Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
28.11.2025

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

6. Vorlesung

Plan für die heutige Vorlesung

- Kurze Wiederholung der Inhalte der 5. Vorlesung
- Einführung in die Theorie der komplexen Netzwerke
  - Warum evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken?
  - Mathematische Beschreibung von komplexen Netzwerken
  - Definition wichtiger Netzwerk-charakterisierender Größen
  - Definition unterschiedlicher Netzwerk-Typen und Netzwerk-Klassen
  - Komplexe Netzwerke in der Realität
  - Die Klasse der zufälligen Netzwerke (random networks)
  - Die Klasse der „Kleine Welt" Netzwerke (small world networks)
  - Komplexe Netzwerke analysieren mit Python und NetworkX

Inhalte Vorlesung 5

- Numerisches Lösen von Differentialgleichungen
- Einführung in die evolutionäre Spieltheorie
  - Die Differentialgleichung eines evolutionären, symmetrischen (2x3)-Spiels
    - Die 19 Zeeman – Klassen
- Anwendungsfelder Spieltheorie
  - Anwendungsfelder in den Wirtschafts- Sozialwissenschaften und Biologie
    - Experimentelle Ökonomie
    - Die Finanzkrise als Falke-Taube Spiel
    - Die Entstehung einer dritten Strategie im Elfmeter-Spiel (Nesken Effekt)
    - Evolutionäre Entwicklung einer Eidechsen Population als symmetrisches (2x3)-Spiel
    - Das Räuber-Beute Spiel und die Lotka-Volterra-Gleichun

Differentialgleichungen: Numerische Lösung von Anfangswertproblemen

Im vorigen Unterpunkt hatten wir die Bewegung einzelner Teilchen in einer Kiste simuliert. In der Physik ist die zeitliche Entwicklung eines Systems of in Form von Differentialgleichungen (DGLs) gegeben. In diesem Unterpunkt betrachten wir das numerische Lösen einer Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad \text{, mit: } a \leq t \leq b\,,\ y(a) = \alpha \quad .$$

Die Funktion $f(t, y(t))$ bestimmt die DGL und somit das Verhalten der gesuchten Funktion $y(t)$. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass $f(t, y(t))$ auf einer Teilmenge $\mathcal{D} = \{(t, y) | a \leq t \leq b\,,\ -\infty \leq y \leq \infty\}$ kontinuierlich definiert ist. Weiter wird angenommen, dass das so definierte Anfangswertproblem "well-posed" ist und eine eindeutige Lösung $y(t)$ existiert ("well-posed" bedeutet hier, dass die Differentialgleichung eine Struktur hat, bei der kleine Störungen im Anfangszustand nicht exponentiell anwachsen). Wir hatten bereits gesehen, wie man Differentialgleichungen mittels Jupyter Notebooks und SymPy DGLs analytisch löst (siehe Jupyter Notebooks und das Rechnen mit symbolischen Ausdrücken). Nicht jede DGL lässt sich analytisch lösen und falls der Befehl "dsolve()" keine sinnvollen Resultate liefert, muss man die zeitliche Entwicklung der Funktion $y(t)$ numerisch berechnen. Die numerische Lösung der DGL kann man sich auch direkt in Python mittels der Methode "integrate.odeint()" berechnen (Python-Modul "scipy"). Möchte man die Lösung jedoch in einem C++ Programm berechnen, so ist man auf die Anwendung eines numerischen Verfahrens angewiesen.

Numerische Verfahren zum Lösen von Differentialgleichung erster Ordnung

Das Euler Verfahren:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$$

Mittelpunktmethode:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left[f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right)\right]$$

Modifizierte Euler Methode:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_i + h\, f(t_i, y_i))]$$

Runge-Kutta Ordnung vier:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) \quad \text{, wobei:}$$

$$k_1 = h\, f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = h\, f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = h\, f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = h\, f\left(t_{i+1}, y_i + k_3\right)$$

Systeme von gekoppelten Differentialgleichungen

Wir betrachten zunächst das numerische Lösen eines Systems von m-gekoppelten Differentialgleichungen (DGLs) erster Ordnung der Form

$$\begin{aligned}
\dot{y_1}(t) &= \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\
\dot{y_2}(t) &= \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\
\dot{y_3}(t) &= \ldots = \\
&\ldots = \ldots \\
\dot{y}_m(t) &= \frac{dy_m}{dt} = f_m(t, y_1, y_2, \ldots, y_m) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei die zeitliche Entwicklung der Vektorfunktion $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t))$ in den Grenzen $a \leq t \leq b$ gesucht wird. Die m-Funktionen $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_m)\,,\ i \in [1, 2, \ldots, m]$ bestimmen das System der DGLs und somit das Verhalten der gesuchten Funktion $\vec{y}(t)$. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die Funktionen $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ auf einer Teilmenge $\mathcal{D}$ ($\mathbb{R}^{m+1} \supseteq \mathcal{D}$) kontinuierlich definiert sind und das so definierte Anfangswertproblem "well-posed" ist und eine eindeutige Lösung $\vec{y}(t)$ existiert. Bei gegebener Anfangskonfiguration

$$y_1(a) = \alpha_1\,,\ y_2(a) = \alpha_2\,,\ \ldots\ , y_m(a) = \alpha_m$$

ist es dann numerisch möglich das System von gekoppelten DGLs zu lösen.

Beispiel: Numerische Lösung eines Systems von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten speziell das folgende System bestehend aus zwei gekoppelten DGLs ($m = 2$):

$$\dot{y_1}(t) = \frac{dy_1}{dt} = 3y_1 + 2y_2 - \left(2t^2 + 1\right) \cdot e^{2t} =: f_1(t, y_1, y_2)$$
$$\dot{y_2}(t) = \frac{dy_2}{dt} = 4y_1 + y_2 + \left(t^2 + 2t - 4\right) \cdot e^{2t} =: f_2(t, y_1, y_2) \quad ,$$

und sind an der numerischen Lösung $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$ im Zeitintervall $t \in [0, 1]$ interessiert. Die Anfangsbedingungen lauten

$$y_1(0) = \alpha_1 = 1\,,\ y_2(0) = \alpha_2 = 1 \quad .$$

Das Lösen dieses Systems von DGLs ist auf gleichem Wege möglich, wie man einzelne Differentialgleichungen numerisch approximiert.

Replikatordynamik (2xM)-Spiele

Wir beschränken uns zunächst auf symmetrische (2xM)-Spiele , d.h. zwei Personen - M Strategien Spiele. Da es sich um symmetrische Spiele handelt, sind alle Spieler gleichberechtigt und man kann von einer homogenen Population ausgehen.
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik beschreibt wie sich die einzelnen Populationsanteile der zur Zeit t gewählten Strategien $x_j(t)$, j=1,2,...M im Laufe der Zeit entwickeln.

$$\dot{x}_j(t) := \frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[\sum_{k=1}^{M} \$_{jk} \cdot x_k(t) - \sum_{l=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_l(t) \right]$$

Wobei die Parameter $\$_{kl}$ die einzelnen Einträge in der Auszahlungsmatrix des 1.Spielers darstellen

$$\hat{\$} = \hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} \$_{11} & \$_{12} & \$_{13} & \dots & \$_{1M} \\ \$_{21} & \$_{22} & \$_{23} & \dots & \$_{2M} \\ \$_{31} & \$_{32} & \$_{33} & \dots & \$_{3M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \$_{M1} & \$_{M2} & \$_{M3} & \dots & \$_{MM} \end{pmatrix}$$

Fitness der Strategie j

Durchschnitt-licher Erfolg der j-ten Strategie

Durschnittliche Fitness (Auszahlung) der gesamten Population

Replikatordynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele)

Man erhält ein System von drei gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cdot \left[\$_{11} \cdot x_1 + \$_{12} \cdot x_2 + \$_{13} \cdot x_3 - \bar{\$}\right]$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot \left[\$_{21} \cdot x_1 + \$_{22} \cdot x_2 + \$_{23} \cdot x_3 - \bar{\$}\right]$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3 \cdot \left[\$_{31} \cdot x_1 + \$_{32} \cdot x_2 + \$_{33} \cdot x_3 - \bar{\$}\right]$$

Das System von Differentialgleichungen lässt sich bei gegebener Auszahlungsmatrix $\hat{\$}$ und Anfangsbedingung $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ meist nur nummerisch (auf dem Computer) lösen. Die Lösungen bestehen dann aus den drei (zeitlich abhängigen) Populationsanteilen $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$.

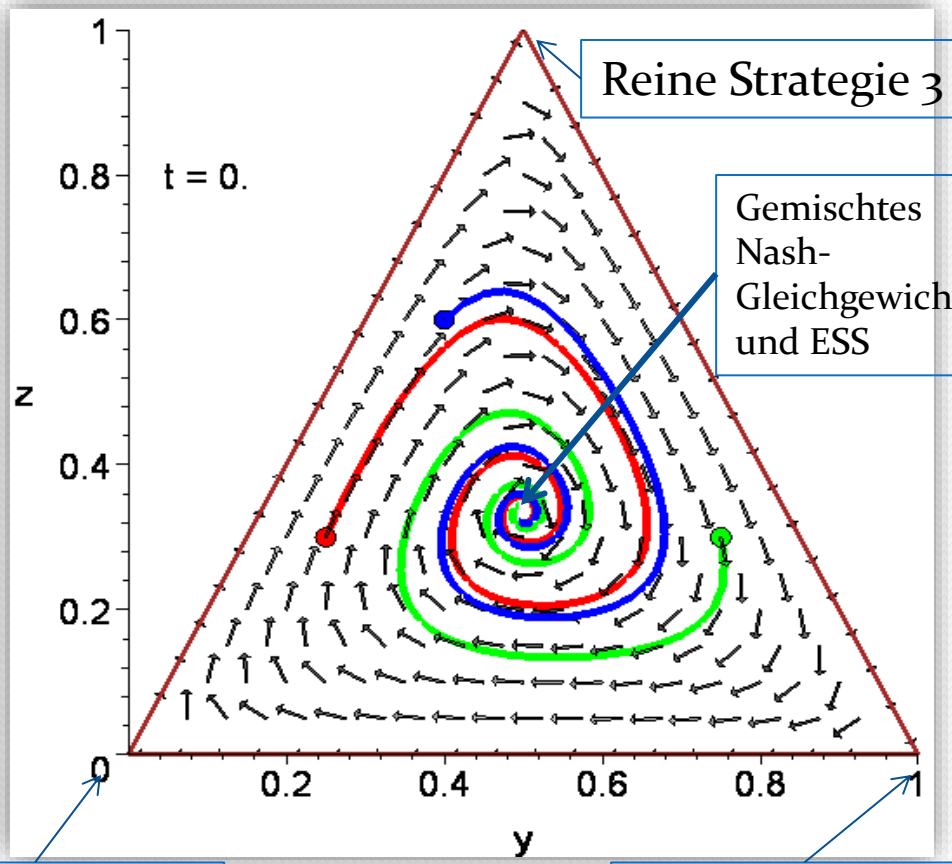
Replikatordynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele, **Beispiel 1**)

Wir betrachten im Folgenden ein Beispiel eines (2x3)-Spiels mit der rechts angegebenen Auszahlungsstruktur:

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(0, 0)	(2, -1)	(-1 , 2)
Strategie 2	(-1 , 2)	(0 , 0)	(2 , -1)
Strategie 3	(2 , -1)	(-1 , 2)	(0 , 0)

Die rechte Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung der relativen Populationsanteile der gewählten Strategien für drei mögliche Anfangsbedingungen. Die einzige evolutionär stabile Strategie dieses Beispiels befindet sich beim gemischten Nash-Gleichgewicht $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$
Die einzelnen Pfeile im Dreieck veranschaulichen den durch die Spielmatrix bestimmten Strategien-„Richtungswind“, dem die Population zeitlich folgen wird.



