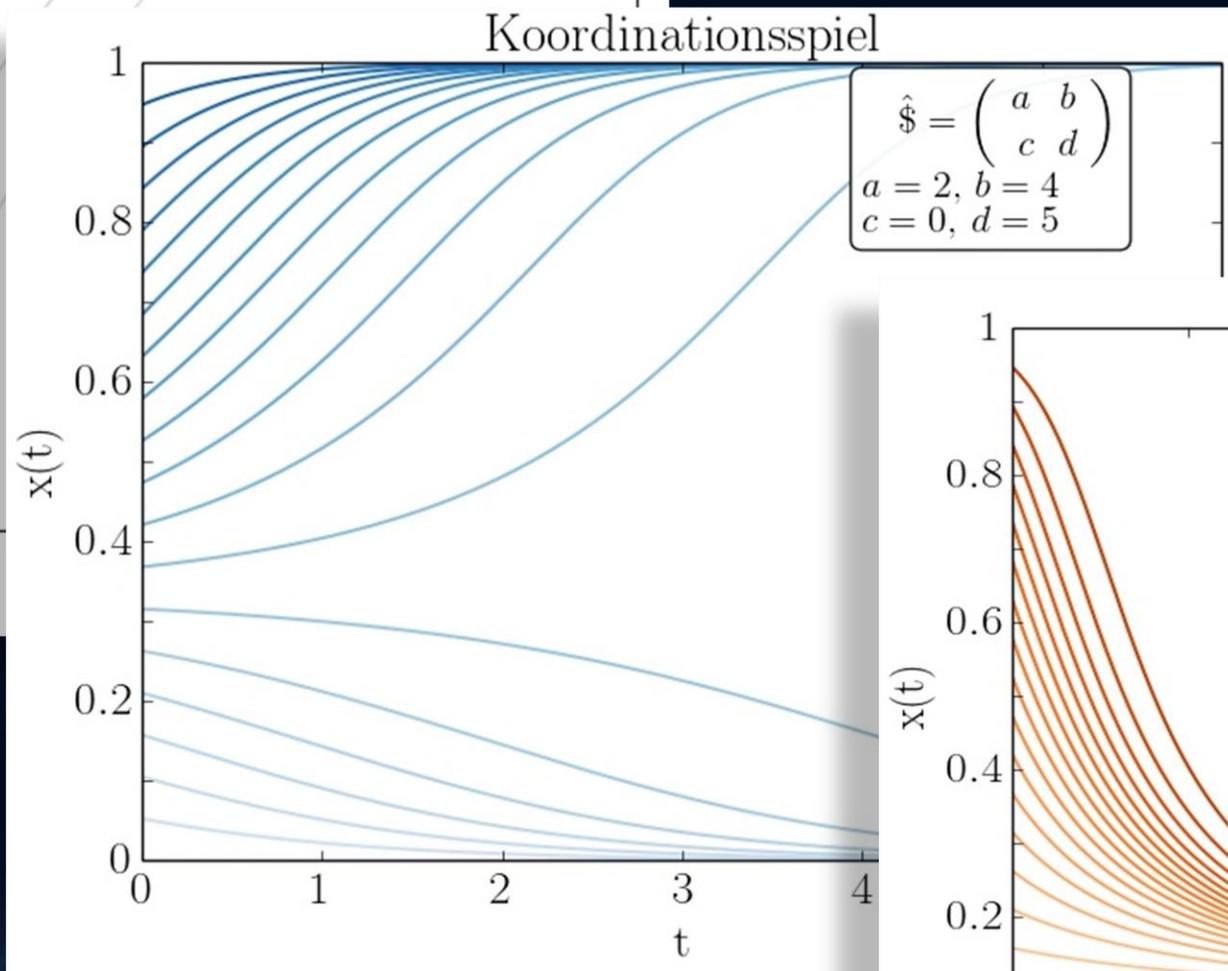
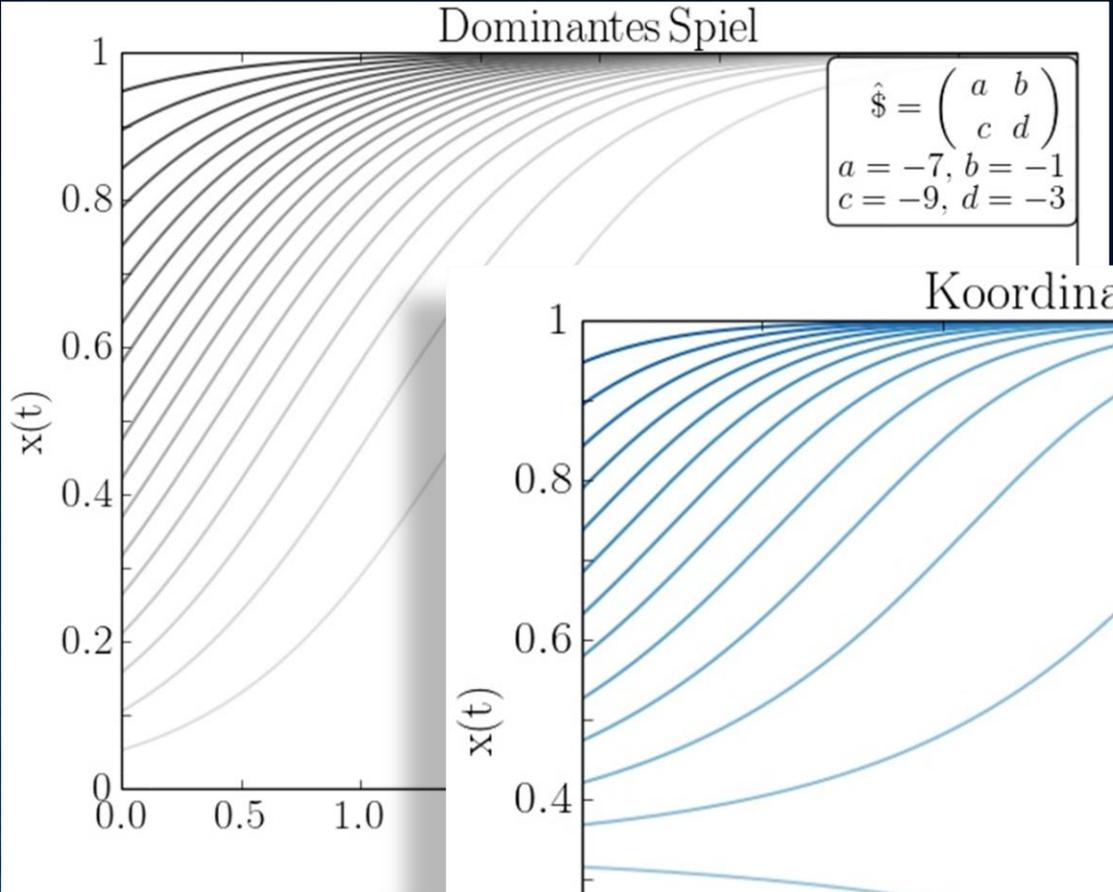


Figure 4.4 There are five possibilities for the selection dynamics between two strategies: (i) A dominates B, (ii) B dominates A, (iii) A and B are bistable, (iv) A and B coexist in a stable equilibrium, and (v) A and B are neutral variants of each other.

Das Kapitel 4 (Evolutionary Games) in dem Buch M.A. Nowak „Evolutionary Dynamics“ befasst sich mit Spieltheorie (siehe Teil I der Vorlesung)

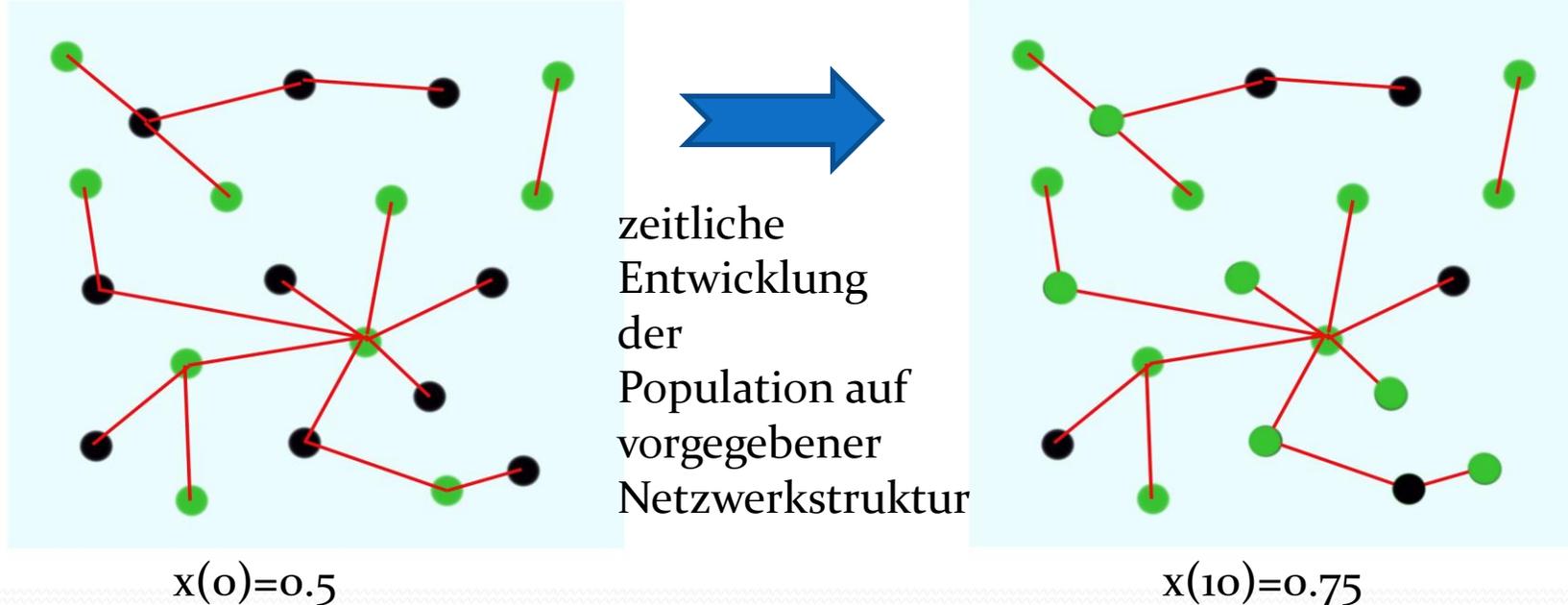
- **Dominante Spiele**
(2. Strategie dominiert 1. Strategie)
Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei $x=0$.
- **Koordinationsspiele**
Es existieren drei Nash – Gleichgewichte und zwei reine ESS, die abhängig von der Anfangsbedingung realisiert werden.
- **Anti – Koordinationsspiele**
Es existieren drei Nash – Gleichgewichte aber nur eine gemischte ESS, die unabhängig von der Anfangsbedingung realisiert wird.

Lösen des evolutionären Spiels mit Python



Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

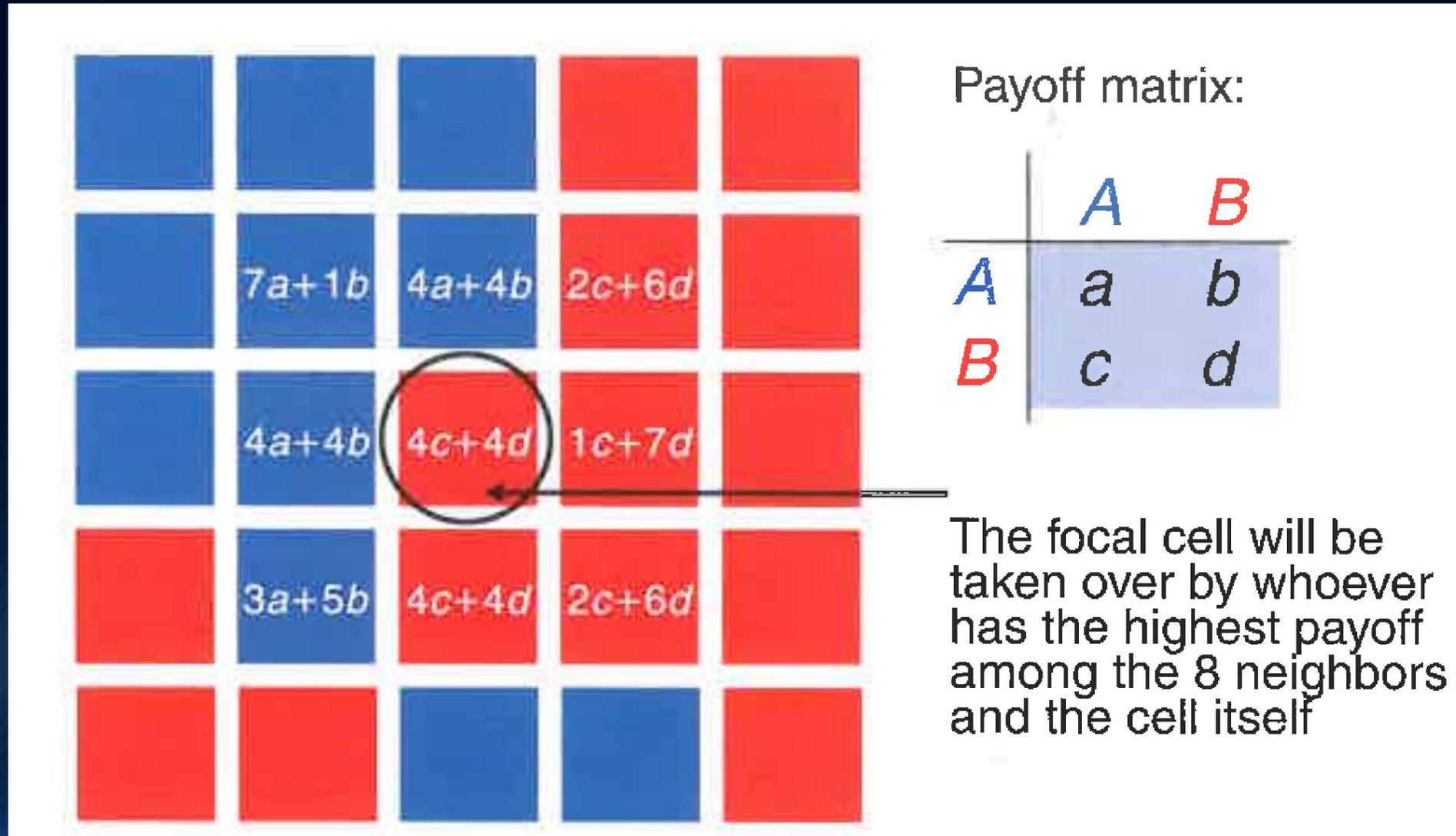
Viele in der Realität vorkommende evolutionäre Spiele werden auf einer definierten Netzwerkstruktur (Topologie) gespielt. Die Spieler der betrachteten Population sind hierbei nicht gleichwertig, sondern wählen als Spielpartner nur mit ihnen durch das Netzwerk verlinkte (verbundene) Partner aus.



Mögliche Strategien: (grün, schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
 $x(t)$: Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.
Die roten Verbindungslinien beschreiben die möglichen Spielpartner des Spielers

Spatial Games

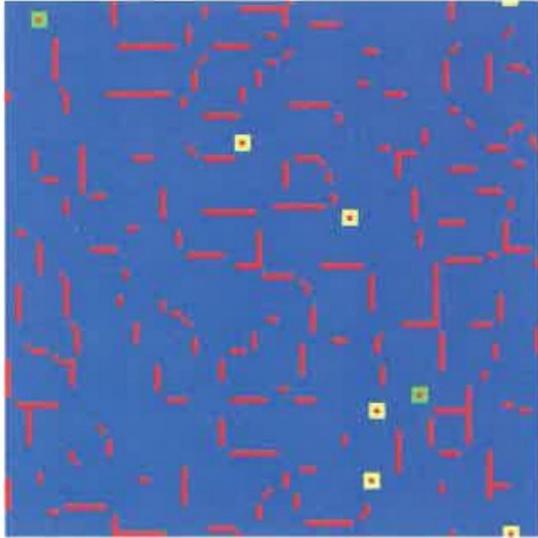
Das Kapitel 9 in dem Buch M.A. Nowak „Evolutionary Dynamics“ handelt über Spatial Games



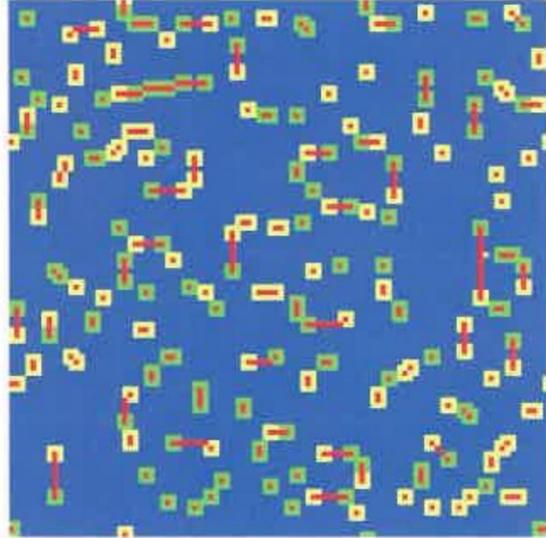
Die folgenden Abbildungen sind dem Buch M.A. Nowak „Evolutionary Dynamics“ entnommen.