Zur Visualisierung der evolutionären Entwicklung benutzt man of die sogen. barycentric coordinates:

$$y := x_2 + \frac{x_3}{2}$$

$$z := x_3$$

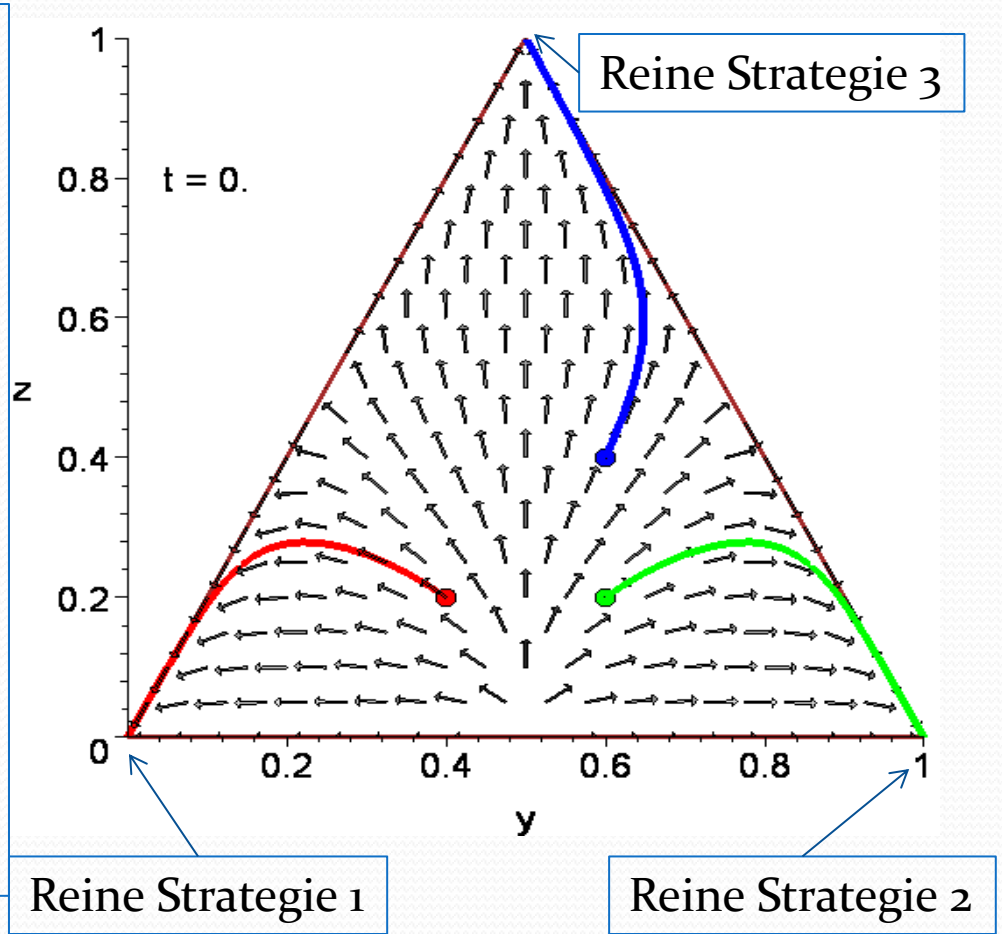
Replikatordynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele, **Beispiel 2**)

Wir betrachten im Folgenden ein Beispiel eines (2x3)-Spiels mit der rechts angegebenen Auszahlungsstruktur:

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(0, 0)	(-3, -3)	(-1 , -1)
Strategie 2	(-3 , -3)	(0 , 0)	(-1 , -1)
Strategie 3	(-1 , -1)	(-1 , -1)	(0 , 0)

Die rechte Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung der relativen Populationsanteile der gewählten Strategien für drei mögliche Anfangsbedingungen. Das Spiel besitzt drei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien, die ebenfalls evolutionär stabile Strategien darstellen. Welche der drei ESS die Population realisiert hängt von dem Anfangswert der Populationsanteile ab. Die zeitliche Entwicklung folgt wieder dem Strategien-„Richtungswind“ der zugrundeliegenden Auszahlungsmatrix.

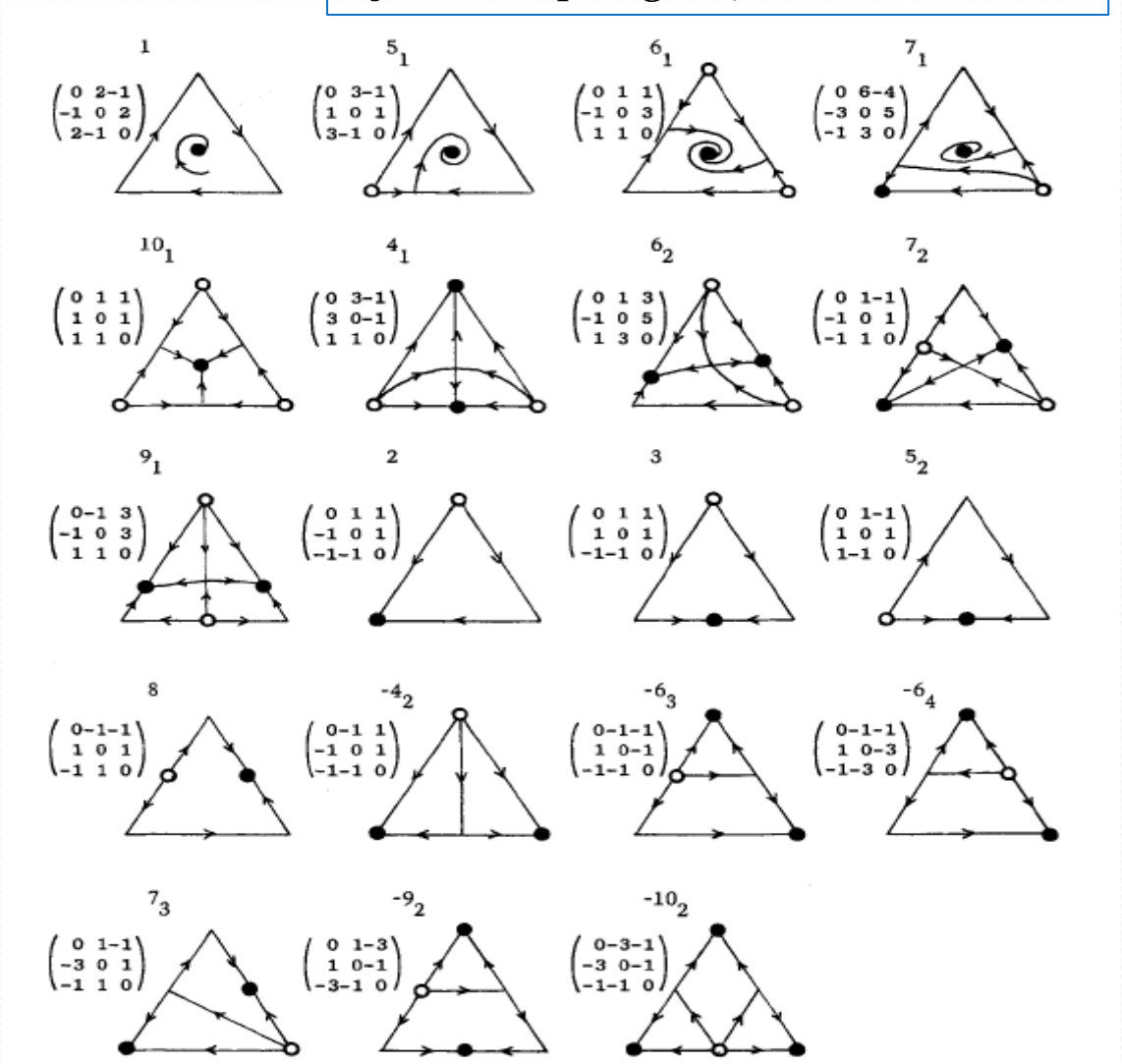


Replikatordynamik

(Klassifizierung symmetrische (2x3)-Spiele)

E. C. Zeeman, *POPULATION DYNAMICS FROM GAME THEORY, In:* Global Theory of Dynamical Systems, Springer 1980

E. C. Zeeman zeigt in seinem im Jahre 1980 veröffentlichten Artikel, dass man evolutionäre, symmetrische (2x3)-Spiele in 19 Klassen einteilen kann. Die Abbildung rechts zeigt das evolutionäre Verhalten dieser 19 Spieltypen. Die ausgefüllten schwarzen Punkte markieren die evolutionär stabilen Strategien der jeweiligen Spiele. Es gibt Spielklassen, die besitzen lediglich eine ESS und Klassen die sogar drei ESS besitzen.