Spatial Games

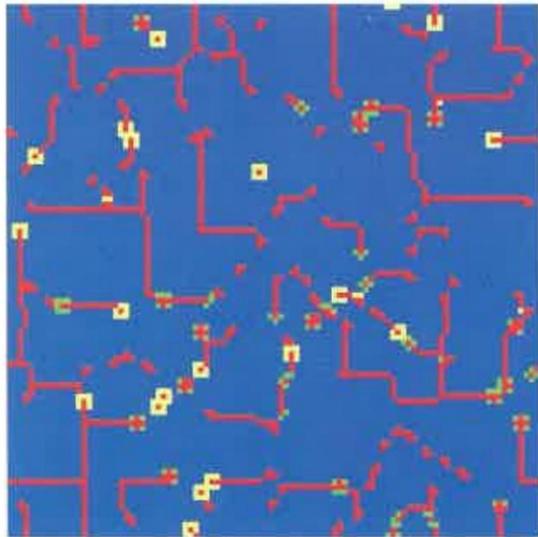
$b=1.10$



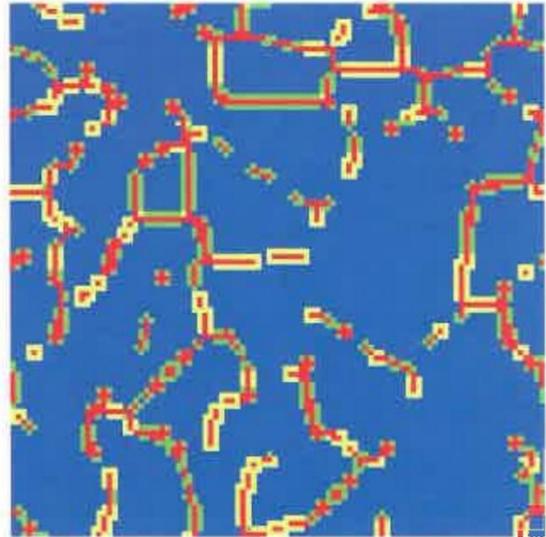
$b=1.15$



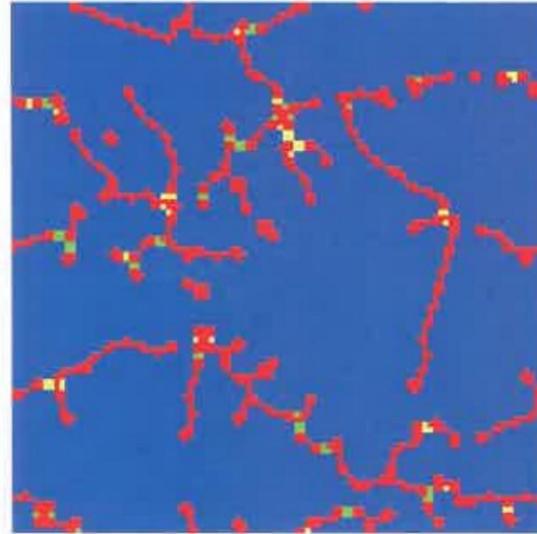
$b=1.24$



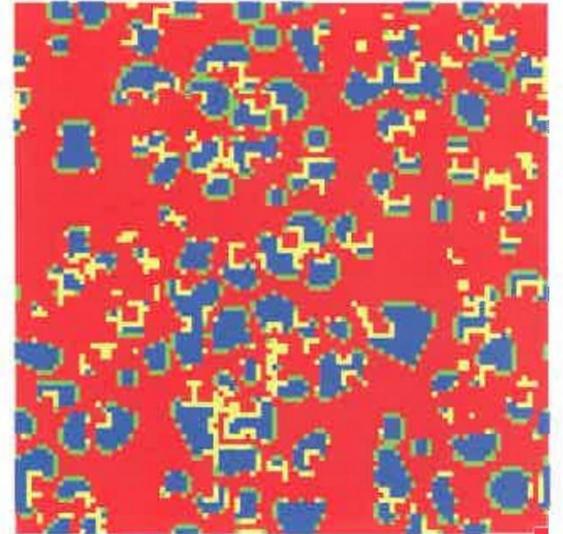
$b=1.35$



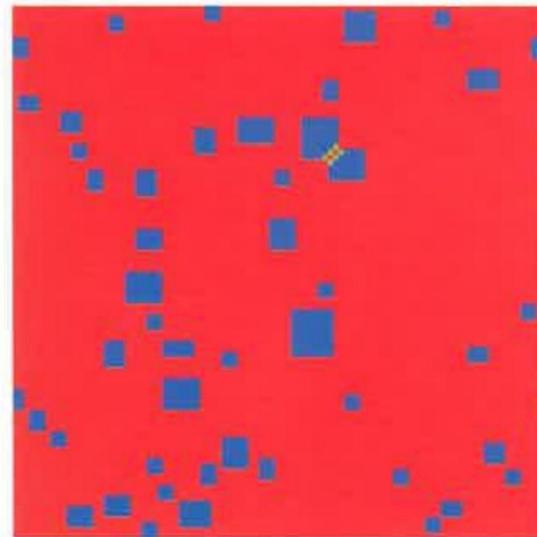
$b=1.55$



$b=1.65$



$b=1.70$



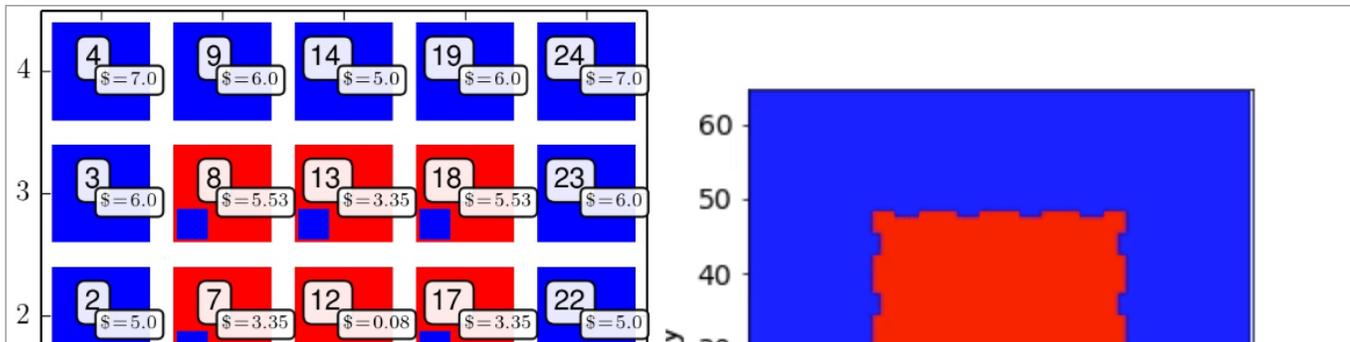
$$\begin{matrix} C & D \\ C & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & \epsilon \end{pmatrix} \\ D & \end{matrix}$$

Vorlesung 9

Das in der vorigen Vorlesung betrachtete deterministische SIR-Modell und die entsprechenden agenten-basierten Computersimulationen stellen eine Beispielanwendung der Theorie der komplexen Netzwerke dar. In dieser und der darauf folgenden Vorlesung werden wir die deterministische Beschreibung der evolutionären Spieltheorie (siehe Vorlesungen 3-5) in ähnlicher Weise durch stochastische Computersimulationen darstellen, wobei wir uns in dieser Vorlesung auf symmetrische (2x2)-Spiele auf einem räumlichen Gitter beschränken. Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke mit der evolutionären Spieltheorie stellt ein vielversprechendes mathematisches Modell dar, welches sowohl der interdisziplinären Grundlagenforschung, als auch der angewandten, empirischen Netzwerkforschung dienen kann. In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise einer Miteinbeziehung komplexer Netzwerktopologien in die evolutionäre Spieltheorie beschrieben. Die dann auf einem solchen komplexen Netzwerk ablaufenden Entscheidungsprozesse können in den meisten Fällen nur mittels numerischer, agenten-basierter Computersimulationen veranschaulicht werden. Nach einigen grundlegenden Vorbemerkungen zur *Evolutionären Spieltheorie auf komplexen Netzwerken*, werden wir zunächst die zeitliche Entwicklung von räumlichen dominanten Spielen untersuchen und mit den Lösungen der deterministischen evolutionären Spieltheorie vergleichen. Danach werden Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele auf einem räumlichen Gitter simuliert und analysiert.

Dominante räumliche Spiele

Wir betrachten zunächst ein räumliches, leicht dominantes Spiel mit der im rechten Panel angegebenen Auszahlungsmatrix und wählen als Anfangskonfiguration der Strategiewahl der Spielerpopulation eine Konstellation, bei der nur ein Spieler die dominante rote Strategie spielt und alle anderen Spieler die blaue Strategiewahl. Die Simulationen zeigen, dass $\forall 1 < c < 1.2$ in der zweiten Spielperiode ein Rechteck aus 9 roten Knoten entsteht, welches aber dann schon in der dritten Spielperiode wieder in einen einzelnen roten Zentrums-knoten übergeht. Die linke untere Abbildung zeigt die räumliche Spielkonstellation zu diesem Zeitpunkt ($c = 1.1$), wobei die eingezeichneten \$-Werte den erzielten kumulierten Auszahlungswerten der Spieler entsprechen und die kleinen Vierecke innerhalb der großen Vierecke die zukünftige Strategiewahl der Spieler in der nächsten Spielperiode angeben.



Vorlesung 9

Die Verknüpfung der Theorie der komplexen Netzwerke mit der evolutionären Spieltheorie wird in dieser Vorlesung an mehreren Beispielen gezeigt. Die Entscheidungsprozesse der Spieler auf einem komplexen Netzwerk können mittels numerischer, agenten-basierter Computerprogramme simuliert werden.

Wir betrachten zunächst ein evolutionäres räumliches Spiel (siehe Spatial Games), wobei die Spieler einer endlich großen Population auf einem räumlichen Gitter angeordnet und jeder Spieler nur mit seinen nächsten Nachbarn spielen kann (*Moore Nachbarschaft*). Das zugrundeliegende Netzwerk der Spielerknoten besitzt somit eine reguläre Struktur und im betrachteten 2-dimensionalen Fall spielt jeder Spieler pro Spielperiode mit acht Spielern (Knotengrad $k_i = 8 \forall i \in \mathcal{I}$).

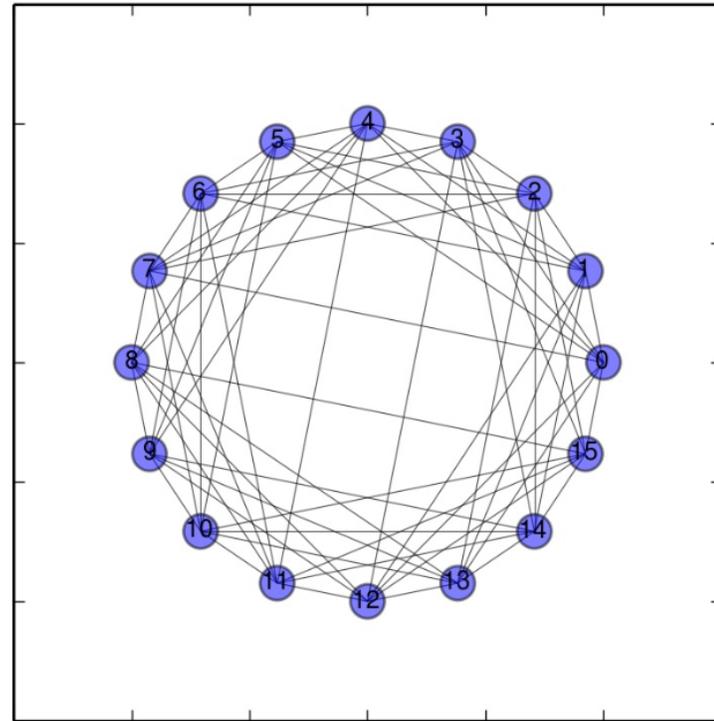
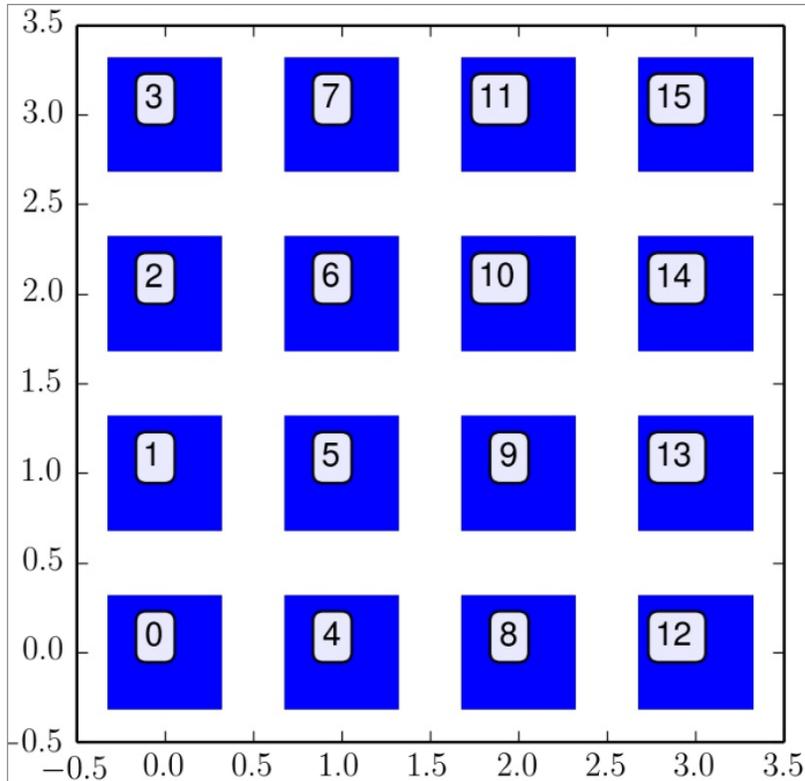
| | Spieler B Strategie 1 | Spieler B Strategie 2 |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Spieler A Strategie 1 | (1, 1) | (0, c) |
| Spieler A Strategie 2 | (c, 0) | (0.01, 0.01) |

Bestantwort-Pfeile sind im Diagramm eingezeichnet: Ein Pfeil führt von (1,1) zu (0,c), ein weiterer von (0,c) zu (0,0.01), ein dritter von (0,0.01) zu (c,0), und ein vierter von (c,0) zu (1,1).

Wir beschränken uns im Folgenden auf symmetrische 2x2-Spiele und im ersten Unterpunkt dieser Vorlesung (siehe linkes Panel) betrachten wir im Speziellen ein 'leicht' dominantes Spiel mit nebenstehender Auszahlungsmatrix. Es handelt sich bei diesem

Spiel um eine Version des Gefangenendilemmas, wobei der Parameter $c > 1$ die Stärke der Dominanz der Strategie $s_2 \hat{=} Rot$ über die Strategie $s_1 \hat{=} Blau$ quantifiziert (siehe *Bestantwort-Pfeile* in der nebenstehenden Auszahlungstabelle). Die Spielerknoten spielen pro Iteration mit jedem ihrer Nachbarn und am Ende von jedem Zeitschritt vergleichen die Spieler ihren summierten Gewinn/Verlust mit den Nachbarspielern ihres Umfeldes (*Update Rule*). Ist die Auszahlung eines Spielers höher als der eigene Auszahlungswert, so ändert der Spieler in der nächsten Spielperiode seine Strategie; ist sein eigener Wert der höchste, so bleibt er auch in der nächsten Iteration bei seiner gespielten Strategie. Die deterministische evolutionäre Spieltheorie sagt für dominante Spiele voraus, dass sich die zeitliche Entwicklung der Population zu einer evolutionär stabilen Strategie entwickelt bei der alle Personen die dominante Strategie spielen (siehe Vorlesung 3 und 4) - bei räumlichen Spielen ist dies nicht zwangsläufig der Fall