Jupyter Notebook
Evolutionspiel4.ipynb

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2025/26)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 22.08.2025

Erster Vorlesungsteil:

Die 19 Klassen der evolutionären symmetrischen (2×3)-Spiele

Einführung

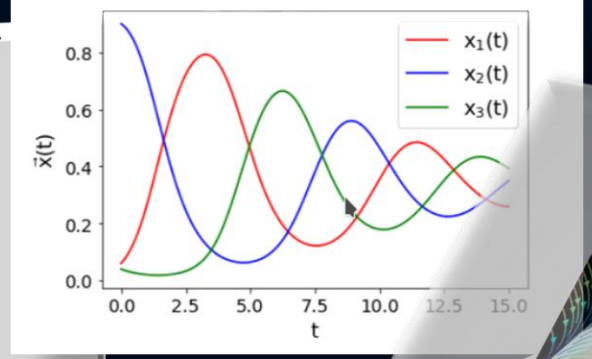
In diesem Unterkapitel werden die evolutionären symmetrischen (2×3)-Spiele analysiert. Symmetrische $(2 \times m)$-Spiele werden durch die folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{x}\left(\hat{\$}\vec{x}\right) - \left(\left(\hat{\$}\vec{x}\right)^T \vec{x}\right)\vec{x}$$

Aufgrund der Symmetrie der Auszahlungsmatrix $\hat{\$} = \hat{\$}^A = \left(\hat{\$}^B\right)^T$ kann die zeitliche Entwicklung solcher Spiele durch nur einen Populationsvektor ($\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t))$ beschrieben werden.

Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall $m = 3$ und setzen die Auszahlungsmatrix wie folgt an:

$$\hat{\$} = \begin{pmatrix} \$_{11} & \$_{12} & \$_{13} \\ \$_{21} & \$_{22} & \$_{23} \\ \$_{31} & \$_{32} & \$_{33} \end{pmatrix}$$



Auf der Internetseite der Vorlesung

- Folien der 5.Vorlesung
- Vorlesungsaufzeichnung der 5.Vorlesung: WS 2022/23 bzw. WS 2021/22
- View Jupyter Notebook: Die 19 Klassen der evolutionären symmetrischen (2x3)-Spiele
- Download Jupyter Notebook: Die 19 Klassen der evolutionären symmetrischen (2x3)-Spiele
- Download Python Programm: Evolutionäre Spieltheorie symmetrischer (2x3)-Spiele (2x3-Spiel_ng.py)
- View Jupyter Notebook: Die Räuber-Beute Gleichung im Kontext der evolutionären Spieltheorie
- Download Jupyter Notebook: Die Räuber-Beute Gleichung im Kontext der evolutionären Spieltheorie
- Maple Worksheet: Äquivalenz der Räuber-Gleichung für N-Populationen mit der Replikatorgleichung der evolutionären Spieltheorie für (N+1)-Strategien
- Download Jupyter Notebook VPSOC_DGL_1.ipynb
- View Jupyter Notebook VPSOC_DGL_1.html
- Download C++ Programm evol1.cpp

Python Programm 2x3-Spiel_ng.py

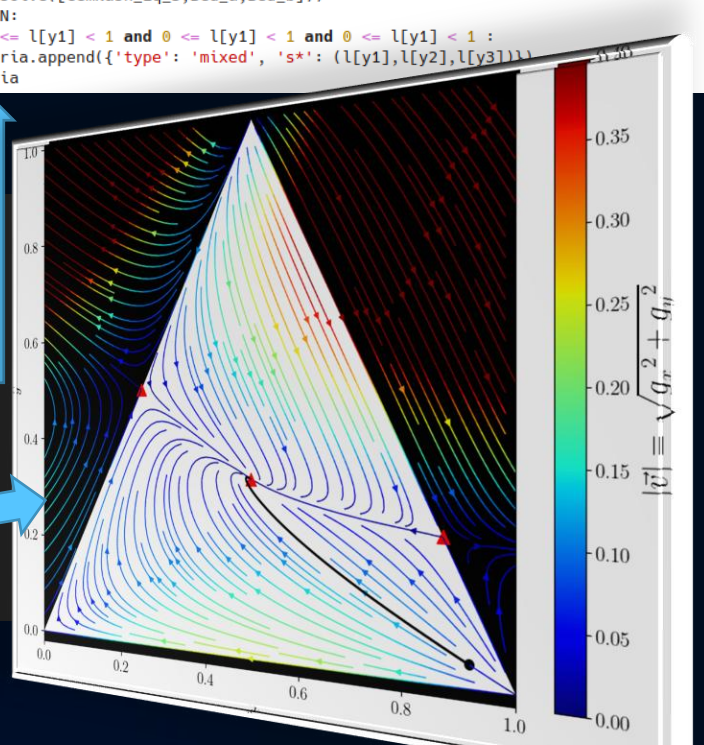
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rcParams
import matplotlib.colors as colors
from scipy.integrate import solve_ivp
from sympy import *

# baryzentrisches Dreiecks-Koordinatensystem
def xy(vx):
    return np.array([vx[1]+vx[2]/2,vx[2]])

# Definition der Funktionen g_x und g_y
def g(xy, D):
    m = 3
    x = np.array([1-xy[0]-xy[1]/2,xy[0]-xy[1]/2,xy[1]])
    dx_dt = []
    for i in range(m):
        dx_dt.append(sum(D[i,j]*x[i]*x[j] for j in range(m)) - sum(sum(D[k,j]*x[k]*x[j] for j in range(m)) for k in range(m))*x[i])
    return [dx_dt[1]+dx_dt[2]/2,dx_dt[2]]

# Vektorisiertes DGL-System mit numpy
def DGLsys(t, x, D):
    x = np.asarray(x)
    Dx = D @ x
    u = np.dot(x, Dx)
    return x * (Dx - u)

# Alternative Definition des DGL-Systems
#def DGLsys(t,x,D):
#    m=3
#    dx_dt = []
#    for i in range(m):
#        dx_dt.append(sum(D[i,j]*x[i]*x[j] for j in range(m)) - sum(sum(D[k,j]*x[k]*x[j] for j in range(m)) for k in range(m))*x[i])
#    return dx_dt

# Loesen der DGL und plotten der Populationsentwicklung
def solve_and_plot(D, x_init, t_end=15, n_points=1000):
    # Groessenfestlegung der Labels usw. im Bild
    rcParams.update({
        'text.usetex'       : True,
        'figure.figsize'    : [8,6],
        'axes.titlesize' : 14,
        'axes.labelsize' : 16,
        'xtick.labelsize' : 14 ,
        'ytick.labelsize' : 14
    })

    # Weitere Festlegungen
    fehler = 10**(-13)
    t_eval = np.linspace(0, t_end, n_points)

    # Loesung der DGL fuer eine Anfangspopulation x_init
    Loes = solve_ivp(DGLsys, [0, t_end], x_init, args=(D, ), t_eval=t_eval, rtol=fehler, atol=fehler)

    # Fuer die Darstellung des Feldliniendiagramms streamplot
    Y, X = np.mgrid[0:1:100j, 0:1:100j]
    gXY = g([X,Y],D)
    # Die Farbe wird die Geschwindigkeit der Aenderung des Populationsvektors anzeigen
    colorspeed = np.sqrt(gXY[0]**2 + gXY[1]**2)

    # Plotten des Bildes
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 8))
    ax.set_xlabel(r"$x$")
    ax.set_ylabel(r"$y$")
    strm = ax.streamplot(X, Y, gXY[0], gXY[1], linewidth=1,density=[2, 2],norm=colors.Normalize(vmin=0, vmax=0.4), color=colorspeed, cmap=plt.cm.jet)
```