III.1.1 Spatial Games: Evolutionäre Spiele auf räumlichen Gitterstrukturen

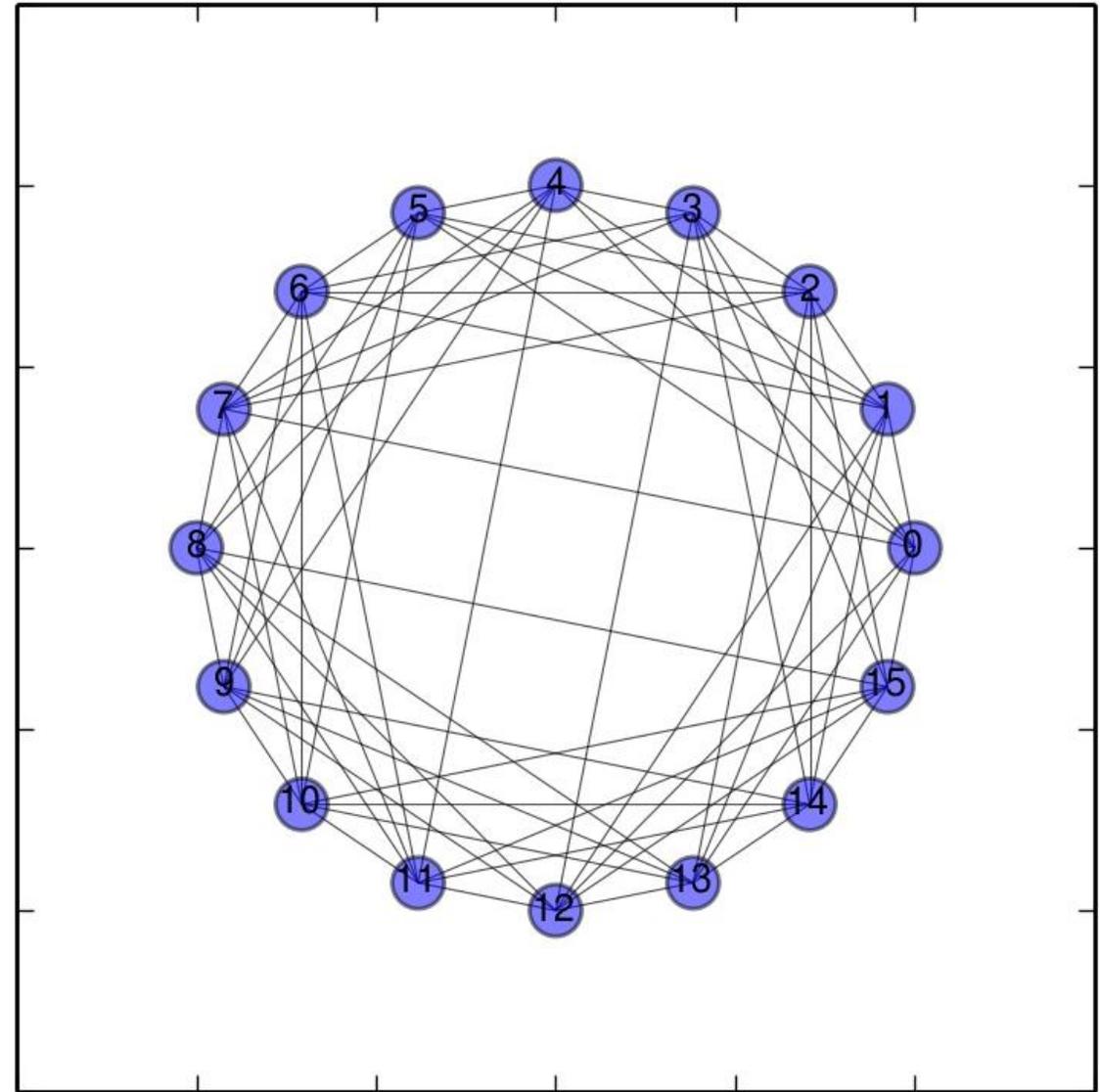
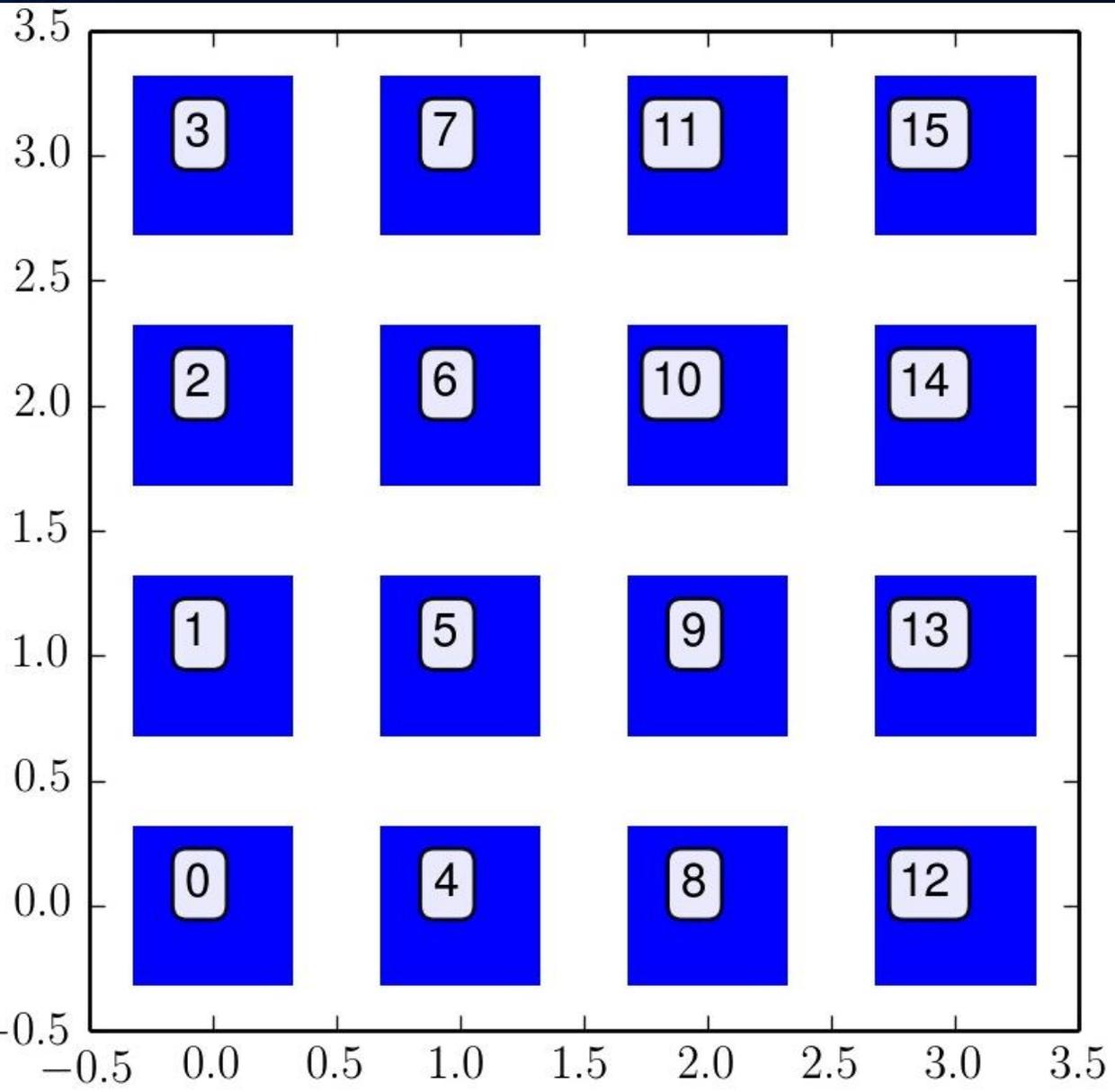


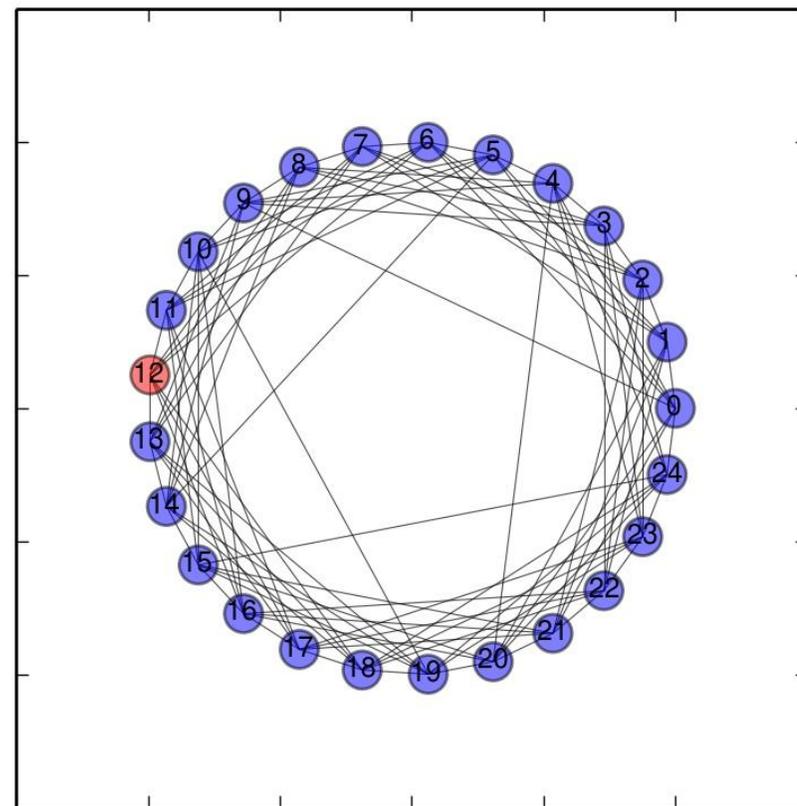
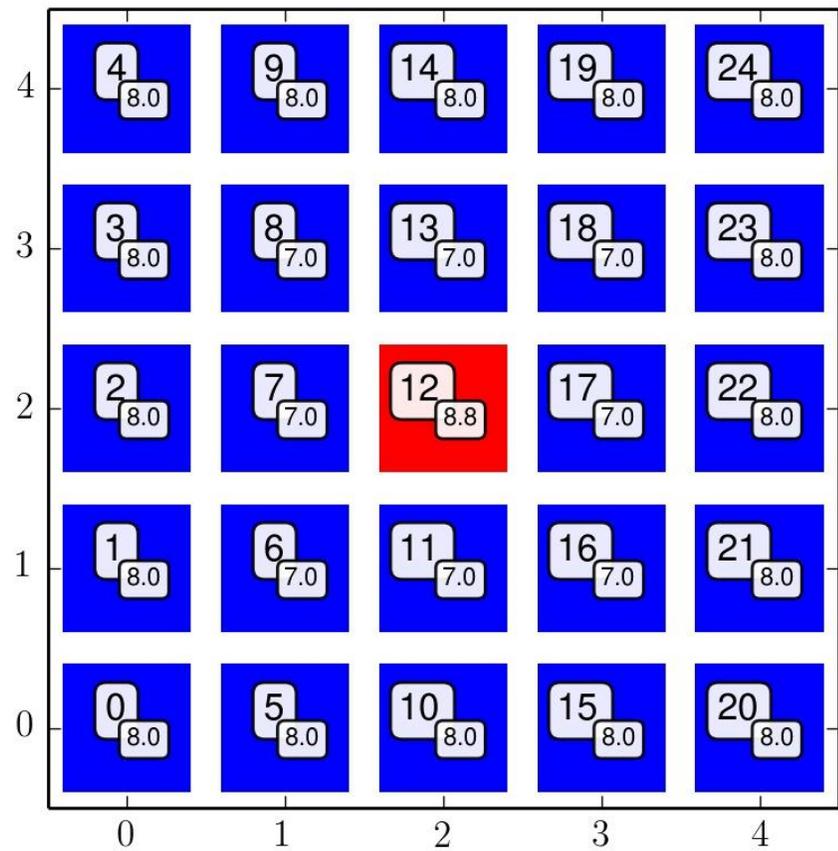
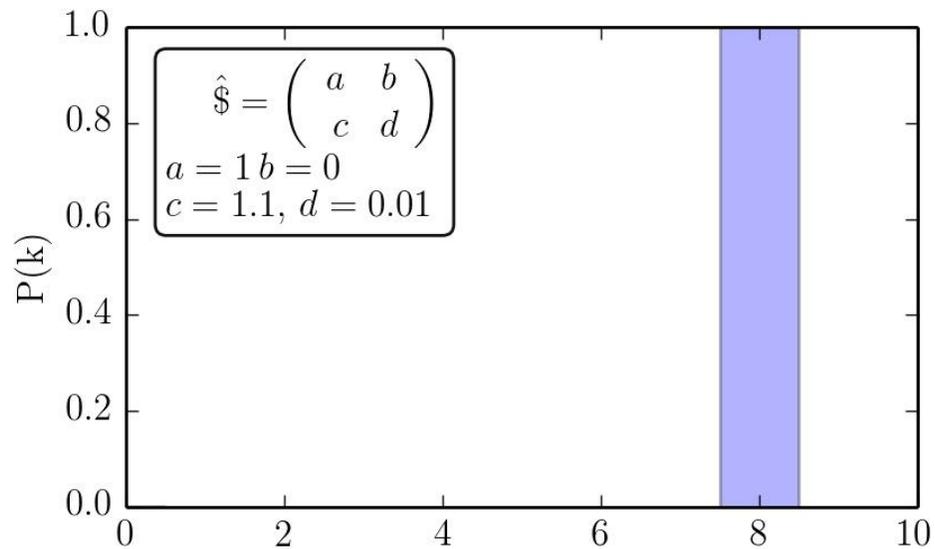
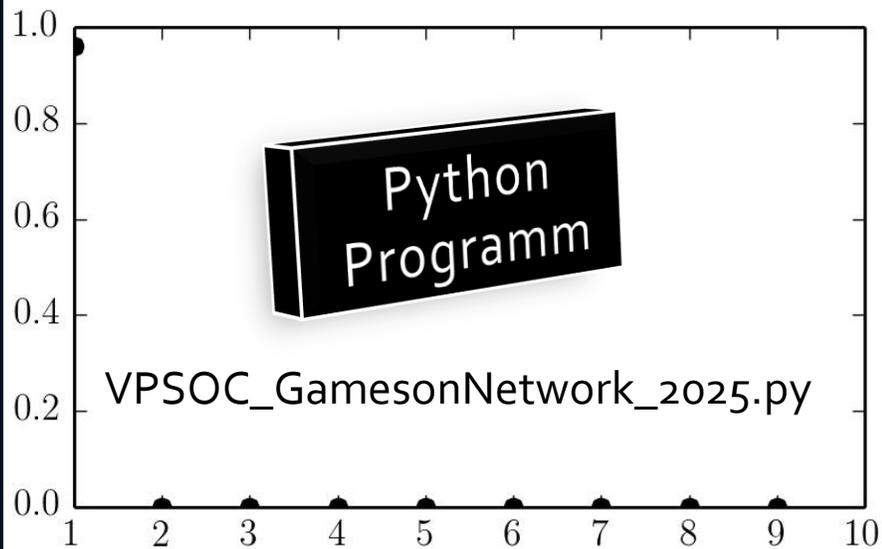
Anordnung der 16 Spielerknoten auf einem 2-dimensionalen räumlichen Gitter (links) und das entsprechende Bild der erzeugten Netzwerkstruktur (rechts).

In diesem Unterpunkt werden die Spieler einer endlich großen Population auf einem räumlichen Gitter angeordnet, wobei jeder Spieler nur mit seinen nächsten Nachbarn spielen kann (*Moore Nachbarschaft*). Das zugrundeliegende Netzwerk der Spielerknoten besitzt somit eine reguläre Struktur und im betrachteten 2-dimensionalen Fall spielt jeder Spieler pro Spielperiode mit acht Spielern (Knotengrad $k_i = 8 \forall i \in \mathcal{I}$). Die Anordnung und Nummerierung der Spielerknoten auf dem 2-dimensionalen, sowie die entstehende Netzwerkstruktur ist in der nebenstehenden Abbildung für eine Population mit 16 Spielern dargestellt. Wir beschränken uns im folgenden auf symmetrische 2x2-Spiele (siehe Teil I.1.4: Ansatz eines allgemeinen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels mit symmetrischer Auszahlungsmatrix und Parametern a, b, c und d). Die Spielerknoten spielen pro Iteration mit jedem ihrer Nachbarn und am Ende von jedem Zeitschritt vergleichen die Spieler ihren summierten Gewinn/Verlust mit den Nachbarspielern ihres Umfeldes. Ist die Auszahlung eines Spielers höher als der eigene Auszahlungswert, so ändern der Spieler in der nächsten Spielperiode seine Strategie; ist sein eigener Wert der höchste, so bleibt er auch in der nächsten Iteration bei seiner gespielten Strategie.

Das folgende Beispiel ist dem Kapitel 9: Spatial Games des

Moore's Neighborhood





Gefangenendilemma-ähnliches (2x2)-Spiel

Parameter $c > 1$: Stärke der Dominanz der roten Strategie

| | Spieler B Strategie 1 | Spieler B Strategie 2 |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Spieler A Strategie 1 | $(1, 1)$ | $(0, c)$ |
| Spieler A Strategie 2 | $(c, 0)$ | $(0.01, 0.01)$ |

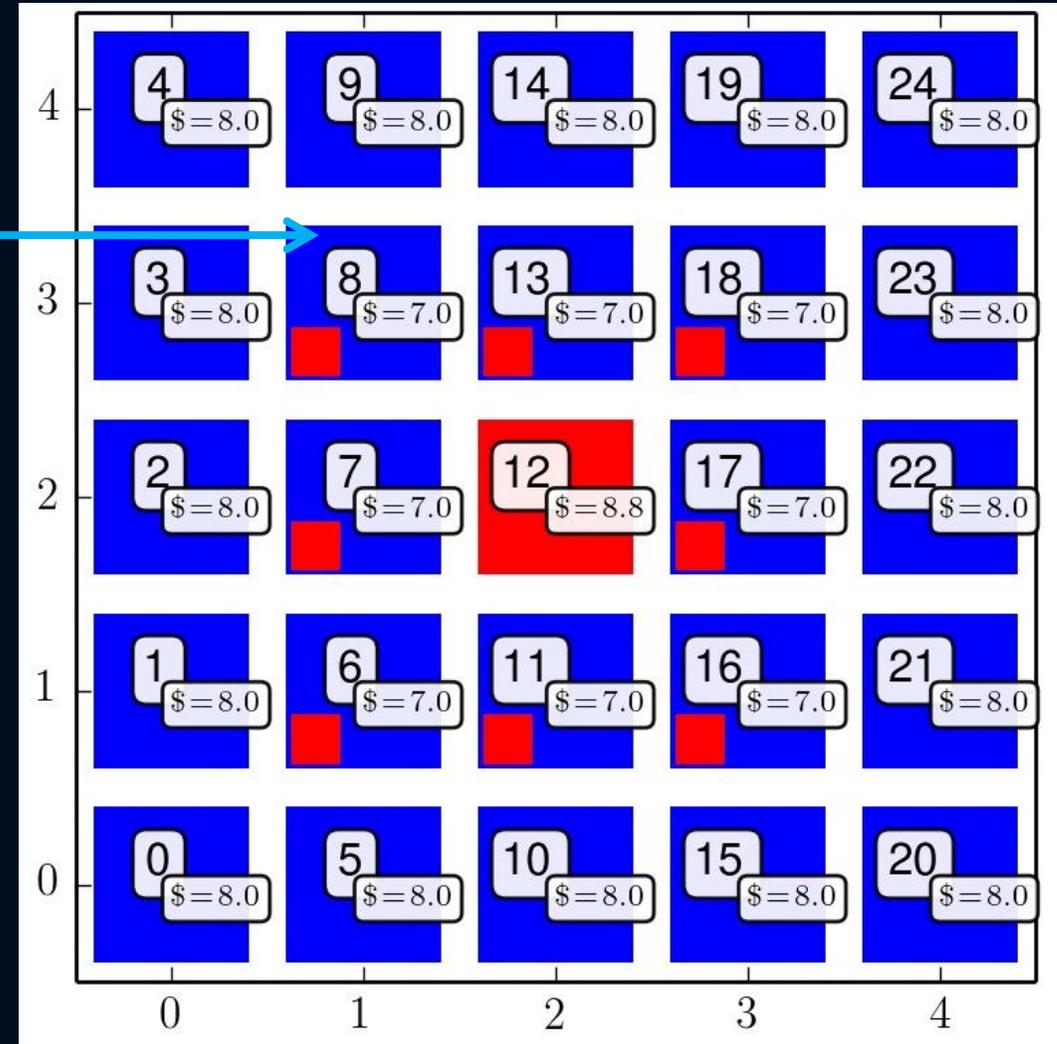
The diagram illustrates a 2x2 game matrix with the following payoffs:

- Top-left (Blue/Blue): $(1, 1)$
- Top-right (Blue/Red): $(0, c)$
- Bottom-left (Red/Blue): $(c, 0)$
- Bottom-right (Red/Red): $(0.01, 0.01)$

Blue arrows show a clockwise cycle between the four cells. The bottom-right cell is shaded gray.