```python
# Funktion zur Berechnung der Nashgleichgewichte
def find_nash_equilibria(D):
    equilibria = []
    # Berechnung der reinen Nash-Gleichgewichte
    for i in range(D.shape[0]):
        for j in range(D.shape[0]):
            if D[i, j] == max(D[:, j]) and D[j, i] == max(D[:, i]):
                equilibria.append({'type': 'pure', 's': (i+1,j+1)})
    #Berechnung der gemischten Nash-Gleichgewichte (Interior-gemischte und Boundary-gemischte)
    Loes_GN = []
    x1,x2,x3,y1,y2,y3 = symbols('x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3')
    xs = Matrix([x1,x2,x3])
    ys = Matrix([y1,y2,y3])
    Dollar_A = transpose(xs)*D*ys
    Dollar_As = Dollar_A.subs(x3,1-x1-x2).subs(y3,1-y1-y2)[0]
    Dollar_As_1 = Dollar_A.subs(x1,0).subs(x3,1-x2).subs(y3,1-y1-y2)[0]
    Dollar_As_2 = Dollar_A.subs(x2,0).subs(x3,1-x1).subs(y3,1-y1-y2)[0]
    Dollar_As_3 = Dollar_A.subs(x3,0).subs(x2,1-x1).subs(y3,1-y1-y2)[0]
    GemNash_Eq1 = Eq(Dollar_As.diff(x1),0)
    GemNash_Eq2 = Eq(Dollar_As.diff(x2),0)
    GemNash_Eq_1 = Eq(Dollar_As_1.diff(x2),0)
    GemNash_Eq_2 = Eq(Dollar_As_2.diff(x1),0)
    GemNash_Eq_3 = Eq(Dollar_As_3.diff(x1),0)
    Bed=Eq(1,y1+y2+y3)
    Loes_GN.append(solve([GemNash_Eq1,GemNash_Eq2,Bed]))
    Bed_a=Eq(0,y1)
    Bed_b=Eq(1,y2+y3)
    Loes_GN.append(solve([GemNash_Eq_1,Bed_a,Bed_b]))
    Bed_a=Eq(0,y2)
    Bed_b=Eq(1,y1+y3)
    Loes_GN.append(solve([GemNash_Eq_2,Bed_a,Bed_b]))
    Bed_a=Eq(0,y3)
    Bed_b=Eq(1,y1+y2)
    Loes_GN.append(solve([GemNash_Eq_3,Bed_a,Bed_b]))
    for l in Loes_GN:
        if l and 0 <= l[y1] < 1 and 0 <= l[y1] < 1 and 0 <= l[y1] < 1 :
            equilibria.append({'type': 'mixed', 's*': (l[y1],l[y2],l[y3])})
    return equilibria
```

Modularisierung des Programms mittels unterschiedlicher Funktionen

Berechnung der Nash-Gleichgewichte

Automatische Kennzeichnung der Nash-Gleichgewichte im Bild



Anwendungsfelder der Spieltheorie

Spieltheoretische Konzepte werden in den unterschiedlichsten Fachdisziplinen angewandt und reichen von den Wirtschaftswissenschaften, der Soziologie hin zur Biologie. Der Arbeitskreis des Fachverbandes der Deutsche Physikalische Gesellschaft (siehe DPG-Fachverband: Physik der sozio-ökonomischen Systeme befasst sich mit diesem stark interdisziplinären Forschungsfeld und diverse Anwendungsfelder werden auf den jährlichen Fachtagungen diskutiert. Im Folgenden werden einige Beispiele von Anwendungsfeldern der Spieltheorie und weiterführende Literaturlinks aufgelistet.

Anwendungsbeispiele im Bereich der Ökonomie

- Experimentelle Ökonomie am Beispiel des Gefangenendilemmas
- Vertrauen und Fairness in Allgemeingüter Spielen
- Kooperation und Fairness am Beispiel von Markt- und Ultimatum-Spielen
- Die Finanzkrise als Falke-Taube Spiel
- Evolutionäre Dynamik im Öffentliche-Güter-Spiel
- Spieltheorie und Auktionskonzepte (Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 2020)

Anwendungsfelder Spieltheorie

Anwendungsbeispiele im Bereich der Biologie

- Das Buch von Martin A. Nowak Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life, 2006 diskutiert mehrere Anwendungsfelder der evolutionären Spieltheorie im Bereich der Biologie, wie z.B. die evolutionäre Dynamik von Krebs, HIV Infektion und die Evolution der Virulenz.
- Paarungsverhalten einer Eidechsenpopulation als evolutionäres symmetrisches (2x3)-Spiel
- Evolutionäre Entwicklung von Makro-Molekülen
- Das Gefangenendilemma eines RNA-Virus

Anwendungsbeispiele im Bereich der Sozialwissenschaft

- Evolution von sozialen Normen
- Evolution der Moral
- Evolution der Sprachentwicklung einer Population
- Das Buch von Martin A. Nowak Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life, 2006 diskutiert auch am Ende die Evolution der Sprachentwicklung einer Population.
- Anwendungen in den Politikwissenschaften
- Die Entstehung einer dritten Strategie im Elfmeter-Spiel (Neeskens Effekt)

E-Learning und interaktive Übungsaufgaben

Zusäzlich zu den Informationen aus dieser Internetseite finden Sie in diesem Unterpunkt diverse interaktive Übungsaufgaben zu den folgenden Themen:

Aufgabe 1

Reine Nash-Gleichgewichte in einem simultanen (2x2)-Spiel in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungmatrix

Aufgabe 2

Gemischtes Nash-Gleichgewicht in einem simultanen (2x2)-Spiel in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungmatrix

Aufgabe 3

Das gemischtes Nash-Gleichgewicht im Hirschjagt-Spiel

Aufgabe 4

Spielklassen von simultanen (2x2)-Spielen in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungmatrix

Aufgabe 5

Zeitliche Entwicklung des Populationsvektors im evolutionären Spiel

Aufgabe 6

Evolutionär stabile Strategien

Aufgabe 7

Zeitliche Entwicklung des Populationsvektors im evolutionären Bi-Matrix Spiel

Aufgabe 8

Gemischtes Nash-Gleichgewicht in einem simultanen (2x2)-Spiel in strategischer Form mit unsymmetrischer Auszahlungmatrix

Aufgabe 9

Gemischtes Nash-Gleichgewicht und zeitliche Entwicklung des Populationsvektors in Zentrumsspielen

Aufgabe 10

Zeitliche Entwicklung des Populationsvektors im evolutionären (2x3)-Spiel

Aufgabe 11

Gemischtes Nash-Gleichgewicht im evolutionären (2x3)-Spiel

Aufgabe 12

Mittlere Distanz zwischen zwei Knoten in einem zufälligen Netzwerk

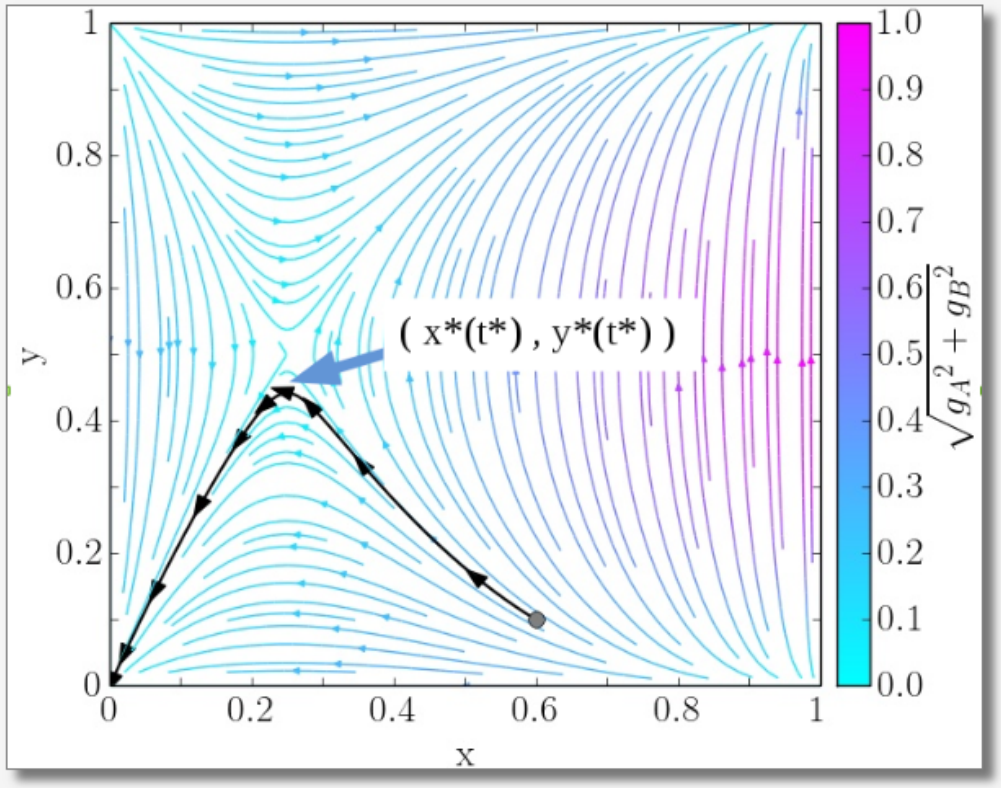
Aufgabe 7

Das zeitliche Verhalten der Komponenten der Populationsvektoren (Gruppe A: $x(t) := x_1^A(t)$ und Gruppe B: $y(t) := x_1^B(t)$) wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[\left(\$_{11}^A + \$_{22}^A - \$_{12}^A - \$_{21}^A\right) y(t) + \left(\$_{12}^A - \$_{22}^A\right)\right] \left(x(t) - (x(t))^2\right) =: g_A(x,y)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[\left(\$_{11}^B + \$_{22}^B - \$_{12}^B - \$_{21}^B\right) x(t) + \left(\$_{21}^B - \$_{22}^B\right)\right] \left(y(t) - (y(t))^2\right) =: g_B(x,y)$$

Qualitative Veranschaulichung der Aufgabenstellung



Lösung

Der maximale Wert y-Wert beträgt y^* =
und er wird zum Zeitpunkt t^* = erreicht.

Das durch die folgende Auszahlungstabelle definierte Bimatrix Spiel gehört der Klasse der Sattelpunktsspiele an.

A/B	s_1	s_2
s_1	(10 , 10)	(4 , 7)
s_2	(9 , 4)	(5 , 5)

Der Populationsvektor zur Zeit t=0 sei (x(0) = 0.6 , y(0) = 0.0937). Der Anteil der Spieler in der Gruppe B die die Strategie s_1^B spielen nimmt zunächst zu, erreicht dann ein Maximum und nimmt dannach wieder ab (siehe nebenstehende Abbildung). Berechnen Sie den Zeitpunkt t^* an dem der maximale Wert y^* erreicht wird. Tragen Sie bitte die beiden Werte in die unteren Eingabenfelder ein

t^* = 0,000 , y^* = 0,000

und vergleichen Sie indem Sie den folgenden *Button* drücken.

Lösung anzeigen

Weiter zur nächsten Aufgabe ...

Aufgabe 8

A/B	s_1	s_2
s_1	(366 , 246)	(120 , 7)
s_2	(112 , 141)	(215 , 354)

Betrachten Sie die gemischte Erweiterung eines simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels in strategischer Form mit unsymmetrischer Auszahlungmatrix. Die Menge der Spieler sei $\mathcal{I} = \{A, B\}$, die Menge der reinen Strategien sei $\mathcal{S}^A = \mathcal{S}^B = \{s_1, s_2\}$ und die Präferenzordnungen der Spieler sei durch die neben stehende Auszahlungstabelle quantifiziert. Die reinen Strategien entsprechen den folgenden gemischten Strategien: $s_1 \hat{=} \tilde{s}^B = \tilde{s}^B = 1$ und $s_2 \hat{=} \tilde{s}^A = \tilde{s}^B = 0$.
Bei welcher gemischten Strategienkombination $(\tilde{s}^{A\star}, \tilde{s}^{B\star})$ befindet sich das gemischte Nash-Gleichgewicht? Tragen Sie bitte Ihre Werte in die unteren Eingabenfelder ein

$\tilde{s}^{A\star} =$ 0,000 , $\tilde{s}^{B\star} =$ 0,000

und vergleichen Sie indem Sie den folgenden *Button* drücken.

Lösung anzeigen

Lösung

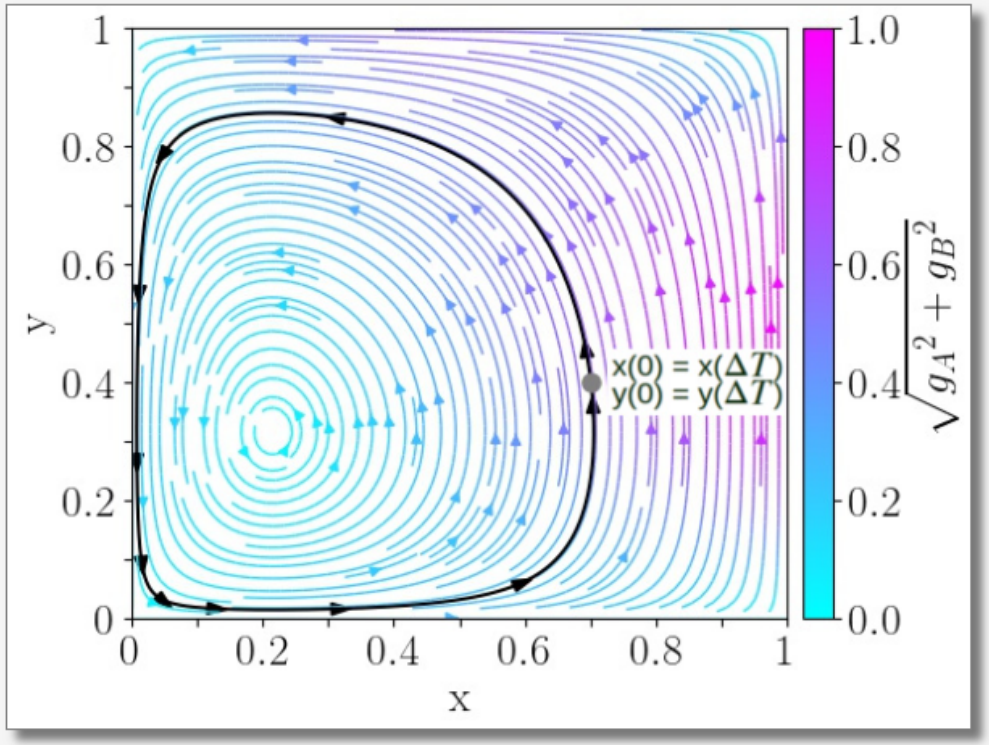
Das gemischte Nash-Gleichgewicht besindet sich bei
$\tilde{s}^{A\star} =$
$\tilde{s}^{B\star} =$

Aufgabe 9

Das zeitliche Verhalten der Komponenten der Populationsvektoren (Gruppe A: $x(t) := x_1^A(t)$ und Gruppe B: $y(t) := x_1^B(t)$) wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[\left(\$_{11}^A + \$_{22}^A - \$_{12}^A - \$_{21}^A\right) y(t) + \left(\$_{12}^A - \$_{22}^A\right)\right] \left(x(t) - (x(t))^2\right) =: g_A(x,y)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[\left(\$_{11}^B + \$_{22}^B - \$_{12}^B - \$_{21}^B\right) x(t) + \left(\$_{21}^B - \$_{22}^B\right)\right] \left(y(t) - (y(t))^2\right) =: g_B(x,y)$$