Python Programm Spatial Games

In diesem Python Programm wird die Menge der Spieler (hier $N=24$) auf einem 2D-Gitter mit Moorschen Nachbarschaftsbedingungen angeordnet (siehe S:147 in M.A.Nowak, „Evolutionary Dynamics“). In jeder Iterationsperiode spielt jeder Spieler mit seinen nächsten Nachbarn ein symmetrisches (2x2)-Spiel. Am Ende einer Periode vergleicht jeder Spieler seinen Gesamtgewinn mit seinen Nachbarn und bestimmt in einem „Update Rule“ seine Strategie in der nächsten Spielperiode.



Die rechte Simulation benutzte die folgenden Werte der Auszahlungsmatrix (siehe linke Abb.): $a=1$, $b=0$, $c=1.1$ und $d=0.01$

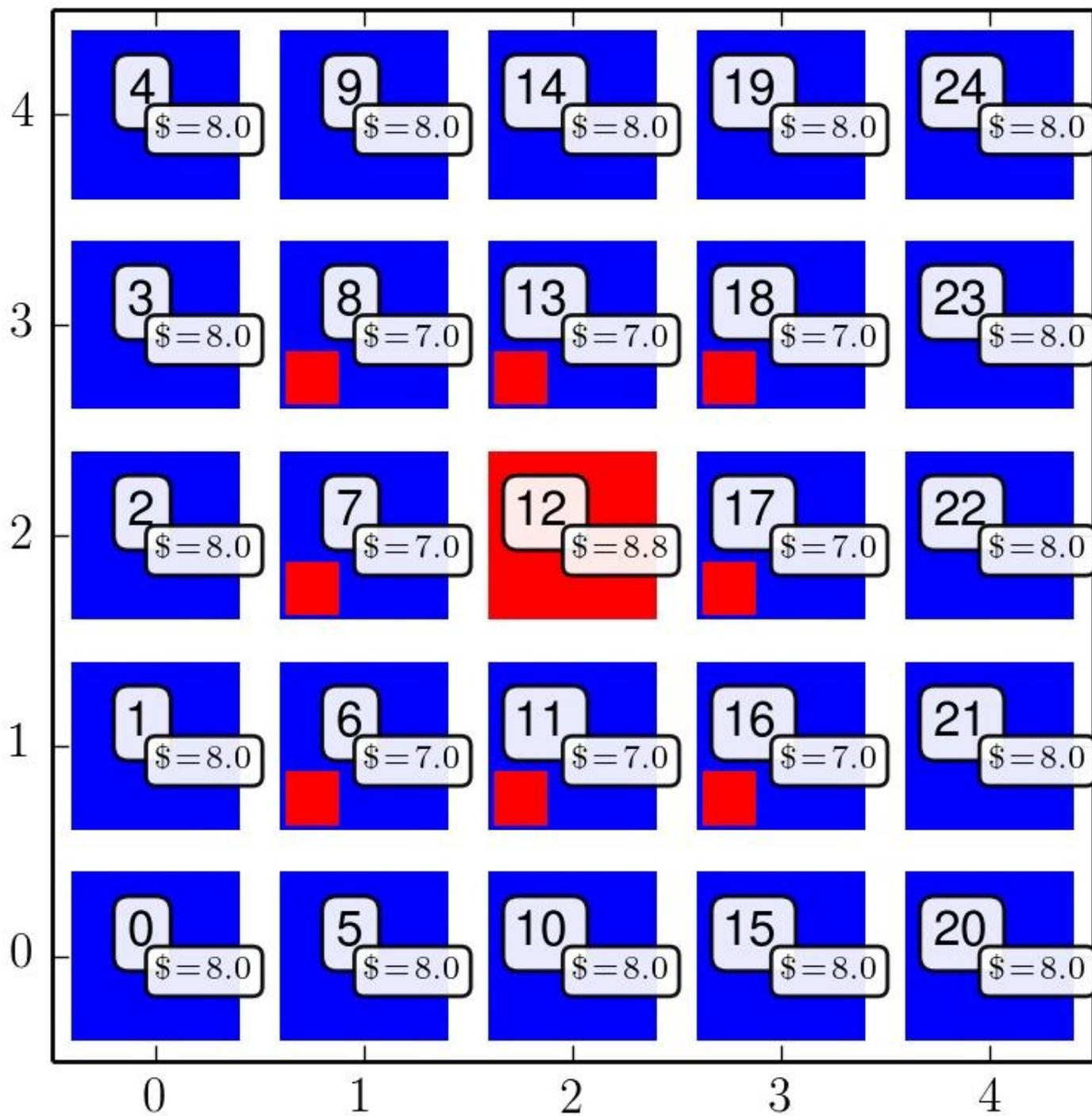
Beachte!: Definition von b und c ist in M.A.Nowak, „Evolutionary Dynamics“ vertauscht.

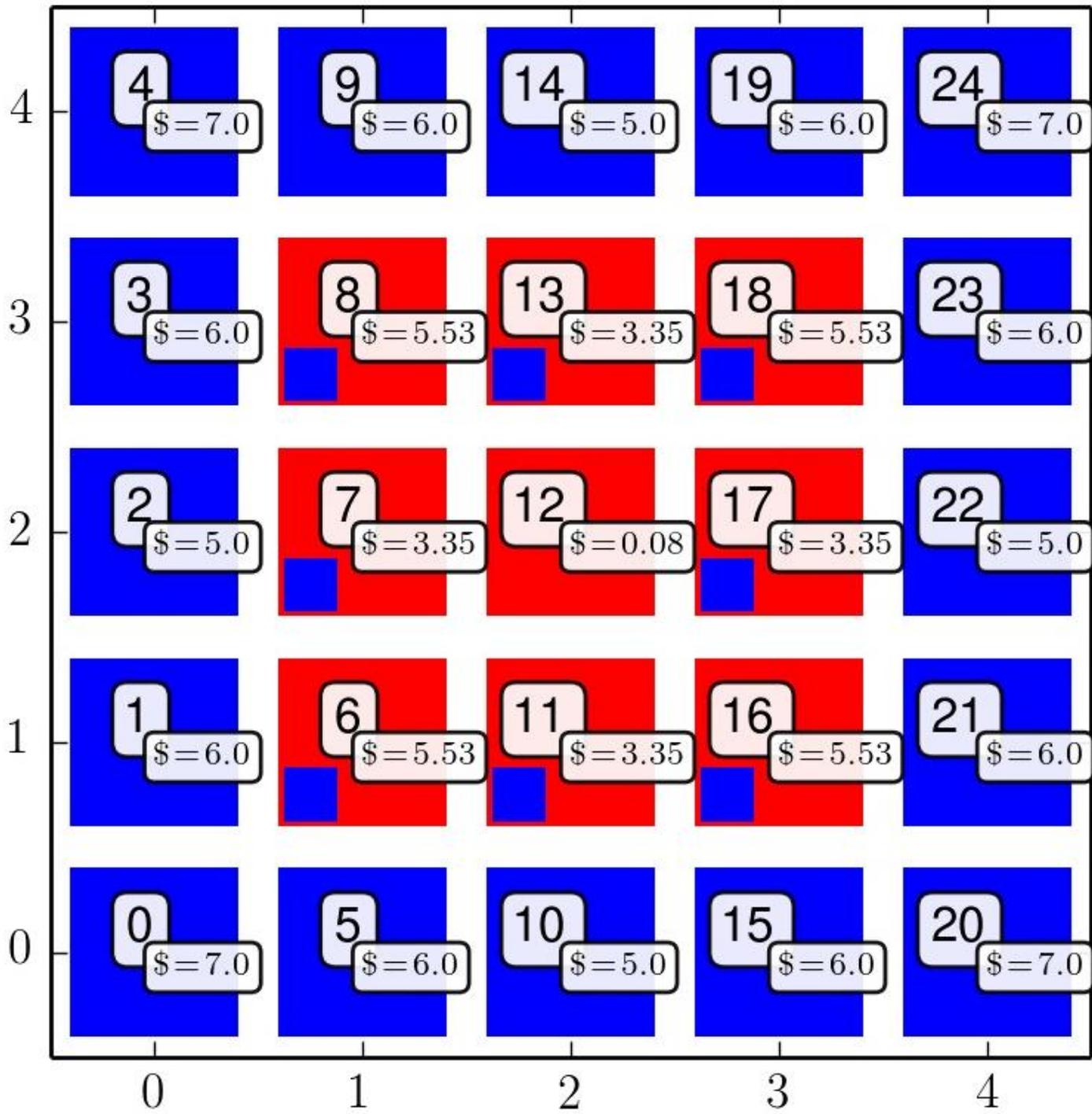
| | Spieler B Strategie 1 $y=1$ | Spieler B Strategie 1 $y=0$ |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Spieler A Strategie 1 $x=1$ | (a , a) | (b , c) |
| Spieler A Strategie 2 $x=0$ | (c , b) | (d , d) |

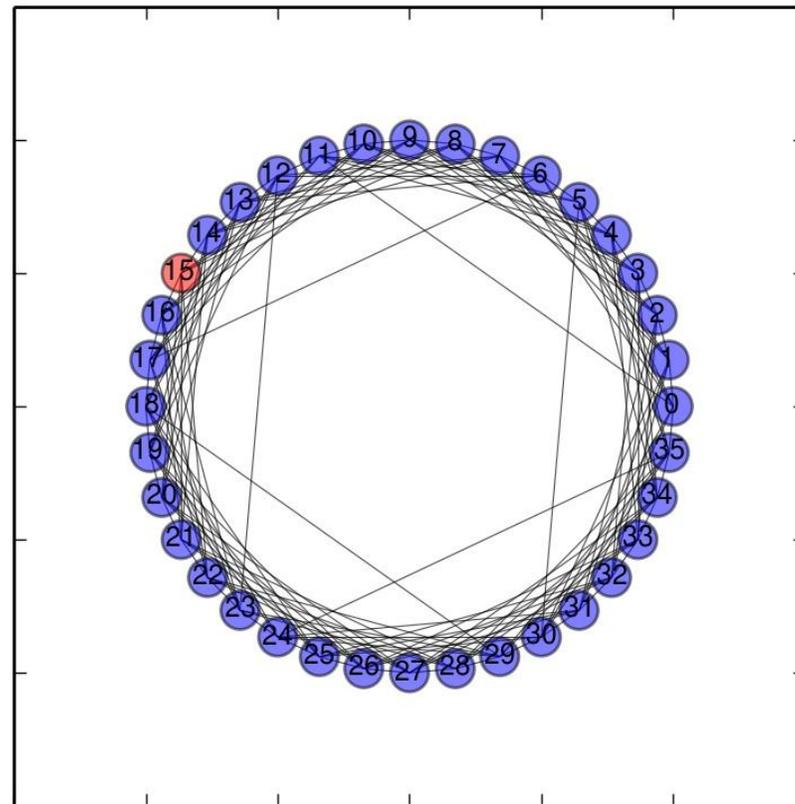
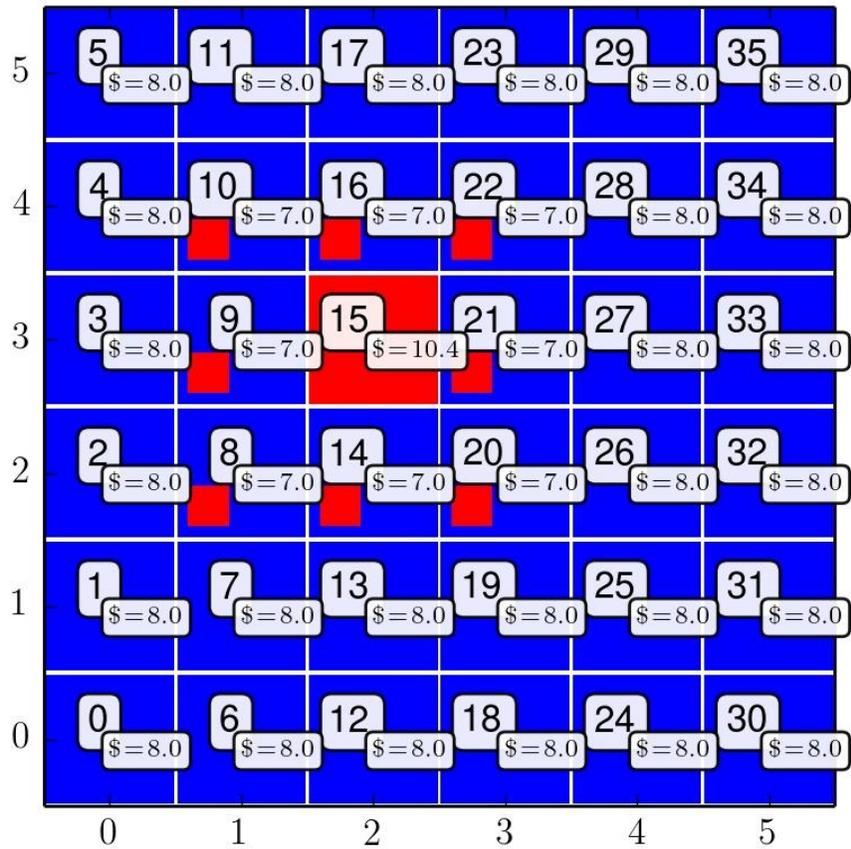
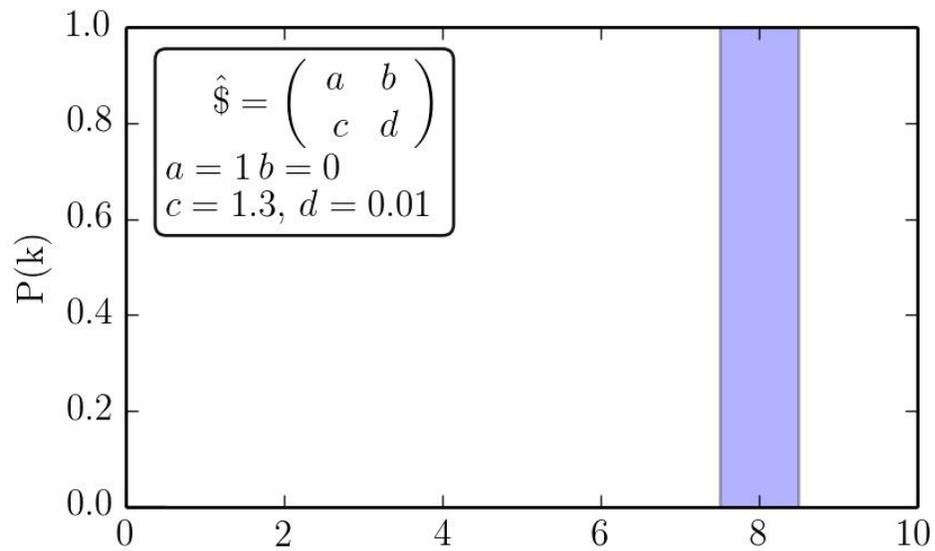
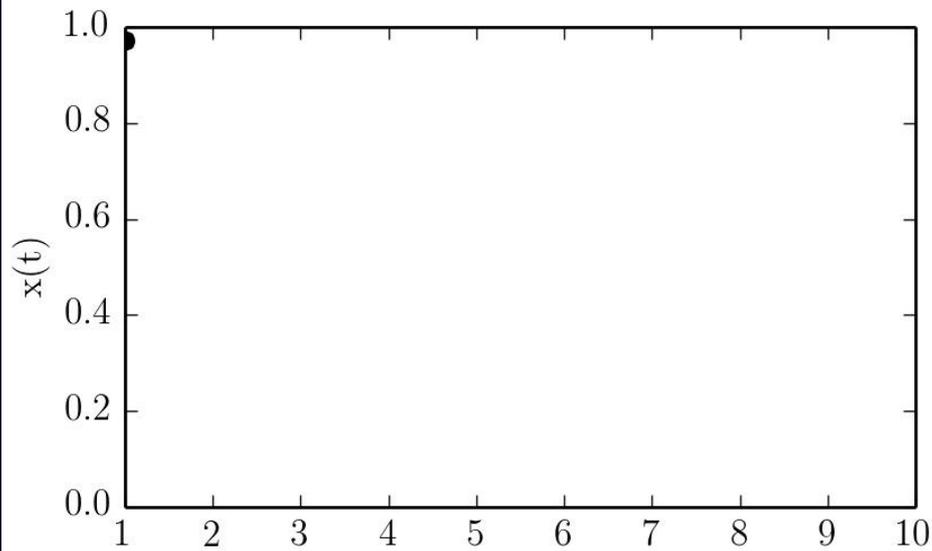
Update Rules und der Entscheidungsprozess

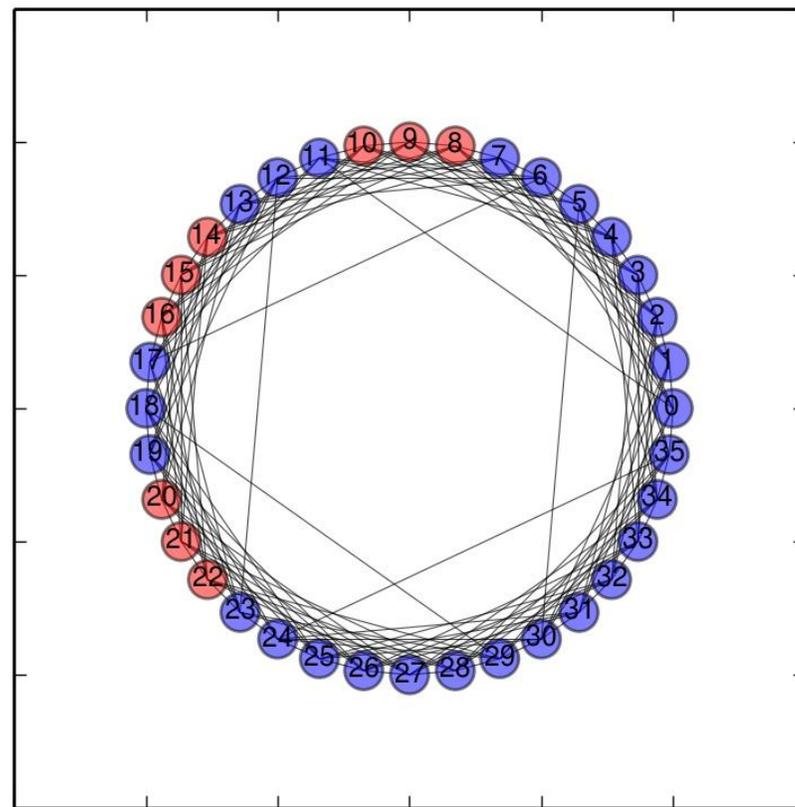
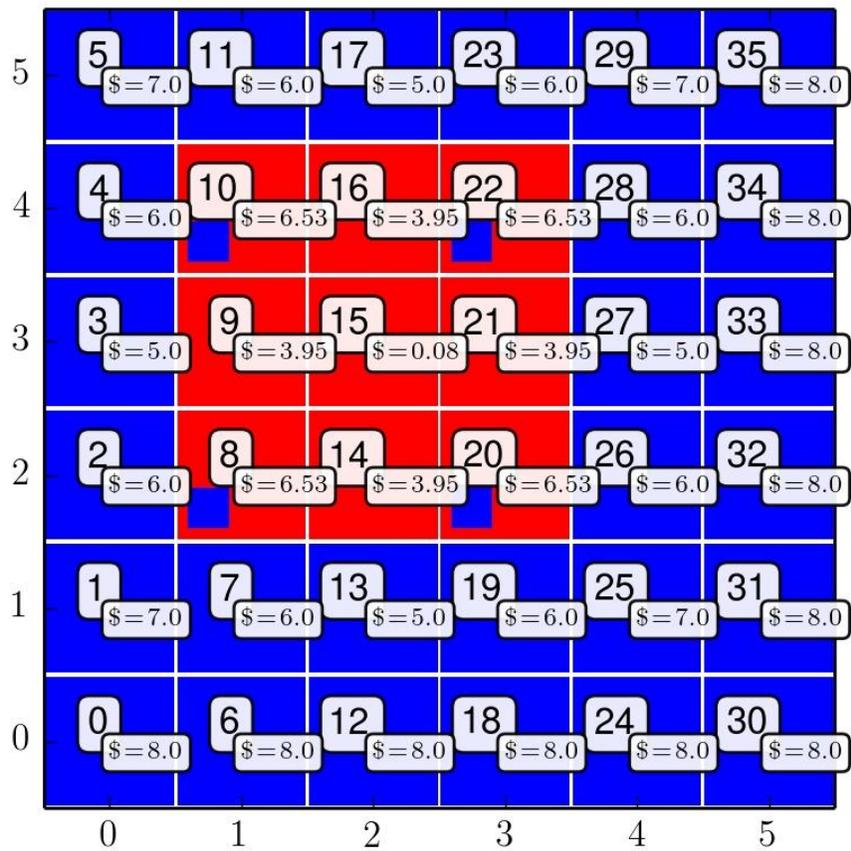
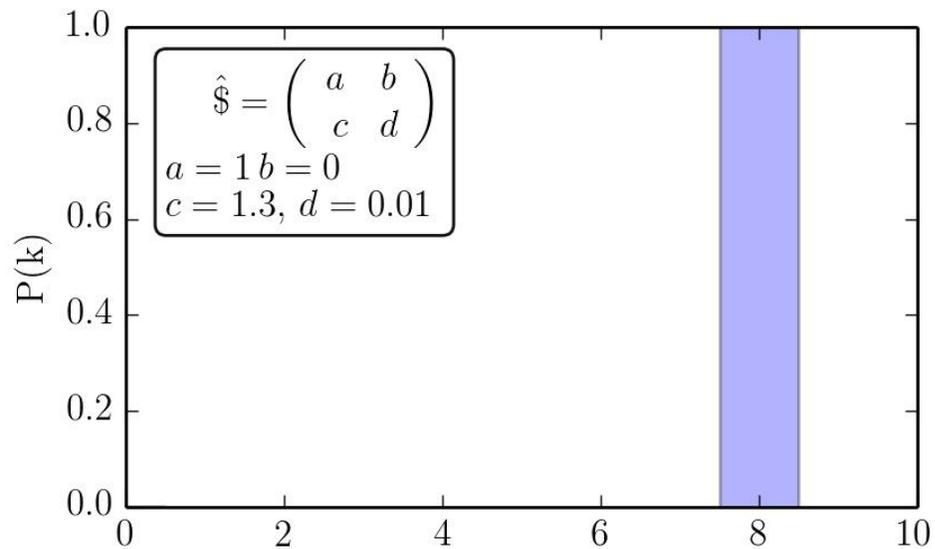
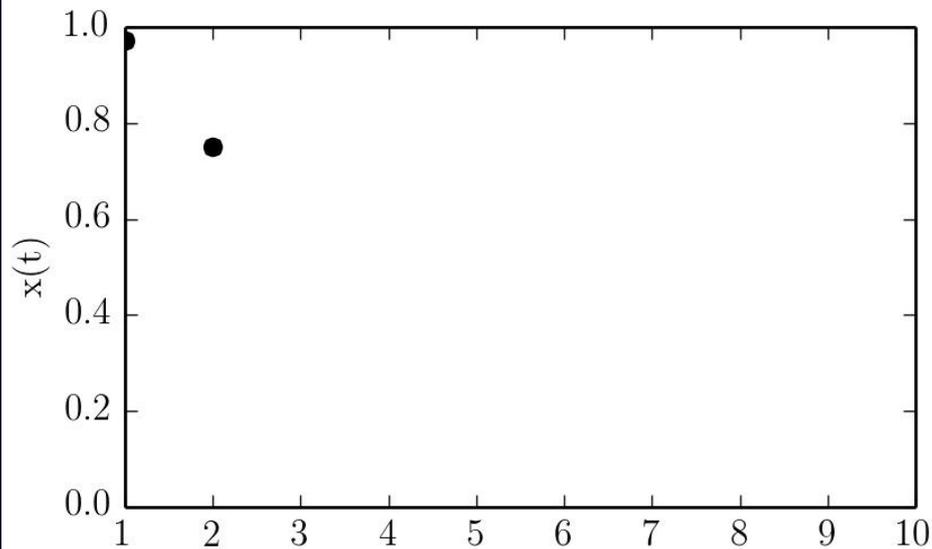
Spieler mit Knotennummer 8 hatte in der aktuellen Periode Strategie „blau“ gespielt und eine gesamte Auszahlung von $\$=7$ erhalten. Er wird in der nächsten Periode „rot“ spielen (siehe kleines rotes Kästchen), da einer seiner nächsten Nachbarn (Knoten 12) eine höhere Auszahlung als er hatte und dieser die Strategie „rot“ spielte.

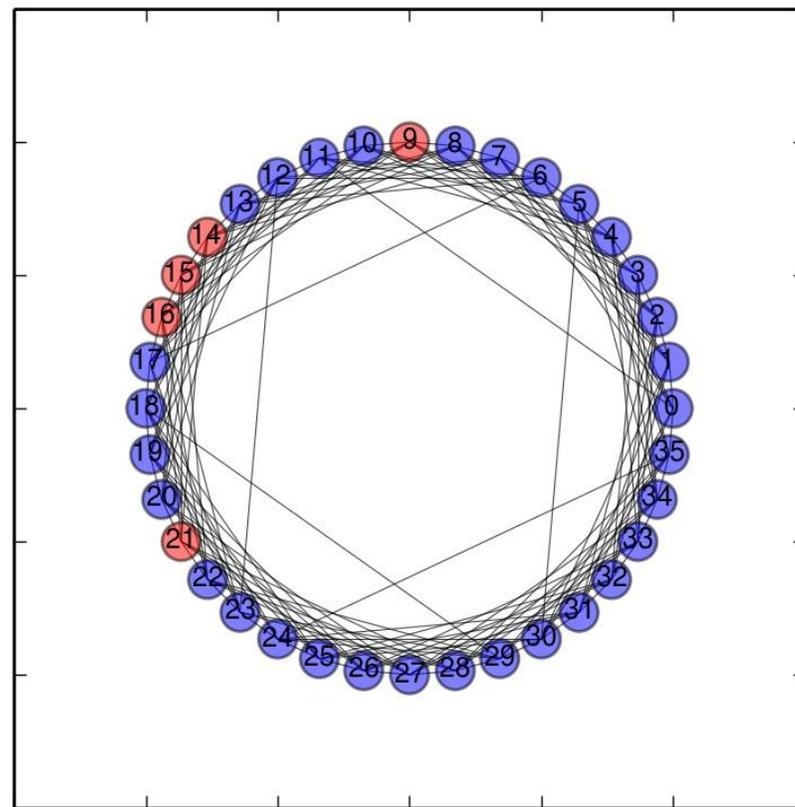
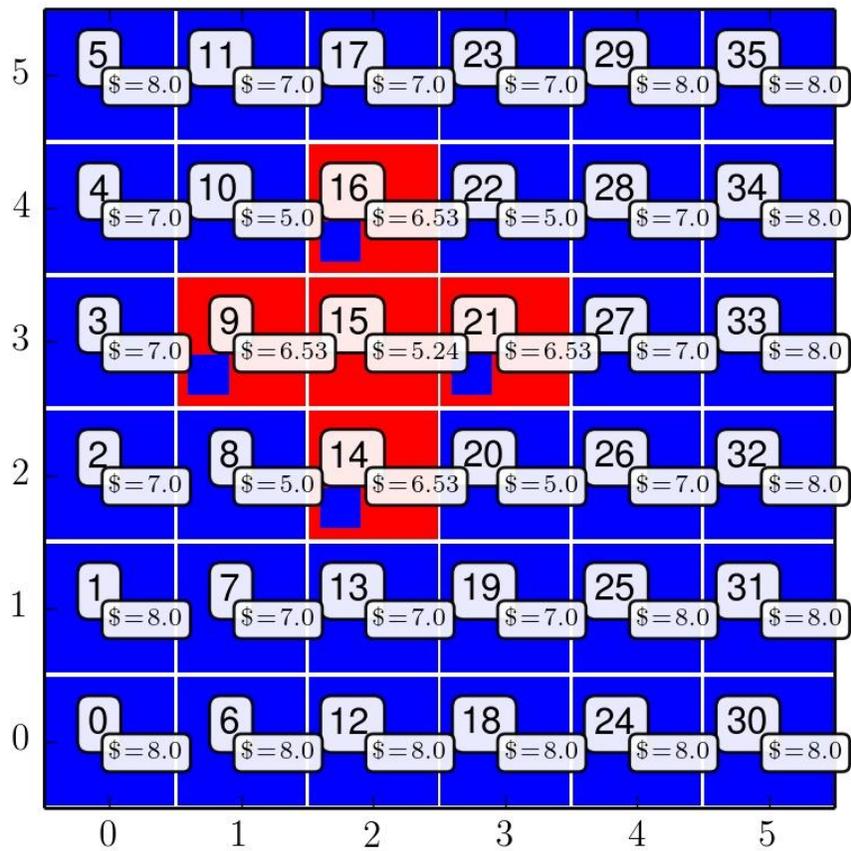
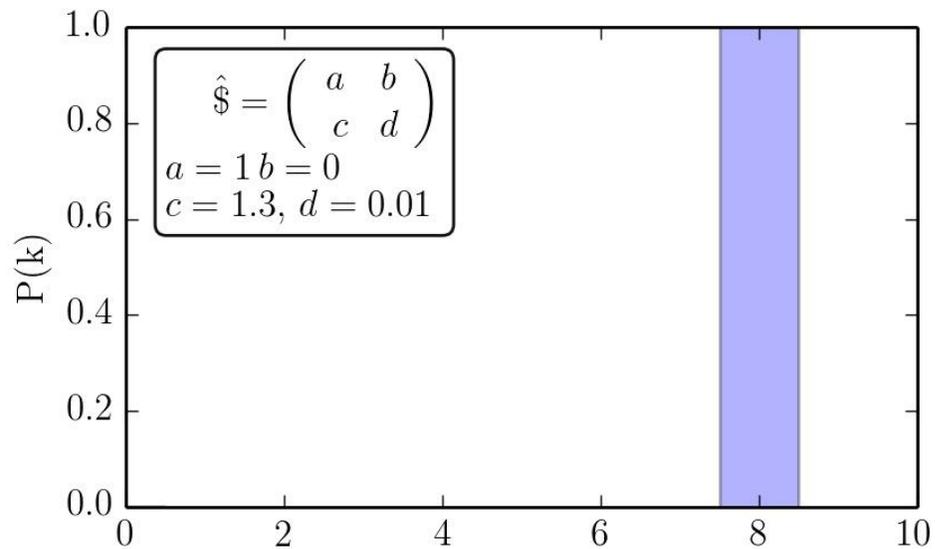
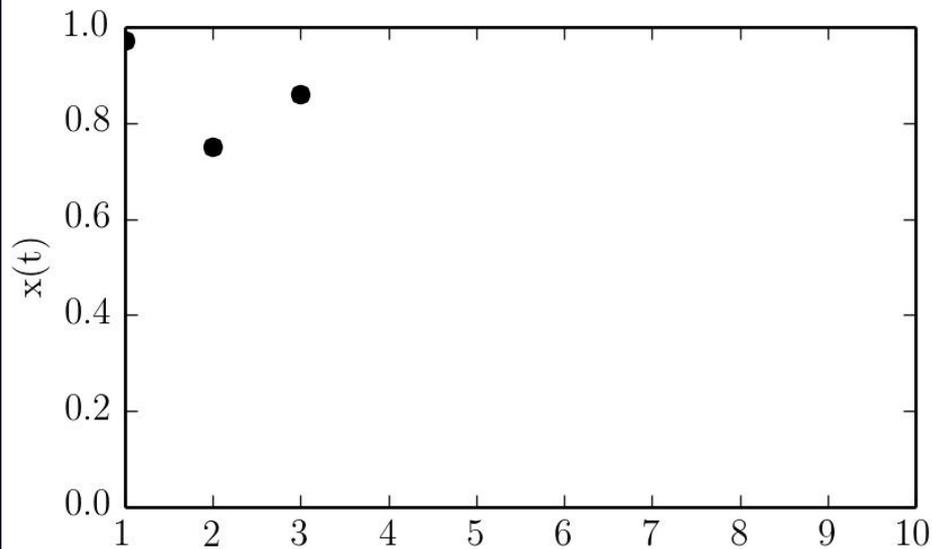
C=1.1