Qualitative Veranschaulichung der Aufgabenstellung



Lösung

Die Werte der Auszahlungsmatrix betragen
$c_A =$ und $c_B =$

und die Zeit eines Umlaufes des Populationsvektors beträgt
$\Delta T =$

Das durch die folgende Auszahlungstabelle definierte Bimatrix Spiel gehört der Klasse der Zentrumsspiele an.

A/B	s_1^B	s_2^B
s_1^A	(8 , 8)	(6 , c_B)
s_2^A	(c_A , 4)	(5 , 5)

Der Populationsvektor zur Zeit t=0 sei (x(0)=0.7 , y(0)=0.4). Wählen Sie die noch offenen Werte der Auszahlungsmatrix (c_A und c_B) so, dass sich das gemischte Nash-Gleichgewicht des Spiels bei $x^* = \tilde{s}^{A*} =$ 0.3927586 und $y^* = \tilde{s}^{B*} =$ 0.4927586 befindet. Berechnen Sie dann die Zeit ΔT, die die Population benötigt um wieder zu ihrer Anfangskonfiguration zurück zu kehren: x(0) = x(ΔT) und y(0) = y(ΔT). Tragen Sie bitte die berechneten Werte in die unteren Eingabenfelder ein

c_A = 0,000 , c_B = 0,000

ΔT = 0,000

und vergleichen Sie indem Sie den folgenden *Button* drücken.

Lösung anzeigen

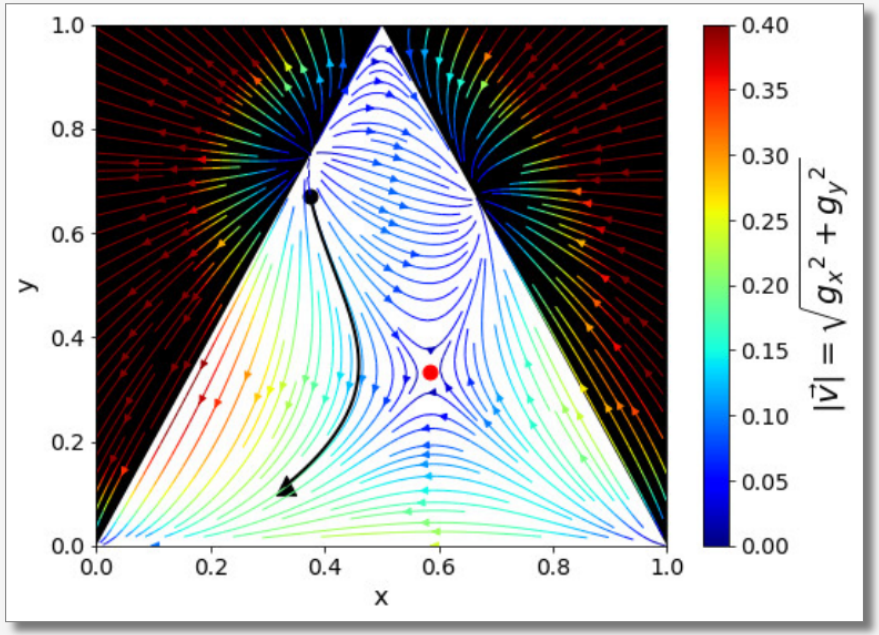
Weiter zur nächsten Aufgabe ...

Aufgabe 10

Betrachten Sie die zeitliche Entwicklung eines evolutionären (2 Spieler)-(3 Strategien) Spiels mit symmetrischer Auszahlungsmatrix. Das zeitliche Verhalten der Komponenten des Populationsvektors $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = g_1(x_1, x_2, x_3)\,, \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = g_2(x_1, x_2, x_3)\,, \quad \frac{dx_3(t)}{dt} = g_3(x_1, x_2, x_3)$$

Qualitative Veranschaulichung der Aufgabenstellung



Lösung

Der Wert des Parameters d in der Auszahlungsmatrix beträgt
$d =$

und die Position des Populationsvektors nach $t = 2$ Zeiteinheiten ist
$x(t = 2) =$, $y(t = 2) =$

Weiter zur nächsten Aufgabe ...

Die Präferenzordnungen der Spieler sei durch die untere Auszahlungstabelle quantifiziert.

A/B	s_1^B	s_2^B	s_3^B
s_1^A	(0 , 0)	(1 , -1)	(-1 , -d)
s_2^A	(-1 , 1)	(0 , 0)	(1 , 2)
s_3^A	(-d , -1)	(2 , 1)	(0 , 0)

Aufgrund der Normalisierungsbedingung des Populationsvektors kann man sich die zeitliche Entwicklung der Strategiewahl der Population in einem baryzentrischen Dreiecks-Koordinatensystem veranschaulichen, wobei der x-Achsen Wert durch $x := x_2 + x_3/2$ und der y-Achsen Wert durch $y := x_3$ definiert ist. Die nebenstehende Abbildung veranschaulicht eine solche Entwicklung im baryzentrischen Koordinatensystem. Der rote Punkt innerhalb des Dreiecks ist dadurch gekennzeichnet, dass in ihm der Betrag des "Populationswindes" ($|\vec{v}| = \sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2 + g_3{}^2}$) gerade Null ist. Wählen Sie den freien Parameter d der Auszahlungstabelle so, dass der rote Punkt bei ($x_{Rot} = 0.6067708$, $y_{Rot=}$ 0.3333333) liegt. Nehmen Sie dann an, dass die Anfangs-Strategienwahl der Population (schwarzer Punkt in der nebenstehende Abbildung) bei ($x(t = 0) = 0.375$, $y(t = 0) = 0.67$) liegt und berechnen Sie die Position nach $t = 2$ Zeiteinheiten (schwarzes Dreieck in der nebenstehende Abbildung). Tragen Sie bitte die berechneten Werte in die unteren Eingabenfelder ein

$d =$ 0,000

$x(t = 2) =$ 0,000 $y(t = 2) =$ 0,000

und vergleichen Sie indem Sie den folgenden *Button* drücken.

Lösung anzeigen

Aufgabe 11

A/B	s_1^B	s_2^B	s_3^B
s_1^A	(0 , 0)	(d , -1)	(-1 , 2)
s_2^A	(-1 , d)	(0 , 0)	(2 , -1)
s_3^A	(2 , -1)	(-1 , 2)	(0 , 0)

Betrachten Sie die zeitliche Entwicklung eines evolutionären (2 Spieler)-(3 Strategien) Spiels mit symmetrischer Auszahlungsmatrix. Das zeitliche Verhalten der Komponenten des Populationsvektors $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = g_1(x_1, x_2, x_3)\,, \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = g_2(x_1, x_2, x_3)\,, \quad \frac{dx_3(t)}{dt} = g_3(x_1, x_2, x_3)$$