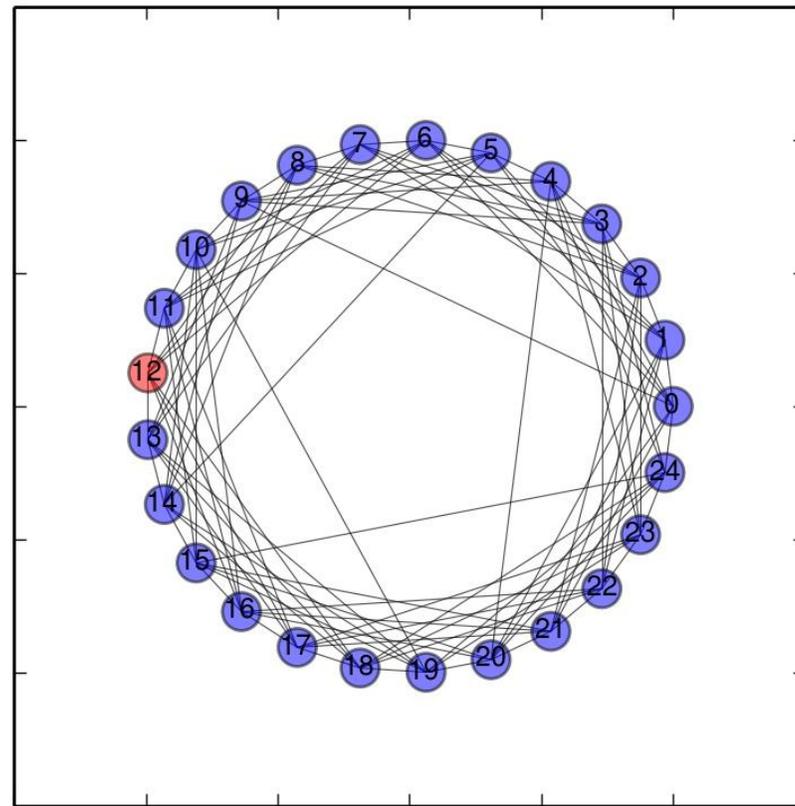
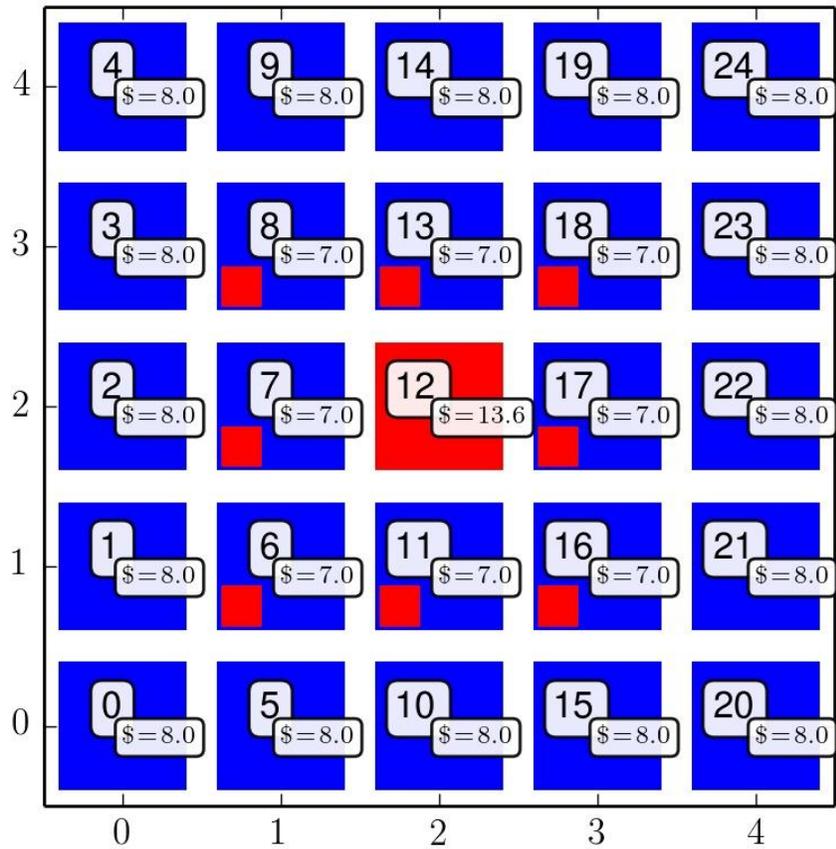
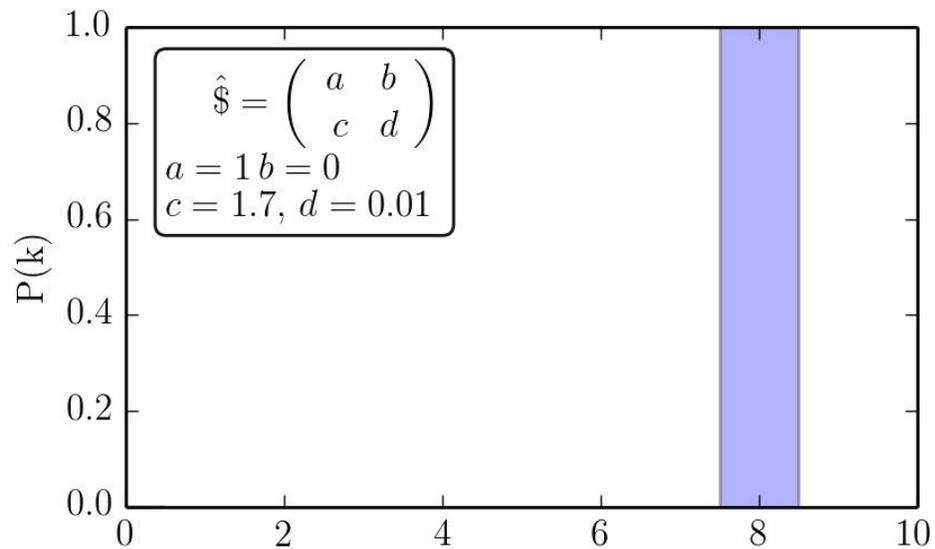
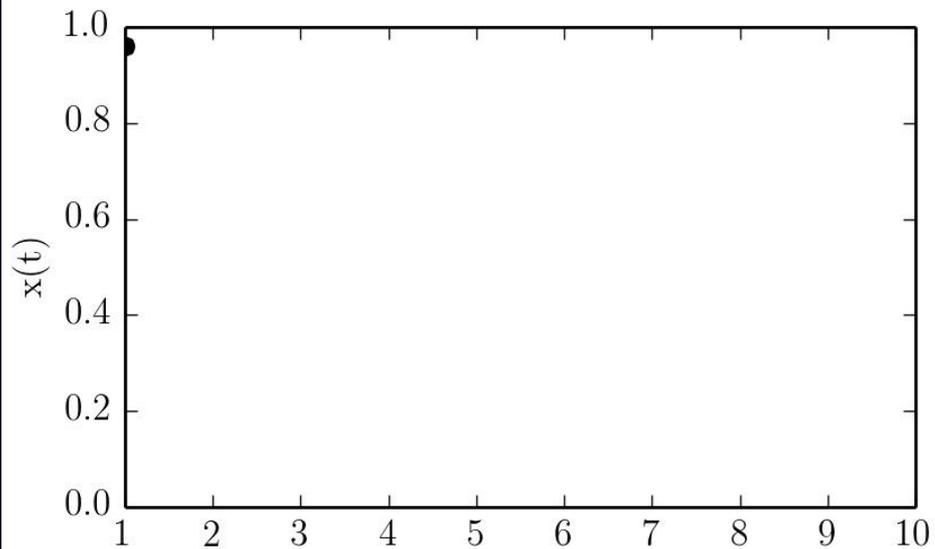


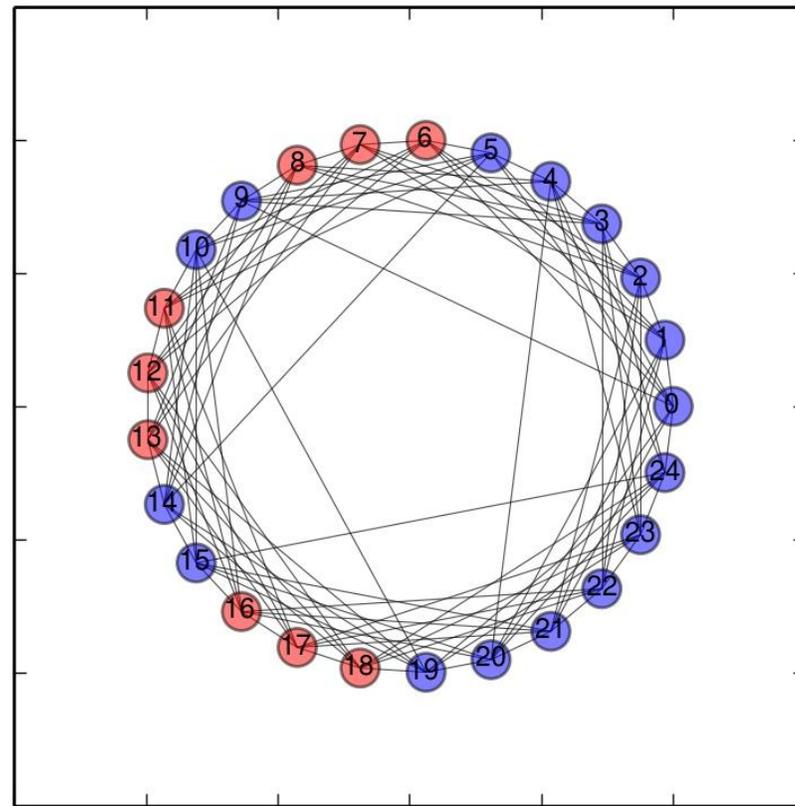
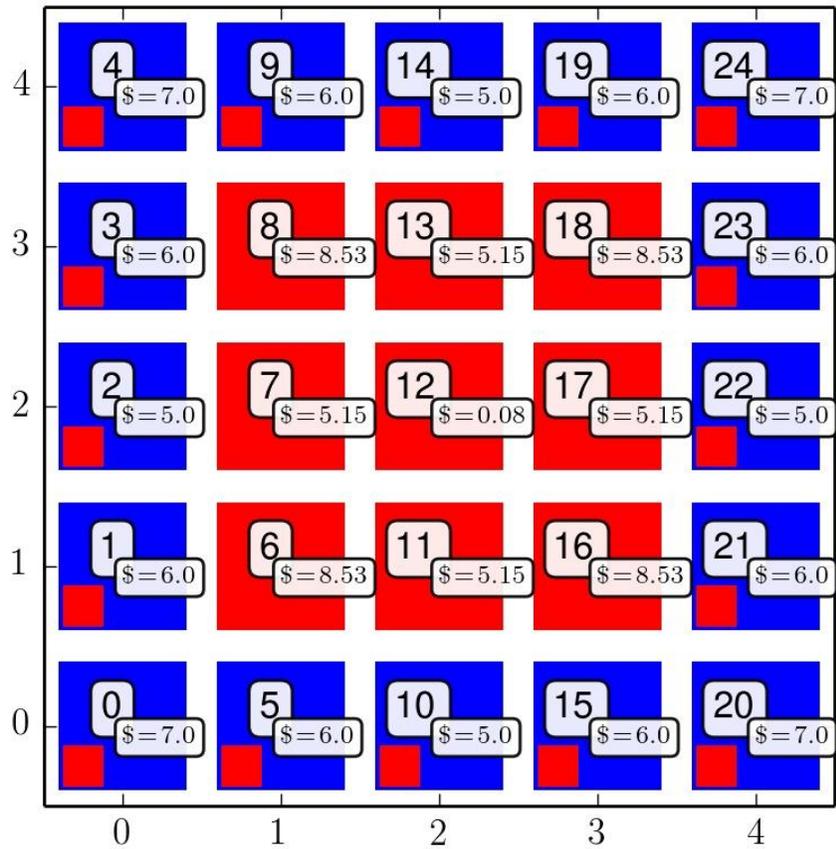
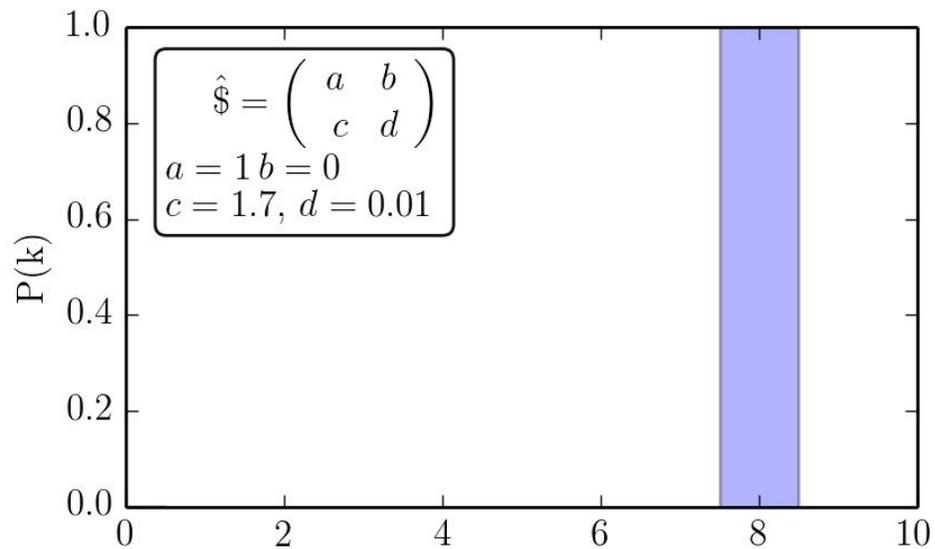
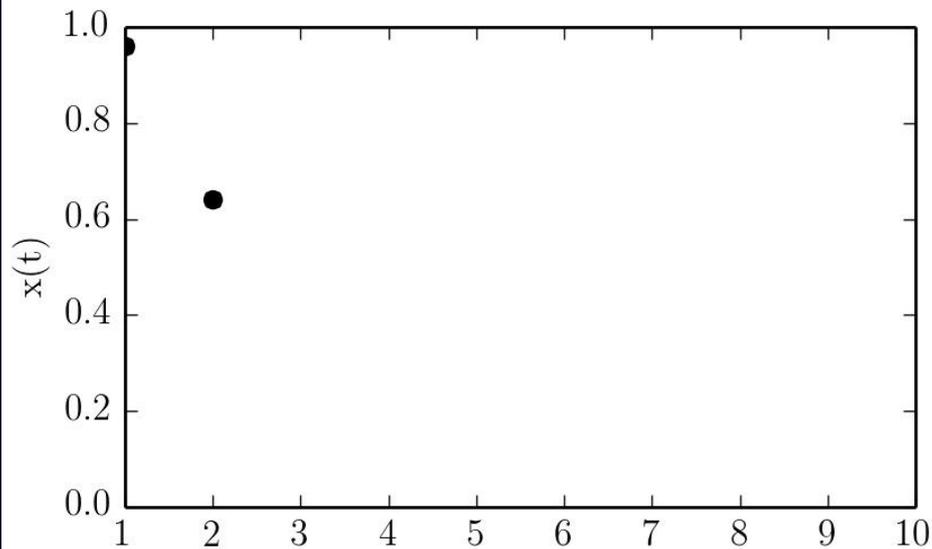


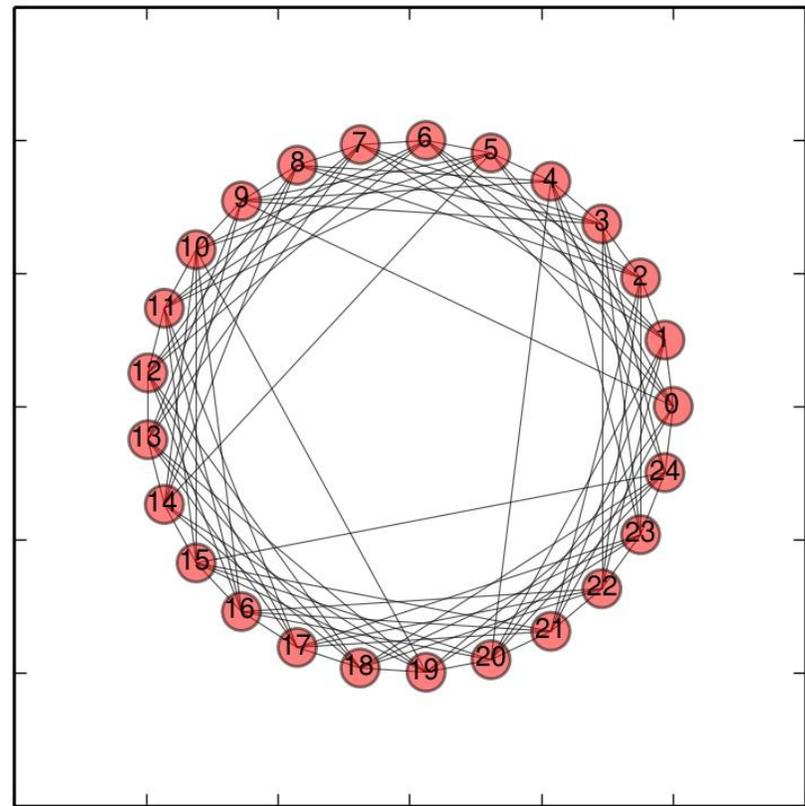
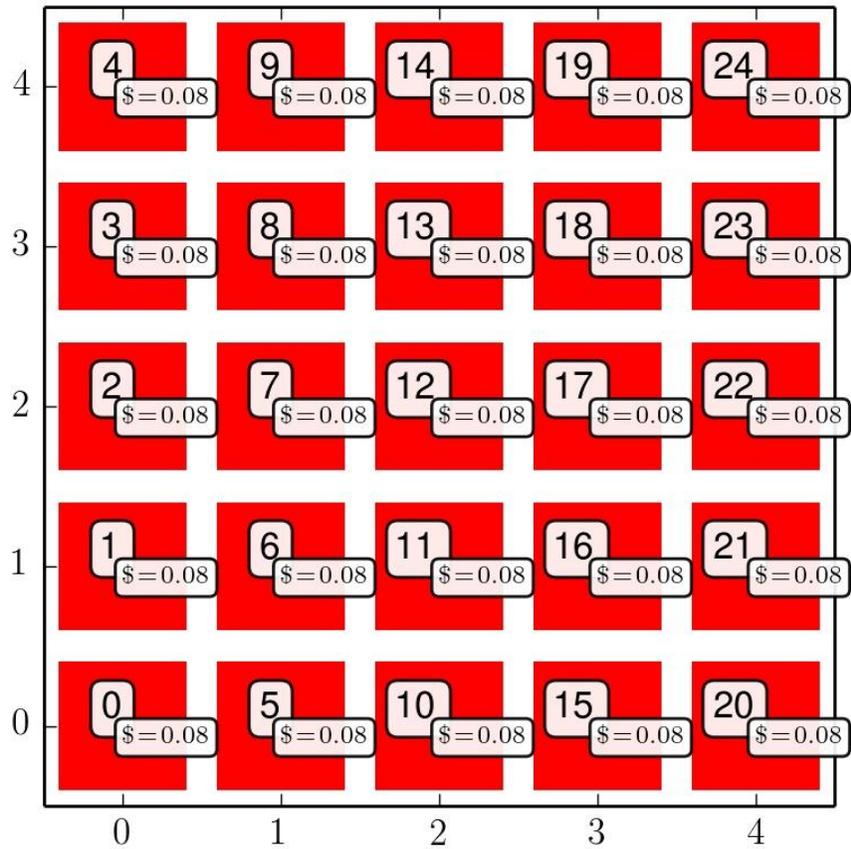
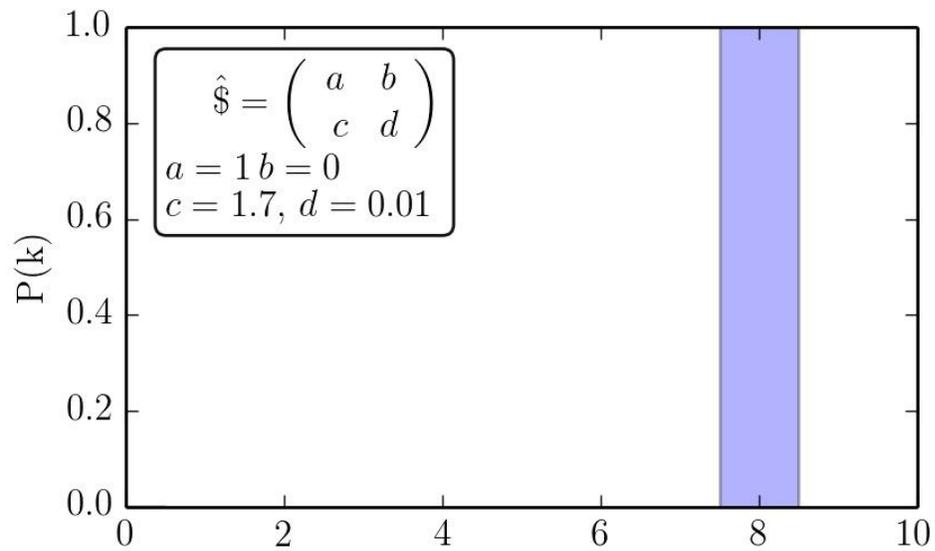
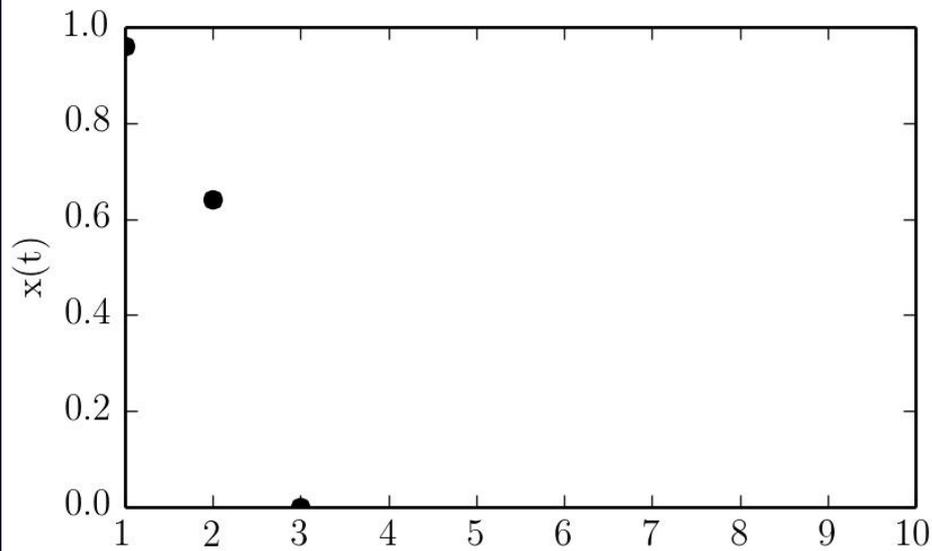


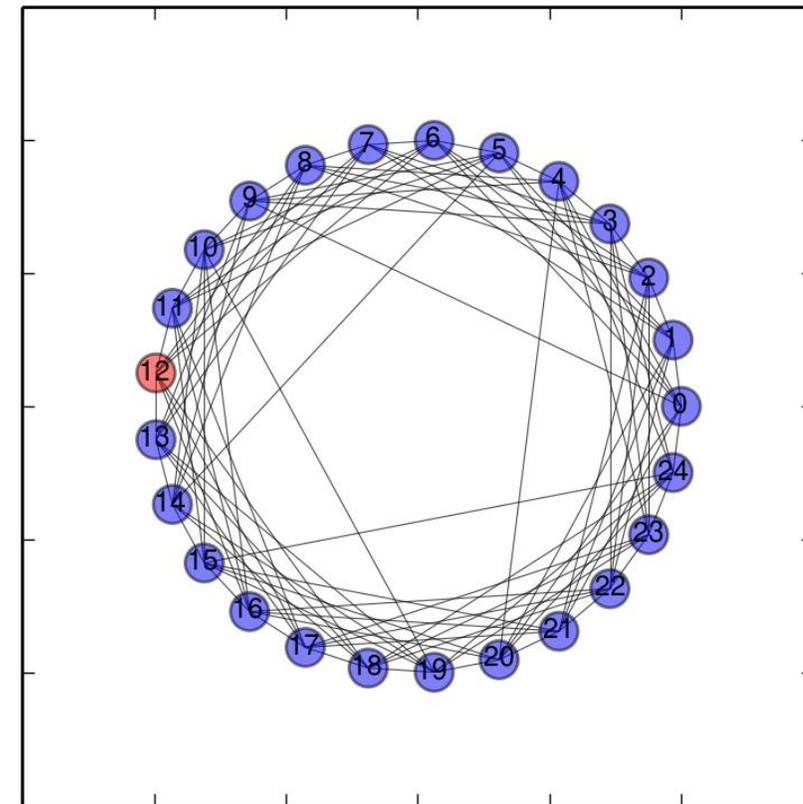
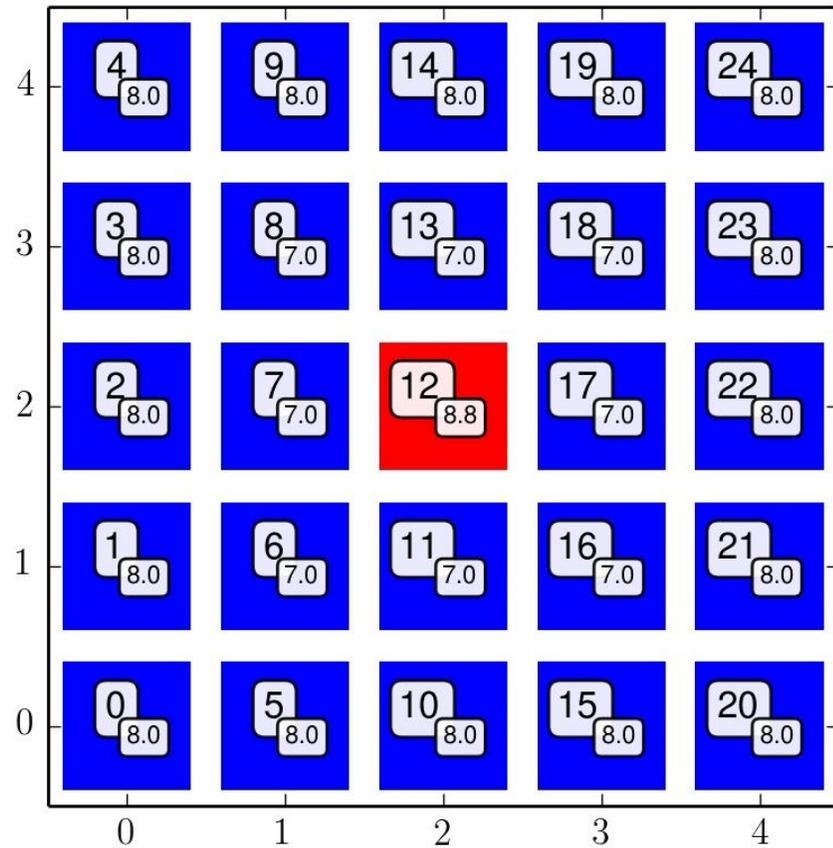
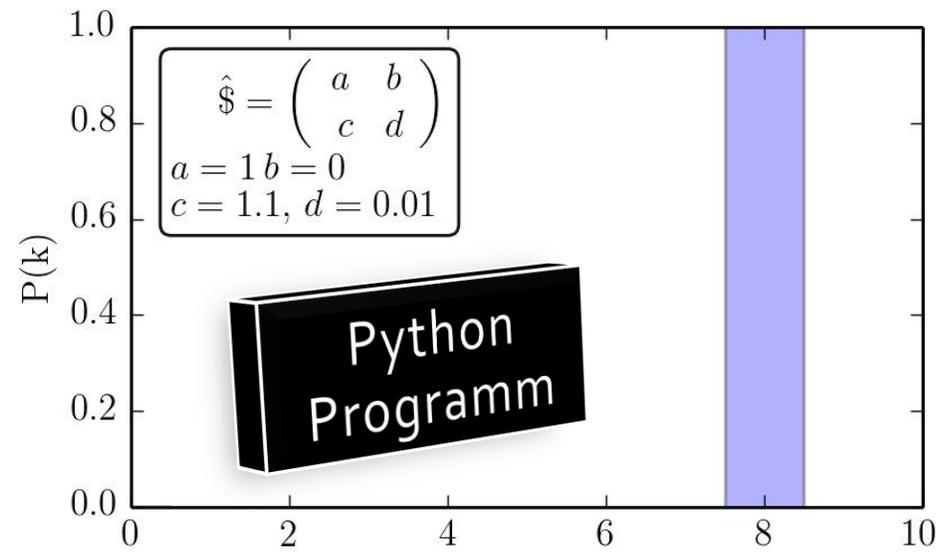
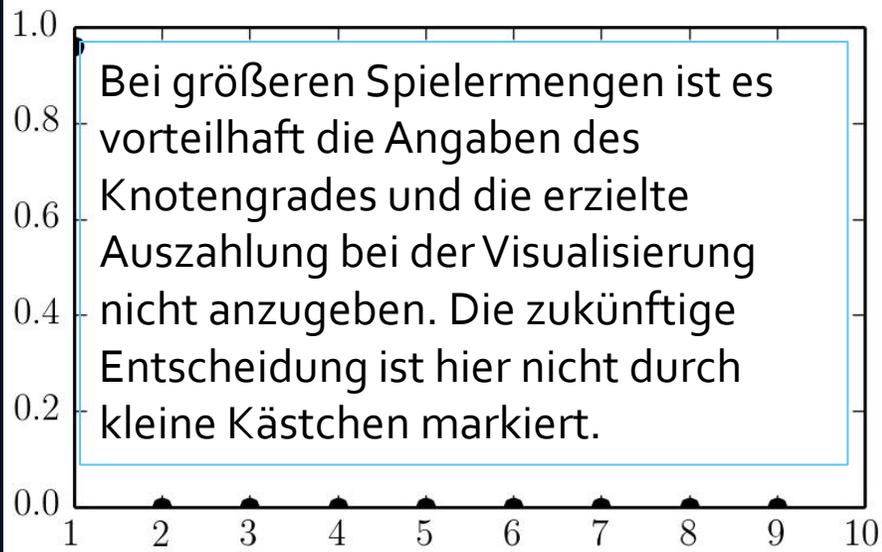




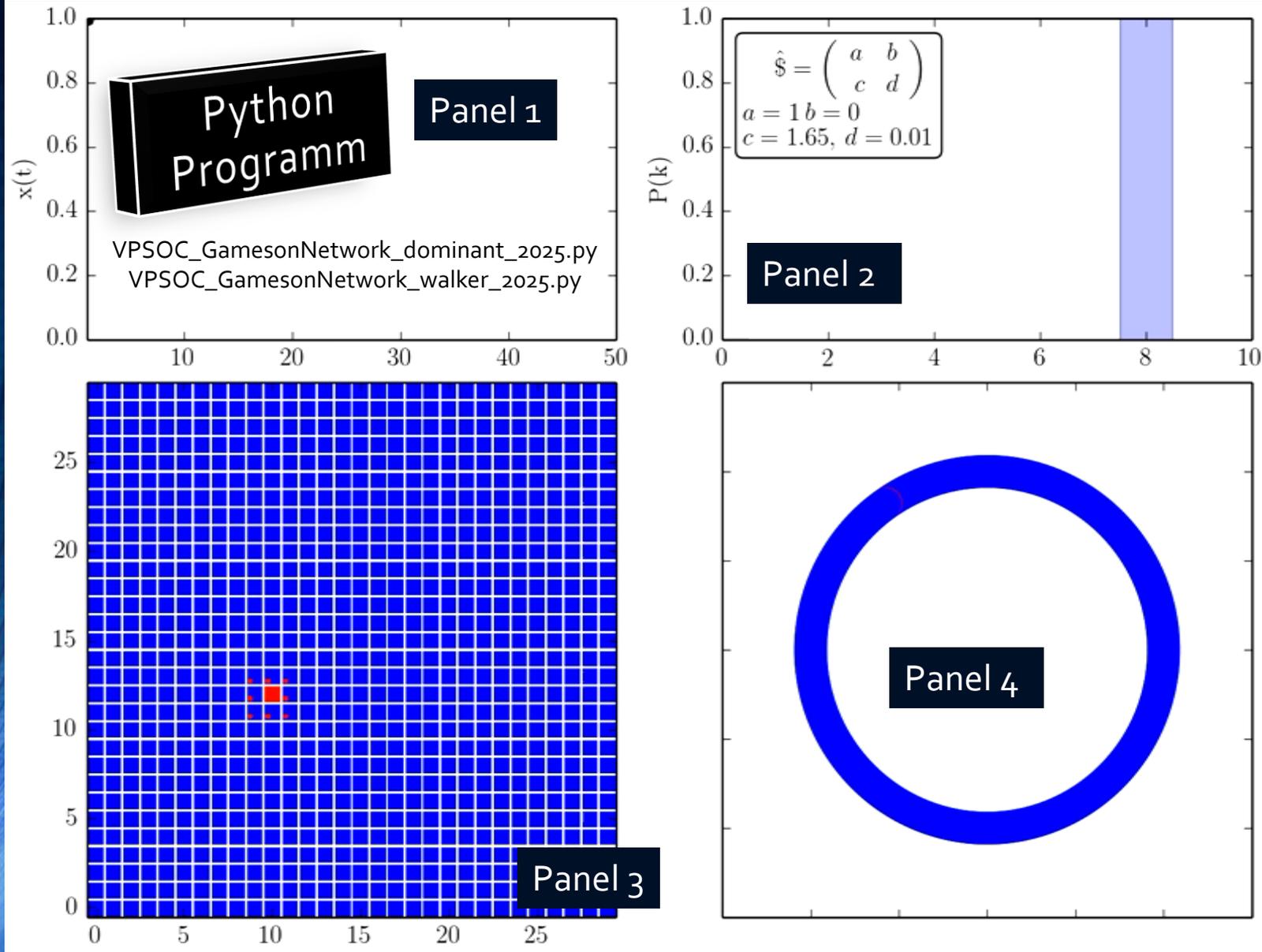








Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken



Das Python Programm visualisiert in vier unterschiedlichen „Panels“ die Evolution des „Spatial Games“. In Panel 1 wird die zeitliche Entwicklung des Populationsvektors $x(t)$ veranschaulicht. Panel 2 zeigt die Verteilungsfunktion der Knotengrade $P(k)$ des zugrundeliegenden Moorschen Netzwerks. Panel 3 zeigt die Entwicklung der Strategieentscheidung der einzelnen Spielerknoten in der benutzten räumlichen Anordnung. Panel 4 veranschaulicht dagegen die Menge der Spieler in einem Kreis, geordnet nach ihrer Knotenzahl.

Neben der Auszahlungsmatrix, den implementierten Update Rules und der zugrundeliegenden Netzwerkstruktur hängt die zeitliche Entwicklung auch von den gewählten Anfangsbedingungen ab (hier wurde ein roter Spieler in einem Umfeld von blauen Spielern angeordnet).