Die Präferenzordnungen der Spieler sei durch die neben stehende Auszahlungstabelle quantifiziert, wobei der Parameter d auf den folgenden Wert festgelegt sei d = 2.34949495 . Aufgrund der Normalisierungsbedingung des Populationsvektors kann man sich die zeitliche Entwicklung der Strategiewahl der Population in einem baryzentrischen Dreiecks-Koordinatensystem veranschaulichen, wobei der x-Achsen Wert durch $x := x_2 + x_3/2$ und der y-Achsen Wert durch $y := x_3$ definiert ist. Bei welcher gemischten Strategienkombination $(\tilde{s}_1^\star, \tilde{s}_2^\star, \tilde{s}_3^\star)$ befindet sich das gemischte Nash-Gleichgewicht und die evolutionär stabile Strategie des Spiels? Tragen Sie bitte Ihre Werte in die unteren Eingabenfelder ein und geben Sie zusätzlich noch die baryzentrischen Koordinaten $(x^\star, y^\star)$ des gemischten Nash-Gleichgewichts an.

$\tilde{s}_1^\star =$ 0,000 , $\tilde{s}_2^\star =$ 0,000
$\tilde{s}_2^\star =$ 0,000
$x^\star =$ 0,000 , $y^\star =$ 0,000

Überpüfen Sie ihre Berechnungen, indem Sie das evolutionäre Spiel simulieren. Wälen Sie dabei den Anfangswert der Strategienwahl der Population zu $(x_0 = 0.92, y_0 = 0.04)$ (baryzentrisches Dreiecks-Koordinatensystem). Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie den folgenden *Button* drücken.

Lösung anzeigen

Lösung

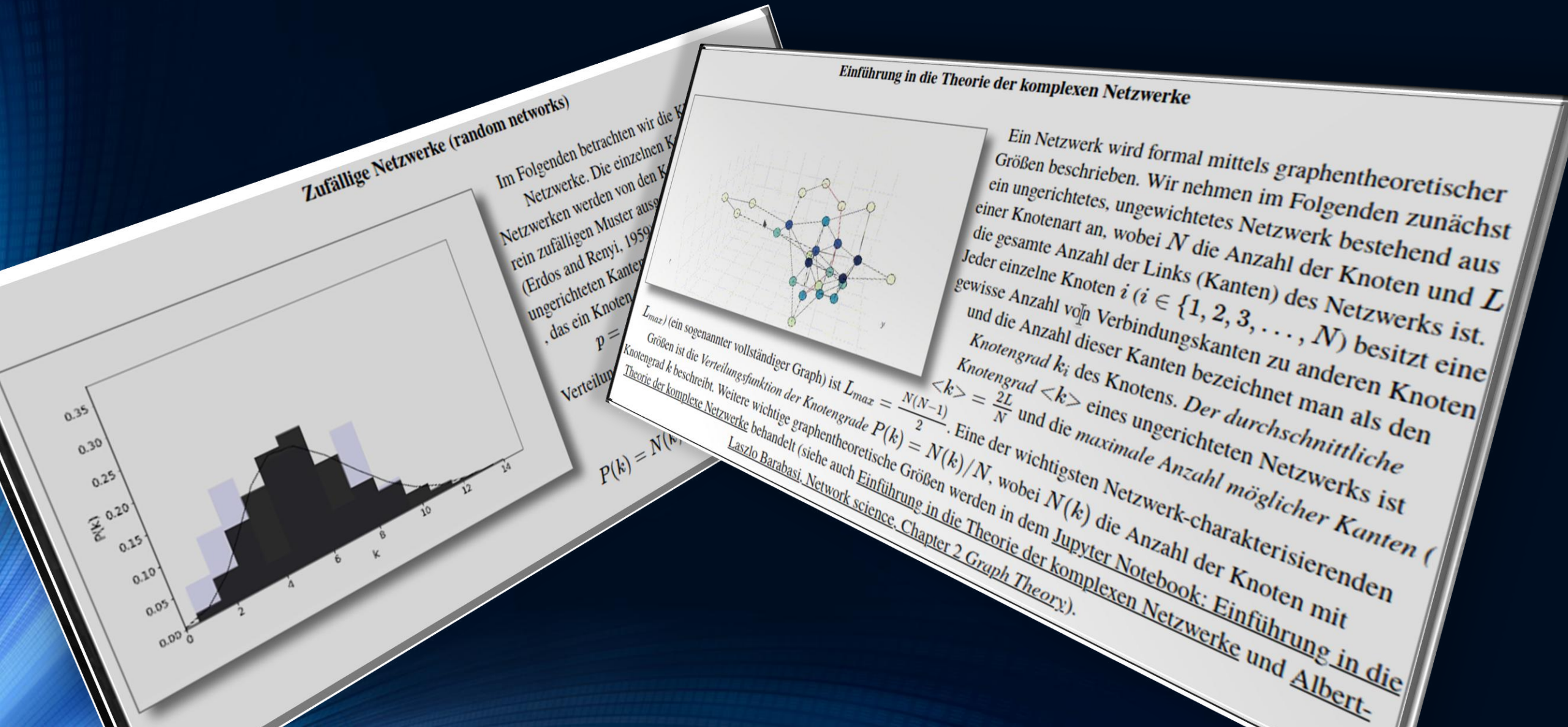
Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei
$\tilde{s}_1^\star =$, $\tilde{s}_2^\star =$
$\tilde{s}_3^\star =$
$x^\star =$, $y^\star =$

Ihre Simulation des evolutionären Spiels sollte mit folgendem Bild übereinstimmen:

Weiter zur nächsten Aufgabe ...

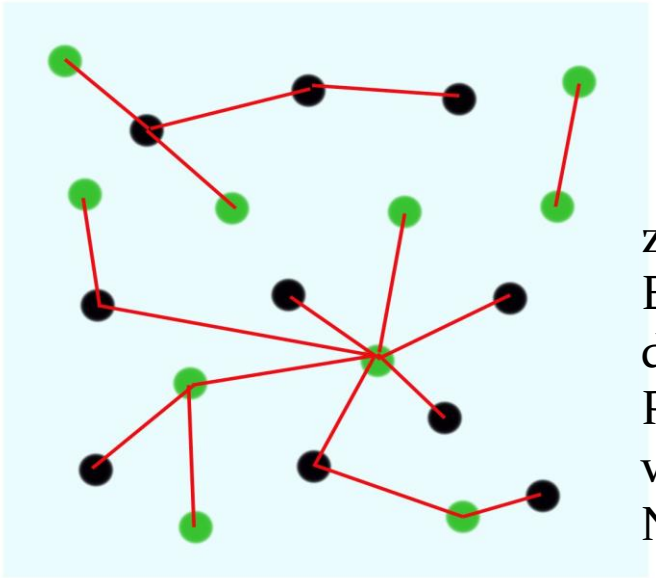
Einführung in die Theorie der komplexen Netzwerke

Internetseite der Vorlesung
Teil II

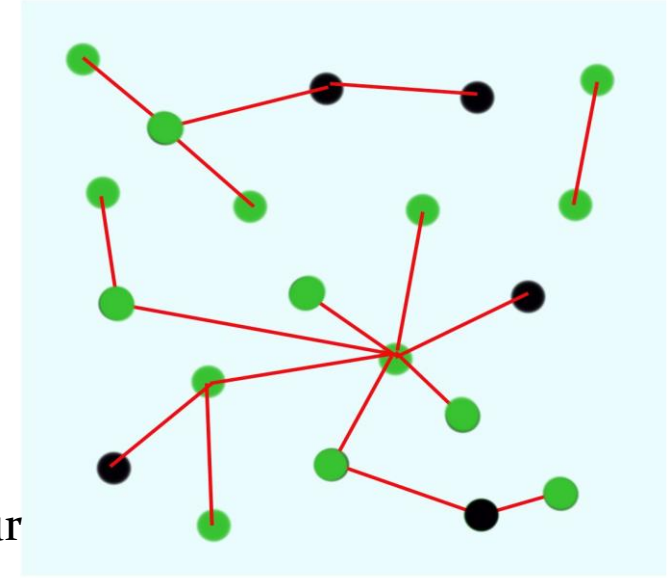


Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

Viele in der Realität vorkommende evolutionäre Spiele werden auf einer definierten Netzwerkstruktur (Topologie) gespielt. Die Spieler der betrachteten Population sind hierbei nicht gleichwertig, sondern wählen als Spielpartner nur mit ihnen durch das Netzwerk verlinkte (verbundene) Partner aus.



zeitliche Entwicklung der Population auf vorgegebener Netzwerkstruktur



x(0)=0.5

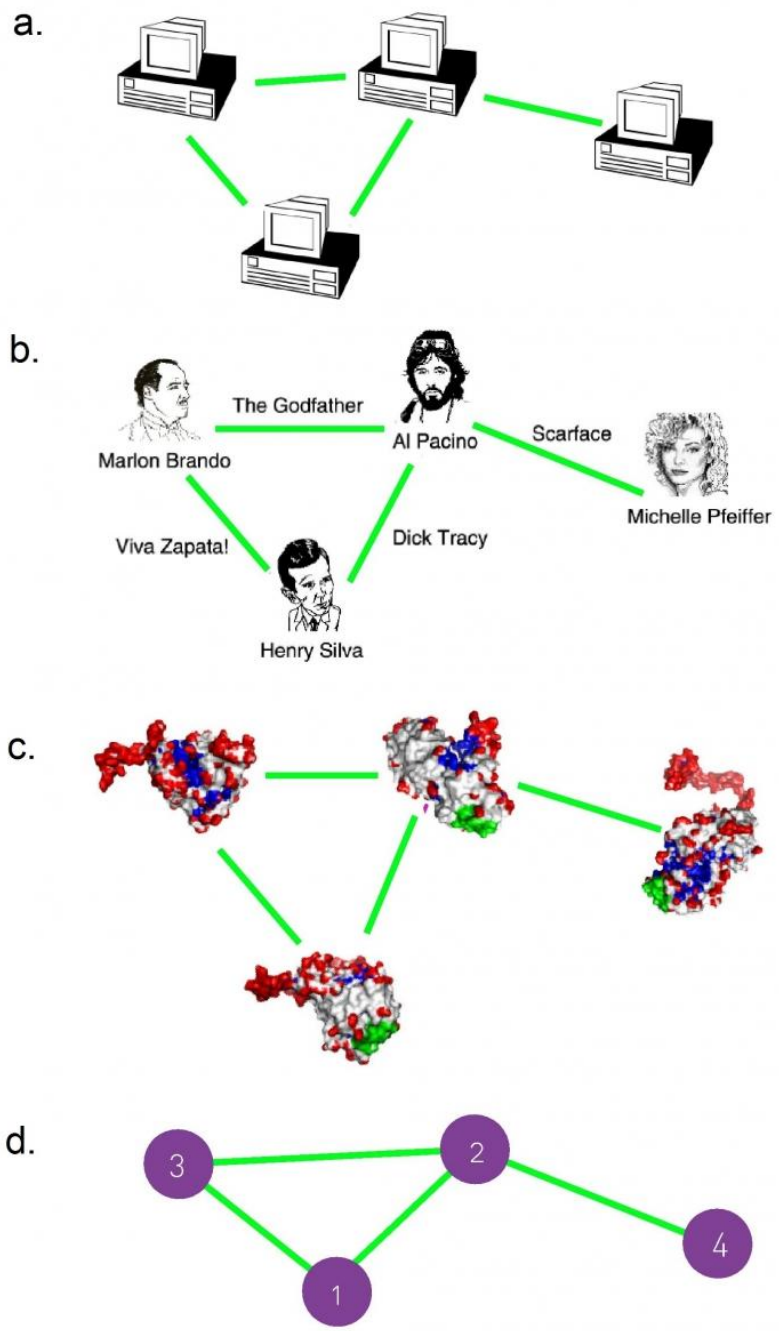
x(10)=0.75

Mögliche Strategien: (grün , schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
x(t) : Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.
Die roten Verbindungslinien beschreiben die möglichen Spielpartner des Spielers

Theorie der komplexen Netzwerke (I)

Da die Theorie der komplexen Netzwerke aus dem mathematischen Zweig der *Graphentheorie* entstanden ist benutzt sie nicht die „mathematischen Vokabeln“ der Spieltheorie. Man spricht z.B. nicht von Spielern, sondern von **Knoten** (bzw. Vertices). Die Verbindungen zwischen den Knoten werden als **Kanten** (bzw. Links) bezeichnet. Während die Spieler eines (klassischen) evolutionären Spiels mit allen anderen Spielern der Population in Kontakt treten können, ist dies bei einem Spiel auf einem komplexen Netzwerk im allgemeinen nicht möglich.

Komplexe Netzwerke
Knoten und Kanten



Different Networks, Same Graph
The figure shows a small subset of (a) the Internet, where routers (specialized computers) are connected to each other; (b) the Hollywood actor network, where two actors are connected if they played in the same movie; (c) a protein-protein interaction network, where two proteins are connected if there is experimental evidence that they can bind to each other in the cell. While the nature of the nodes and the links differs, these networks have the same graph representation, consisting of N = 4 nodes and L = 4 links, shown in (d).

Abbildung entnommen von:
Network Science by Albert-László Barabási
http://networksciencebook.com/

Viele der im Teil 2 behandelten Themen sind in diesem Buch ausführlich behandelt.

Netzwerke in der Realität

Netzwerke finden sich in den unterschiedlichsten sozialen, physikalischen und biologischen Systemen

- **Biologische Netzwerke**
  - Protein- und Gennetzwerke
- **Soziale Netzwerke**
  - Beziehungs- und Freundschaftsnetzwerke
  - Netzwerke von Geschäftsbeziehungen und Firmenbeteiligungen
  - Internetbasierte, soziale Web2.0 Netzwerke
- **Technologische Netzwerke**
  - Transportnetzwerke (Flug-, Zugrouten)
  - Internetverbindungen zwischen Computerservern
- **Informationsnetzwerke**
  - Wissensnetzwerke, Verlinkungen von Internetseiten
  - Zitationsnetzwerke von wissenschaftlichen Artikeln
  - Linguistische Netzwerke

Theorie der komplexen Netzwerke (II)