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2025/26)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 14.01.2026

Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre räumliche Spiele (spatial games)

Beispiel: Dominante Spiele

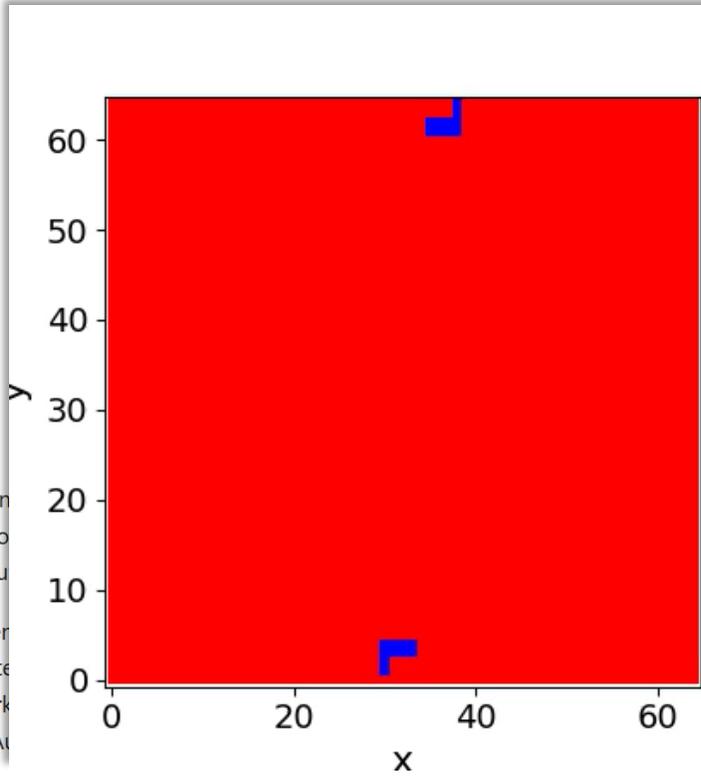
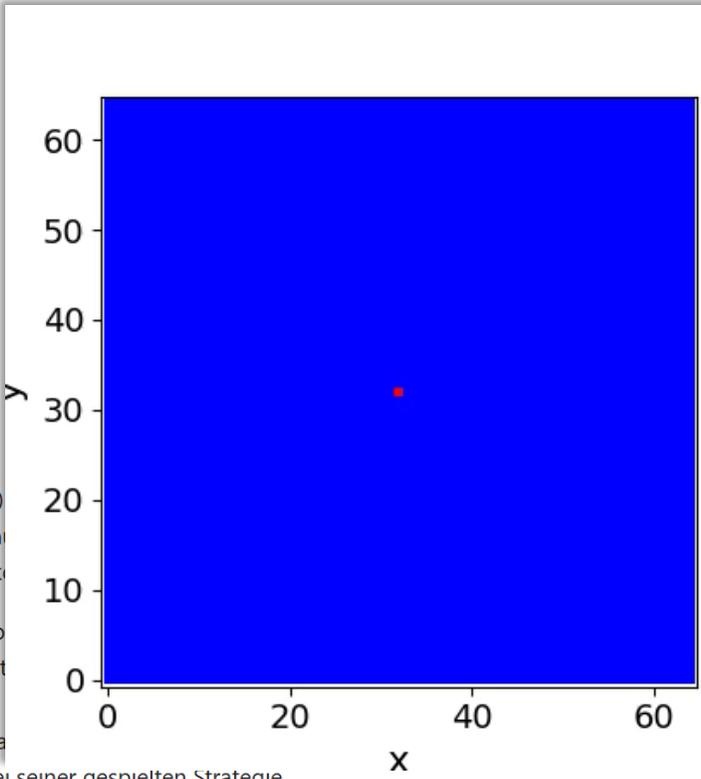
Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II der Vorlesung) Grundlagenforschung, als auch der angewandten, empirischen Netzwerkforschung auf einem solchen komplexen Netzwerk ablaufenden Entscheidungsprozesse k

In diesem Jupyter Notebook werden die Spieler einer endlich großen Populatio der Spielerknoten besitzt somit eine einfache reguläre Struktur und im betracht Spiele und benutzen den Ansatz eines allgemeinen (2 Personen)-(2 Strategien) Zeitschritt vergleichen die Spieler ihren summierten Gewinn/Verlust mit den Na ist sein eigener Wert der höchste, so bleibt er auch in der nächsten Iteration bei seiner gespielten Strategie.

Im Folgenden betrachten wir ein Beispiel, das an das 9. Kapitel des Buches [Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life, 2006](#) angelehnt ist und ein Gefangenendilemma auf einem räumlichen 2-dimensionalen Gitter beschreibt. In Abhängigkeit der Stärke der Dominanz der Strategie und der Anfangskonfiguration der Strategienwahl der Spieler sind unterschiedliche zeitlichen Entwicklungen der Population möglich. Wir nehmen im Folgenden ein dominantes, symmetrisches 2x2-Spiel mit folgender Auszahlungsmatrix an:

$$\hat{\$} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0.01 \end{pmatrix}$$



entsprechen
 iehung ko
 er Compu
 n nächster
 ern (Knote
 ie Spielerk
 eigene Au

ie dann
 werk
 : (2x2)-
 m
 ategie;

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2025/26)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 14.01.2026

Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre räumliche Spiele (spatial games)

Beispiel: Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele

Einführung

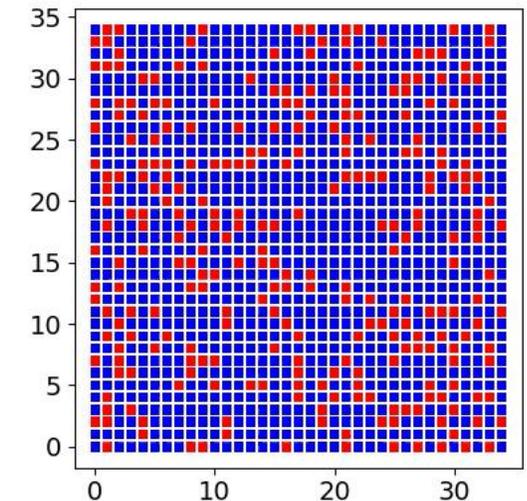
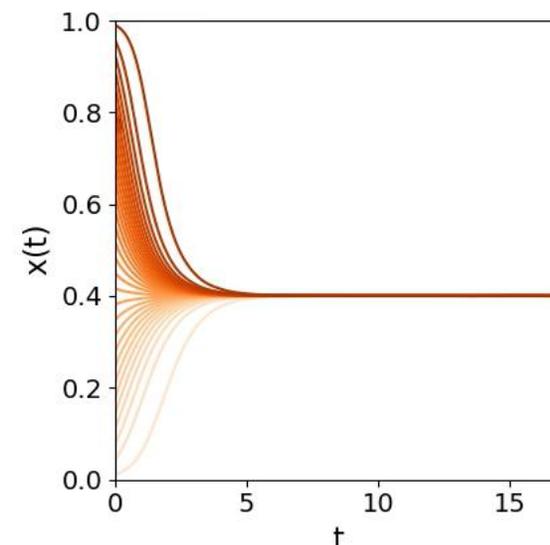
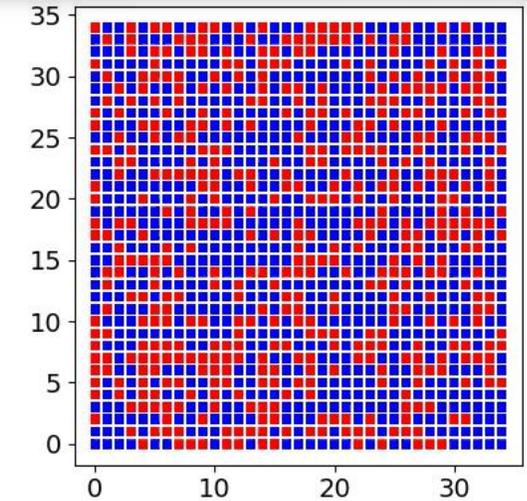
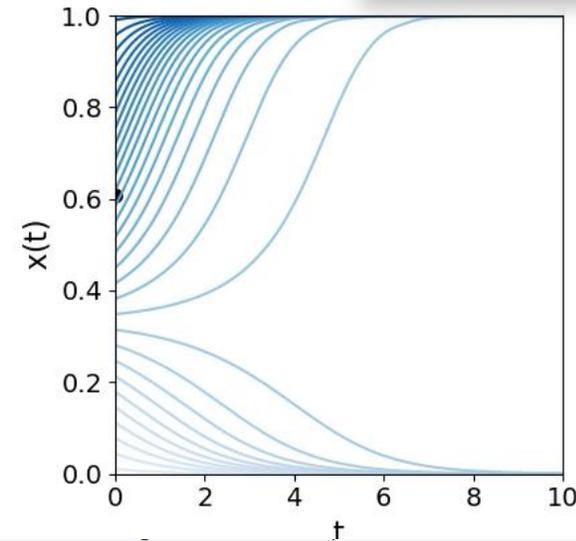
Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II der Vorlesung) mit der evolutionären Spieltheorie (siehe Grundlagenforschung, als auch der angewandten, empirischen Netzwerkforschung dienen kann. In diesem Kapitel wird auf einem solchen komplexen Netzwerk ablaufenden Entscheidungsprozesse können in den meisten Fällen lediglich mit

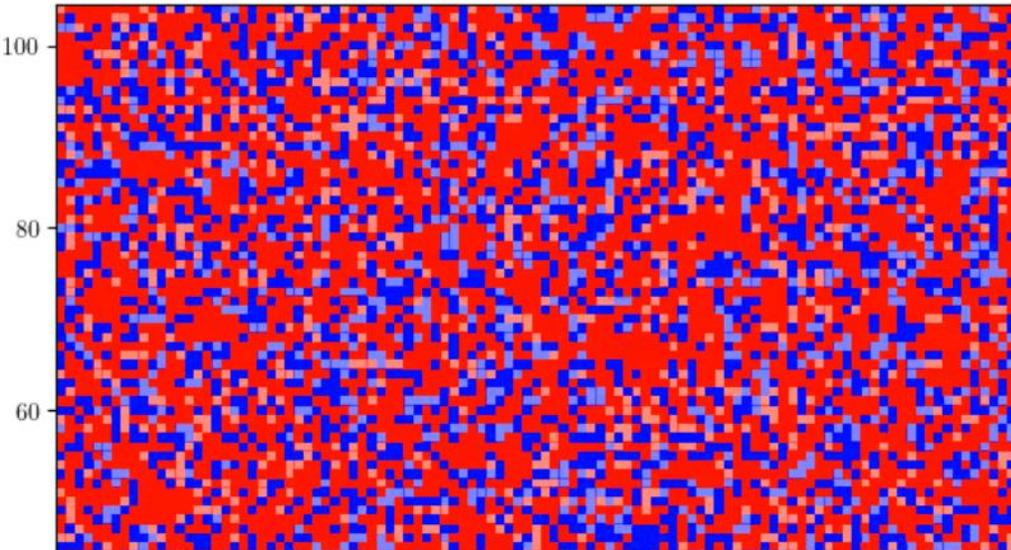
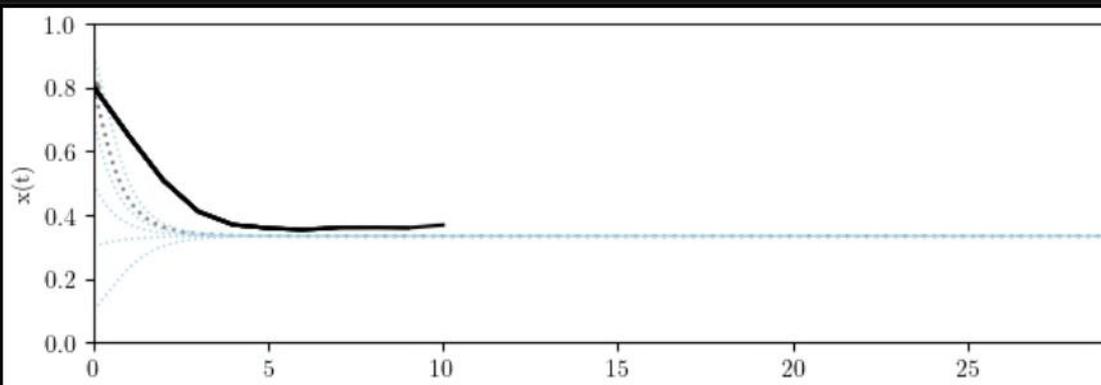
In diesem Jupyter Notebook werden die Spieler einer endlich großen Population auf einem räumlichen Gitter angeordnet. Jeder Spielerknoten besitzt somit eine einfache reguläre Struktur und im betrachteten 2-dimensionalen Fall spielt jeder Spieler ein Spiel und benutzt den Ansatz eines allgemeinen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels mit symmetrischer Auszahlungsmatrix. In jedem Zeitschritt vergleichen die Spieler ihren summierten Gewinn/Verlust mit den Nachbarspielern ihres Umfeldes. Ist die Auszahlung für sein eigenes Spiel höher als die der Nachbarn, ist sein eigener Wert der höchste, so bleibt er auch in der nächsten Iteration bei seiner gespielten Strategie.

Im Folgenden betrachten wir Beispiele von Koordinations- und Anti-Koordinationsspielen und vergleichen die zeitliche Entwicklung mit der evolutionären Spieltheorie (siehe Teil I der Vorlesung) betrachtete man eine unendlich große Population von Spielern, wo die Replikatorgleichung die zeitliche Entwicklung des Populationsvektors $x(t)$ (Anteil der Spieler, die die Strategie

Wir nehmen im Folgenden ein allgemeines symmetrisches (2x2)-Spiel mit folgender Auszahlungsmatrix an:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$





Weiterführende Links

[Folien der 9.Vorlesung](#)

Vorlesungsaufzeichnung der 9.Vorlesung: [WS 2022/23](#) bzw. [WS 2021/22](#)

[View Jupyter Notebook: Evolutionäre dominante räumliche Spiele](#)

[Download Jupyter Notebook: Evolutionäre dominante räumliche Spiele](#)

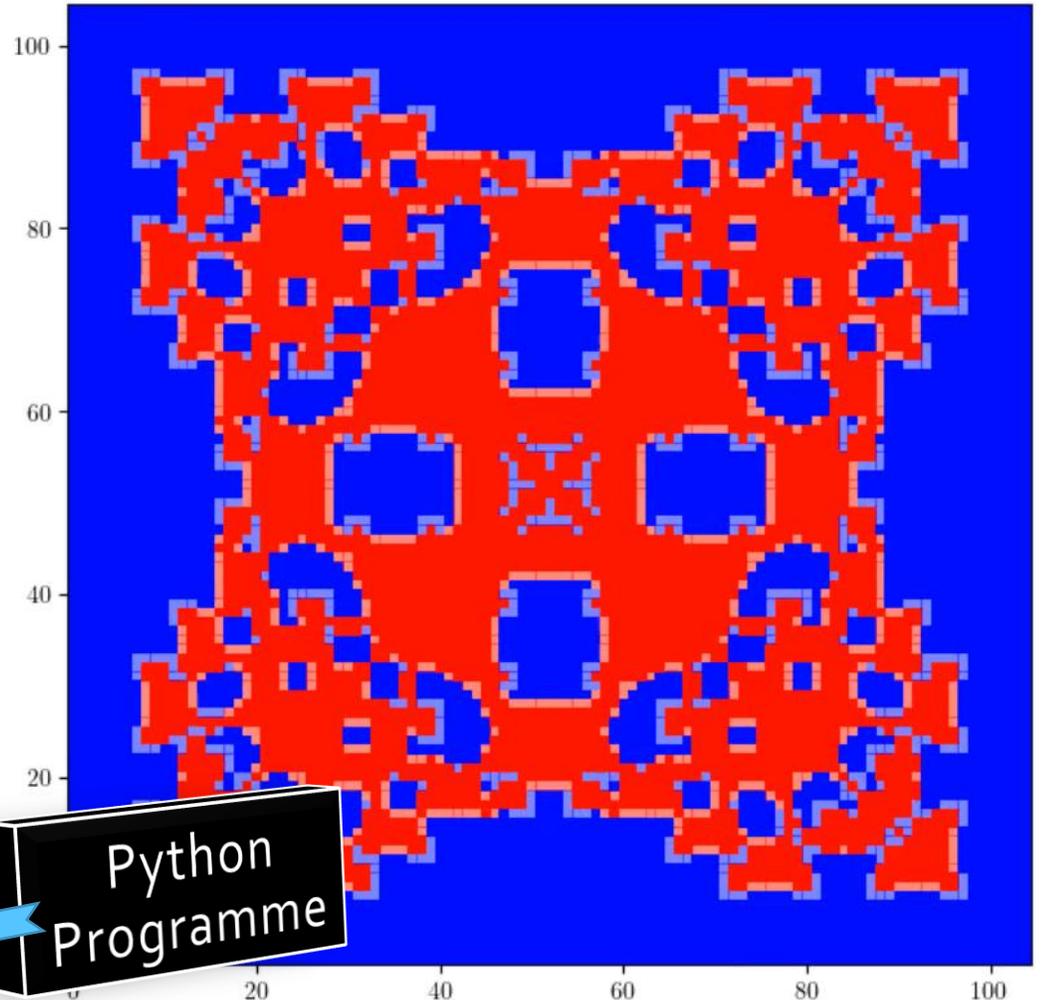
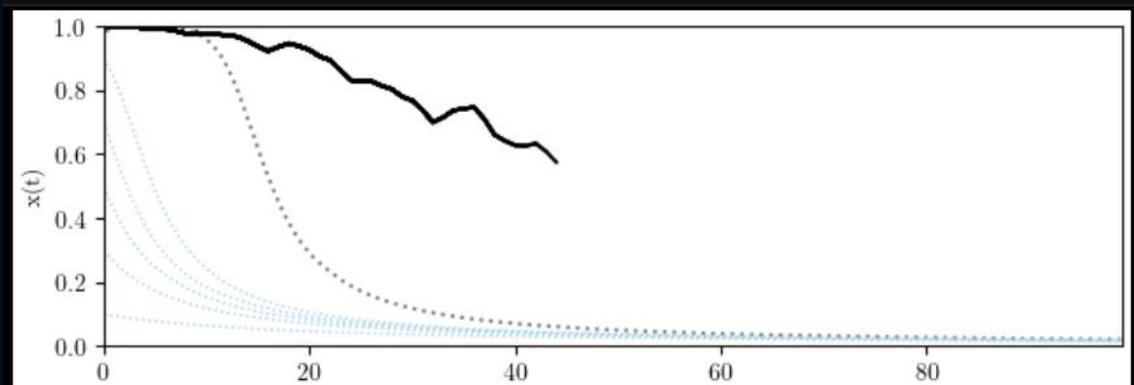
[View Jupyter Notebook: Evolutionäre räumliche Spiele: Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele](#)

[Download Jupyter Notebook: Evolutionäre räumliche Spiele: Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele](#)

[Download Python Programm: Räumliches Spiel \(kleines Gitter mit Auszahlungen\)](#)

[Download Python Programm: Räumliches Spiel \(mittleres Gitter, Walker-Anfangskonfiguration\)](#)

[Download Python Programm: Räumliches Spiel \(großes Gitter\): Version 1, Version 2](#)



Python Programme