Komplexe Netzwerke lassen sich wie folgt untergliedern:

- Handelt es sich nur um eine Knotenart (Spielergruppe), oder besteht das Netzwerk aus mehreren Knotenarten (z.B. Bi-Matrix Spiele).
- Sind die Kanten (Verbindungslinien zwischen den Knoten) gerichtet oder ungerichtet.
- Besitzen die Kanten zahlenmäßige Gewichtungen oder geben sie einfach an ob ein Knoten mit einem anderen verbunden oder nicht verbunden ist.
- Gibt es zeitliche Veränderungen des Netzwerks; ist die Anzahl der Knoten konstant oder wächst bzw. schrumpft sie im laufe der Zeit.

Theorie der komplexen Netzwerke (III)

(Beispiele unterschiedlicher komplexer Netzwerke)

a) Nicht gerichtetes und ungewichtetes Netzwerk einer einzigen Knotenart.
b) Nicht gerichtetes und ungewichtetes Netzwerk dreier verschiedener Knotenarten, wobei zusätzlich drei verschiedene Kantenarten existieren.
c) Nicht gerichtetes aber gewichtetes Netzwerk. Sowohl die Knoten als auch die Kanten des Netzwerks besitzen zahlenmäßige Gewichtungen.
d) Gerichtetes aber nicht gewichtetes Netzwerk. Es existiert nur eine Knoten- und gerichtete Kantenart.

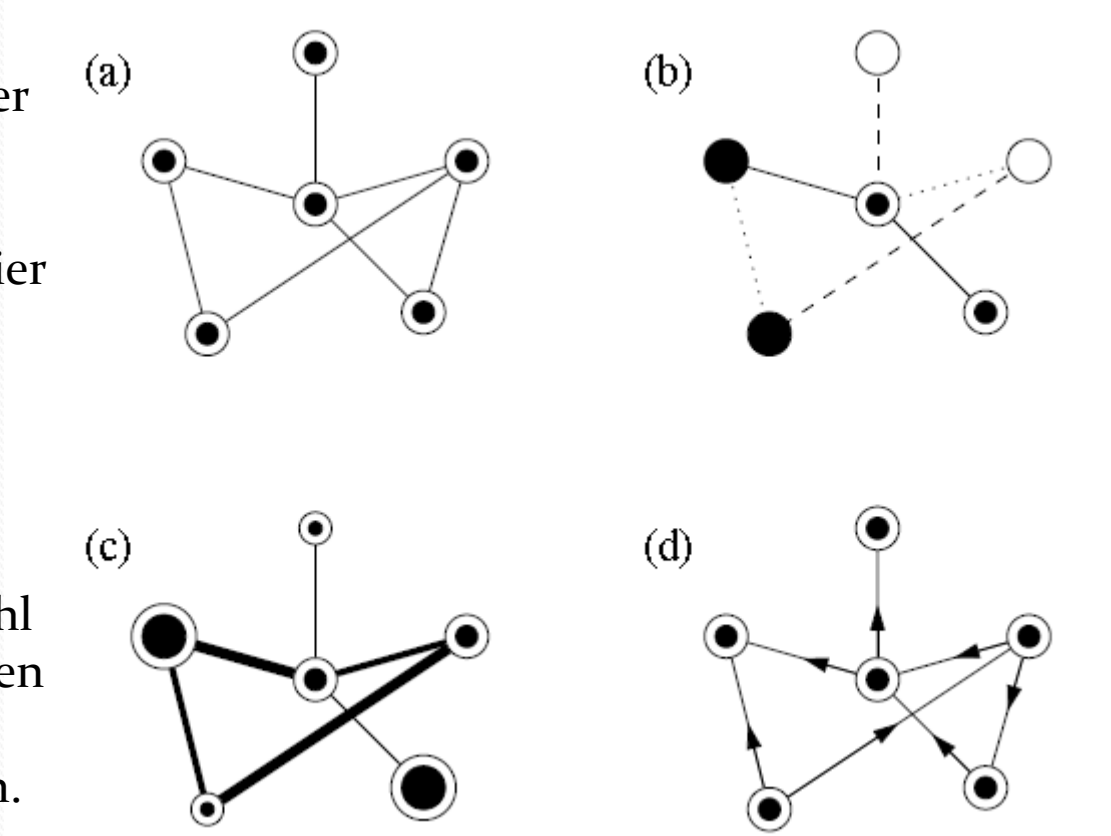


Abbildung: Unterschiedliche Netzwerktypen
Die Abbildung ist dem folgenden Artikel entnommen:
M. E. J. Newman,
„The structure and function of complex networks"

Theorie der komplexen Netzwerke (IV)

(Größen die ein Netzwerk charakterisieren)

- **Der Knotengrad** k_i

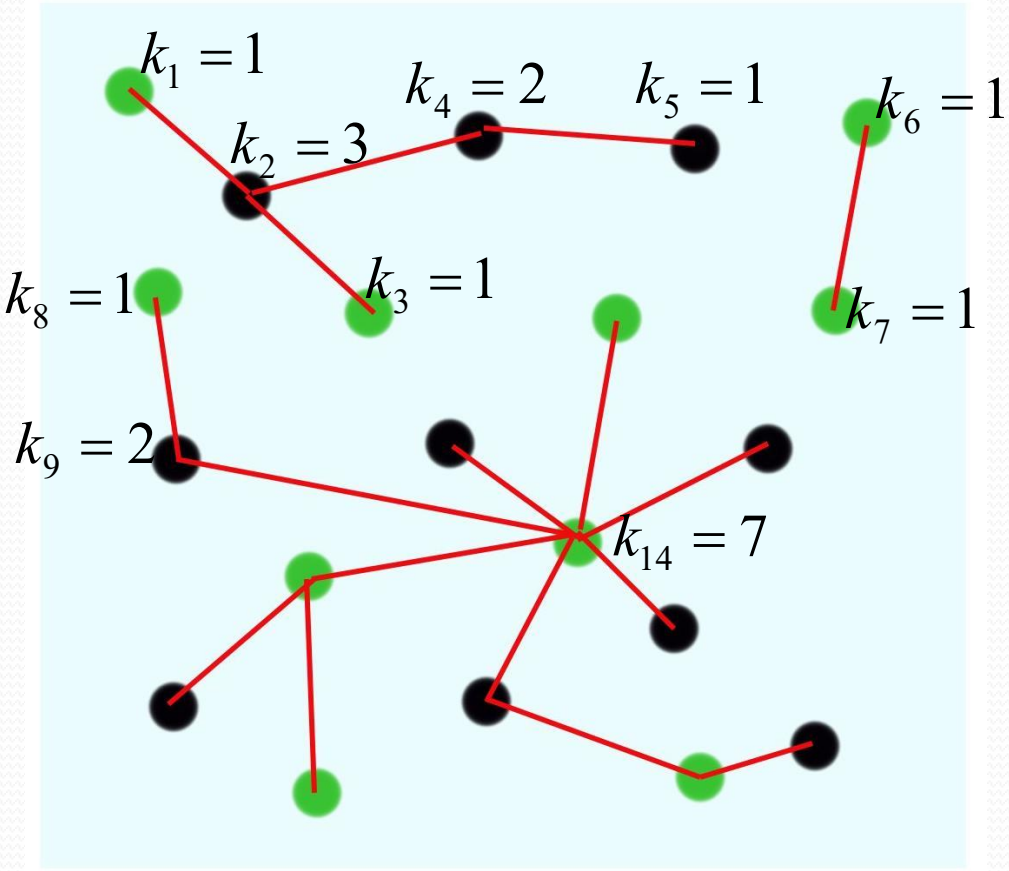
Der Knotengrad des Knotens i ist gleich der Anzahl der Kanten die der Knoten i besitzt. Bei gerichteten Netzwerken unterscheidet man zwischen dem eingehenden und ausgehenden Knotengrad. Bei gewichteten Netzwerken summiert man über die Zahlenfaktoren der gewichteten Kanten.

- **Der Clusterkoeffizient** C_i

Der Clusterkoeffizient gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass zwei nächste Nachbarn eines Knotens ebenfalls nächste Nachbarn untereinander sind. Der globale Wert C des Netzwerks stellt demnach eine Art von „Cliquen"-Nachbarschafts-Eigenschaft des Netzwerks dar

- **Der Durchmesser des Netzwerks**

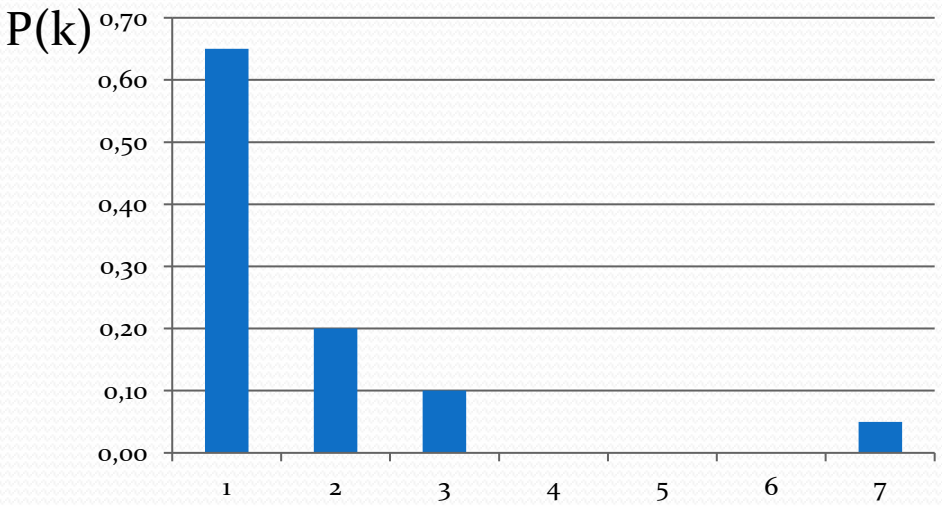
Der Durchmesser des Netzwerks gibt die maximale kürzeste Kantenlänge zwischen zwei beliebigen Knoten des Netzwerkes an.

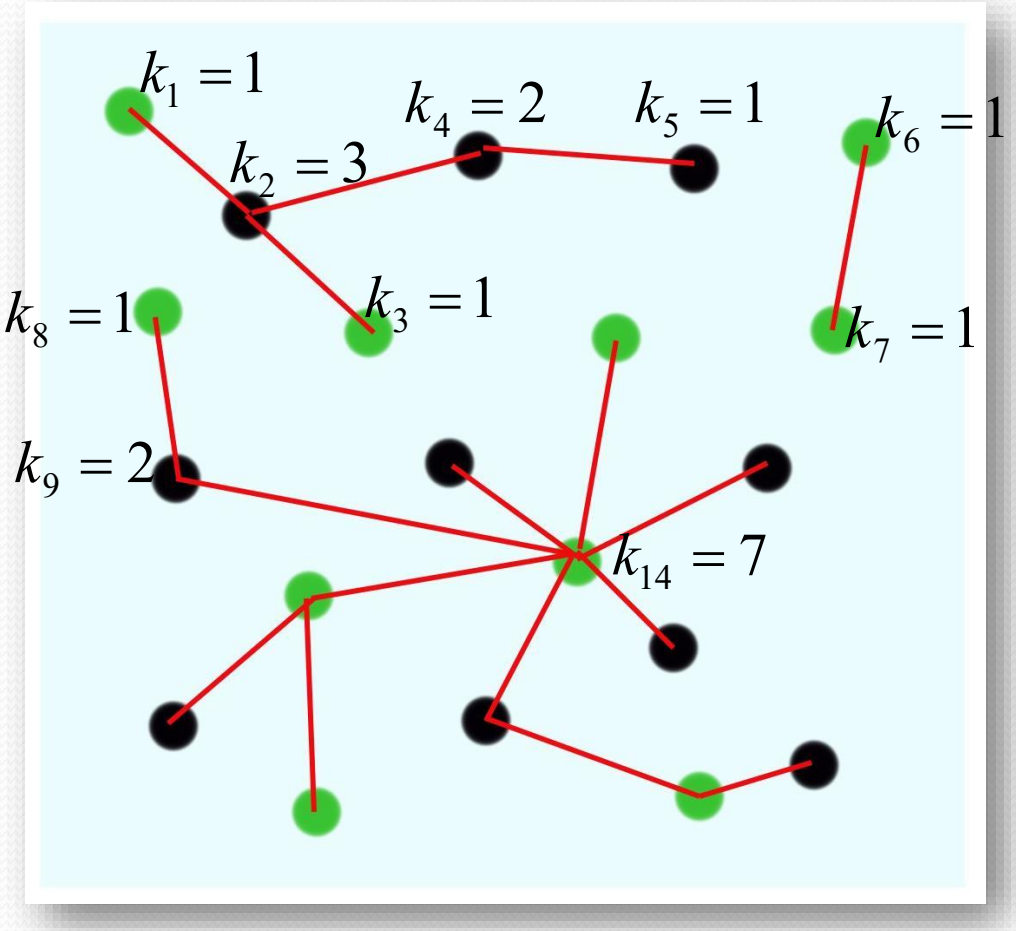


Theorie der komplexen Netzwerke (V)

(Die Verteilungsfunktion der Knotengrade)

Die Verteilungsfunktion der Knotengrade P(k) (bzw. N(k)) ist eine wichtige das Netzwerk charakterisierende Größe. Sie gibt an, wie groß der Anteil an Netzwerkknoten mit Knotengrad k ist. Bei realen (endlichen) Netzwerken ist diese Funktion keine kontinuierliche, sondern eine diskrete Funktion. In dem rechten Beispiel besitzt die Verteilungsfunktion das folgende Aussehen:





SIAM REVIEW
Vol. 45, No. 2, pp. 167–256

The Structure and Function of Complex Networks*

M. E. J. Newman†

Netzwerkstrukturen in unterschiedlichsten Systemen

	Network	Type	n	m
Social	film actors	undirected	449 913	25 516 482
	company directors	undirected	7 673	55 392
	math coauthorship	undirected	253 339	496 489
	physics coauthorship	undirected	52 909	245 300
	biology coauthorship	undirected	1 520 251	11 803 064
	telephone call graph	undirected	47 000 000	80 000 000
	email messages	directed	59 912	86 300
	email address books	directed	16 881	57 029
	student relationships	undirected	573	477
	sexual contacts	undirected	2 810	
Information	WWW `nd.edu`	directed	269 504	1 497 135
	WWW Altavista	directed	203 549 046	2 130 000 000
	citation network	directed	783 339	6 716 198
	Roget's Thesaurus	directed	1 022	5 103
	word co-occurrence	undirected	460 902	17 000 000
Technological	Internet	undirected	10 697	31 992
	power grid	undirected	4 941	6 594
	train routes	undirected	587	19 603
	software packages	directed	1 439	1 723
	software classes	directed	1 377	2 213
	electronic circuits	undirected	24 097	53 248
	peer-to-peer network	undirected	880	1 296
Biological	metabolic network	undirected	765	3 686
	protein interactions	undirected	2 115	2 240
	marine food web	directed	135	598
	freshwater food web	directed	92	997
	neural network	directed	307	2 359

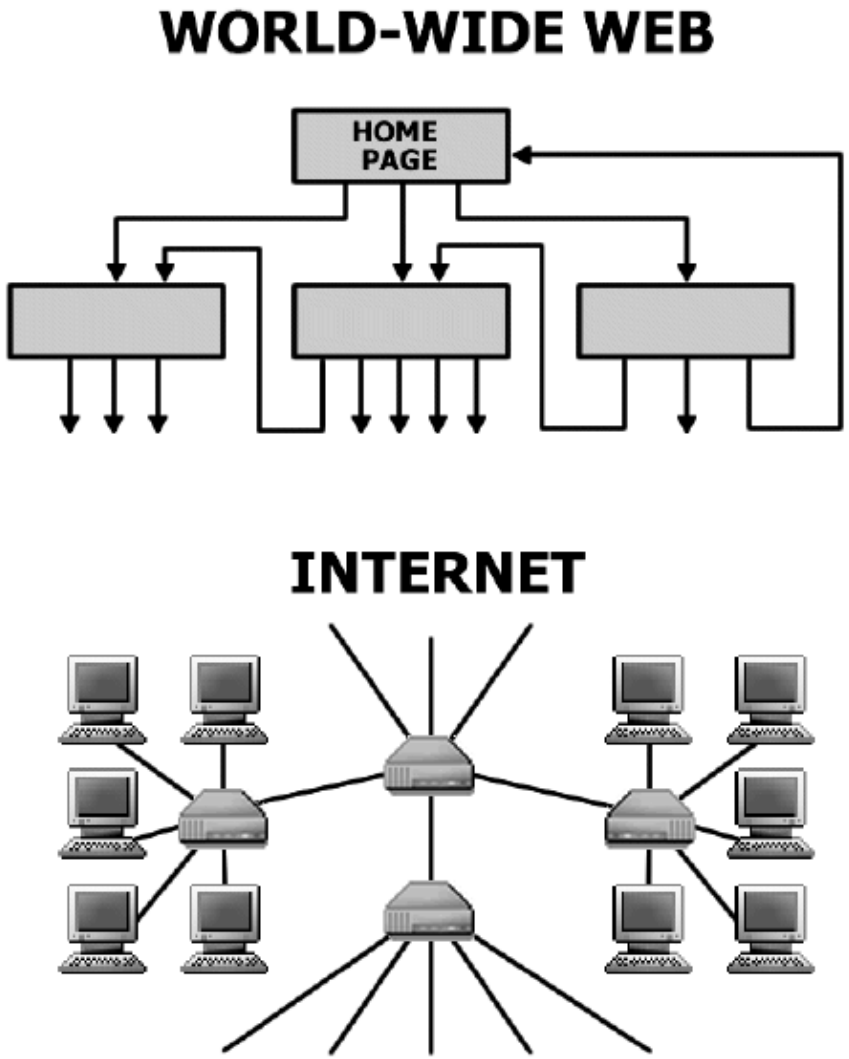


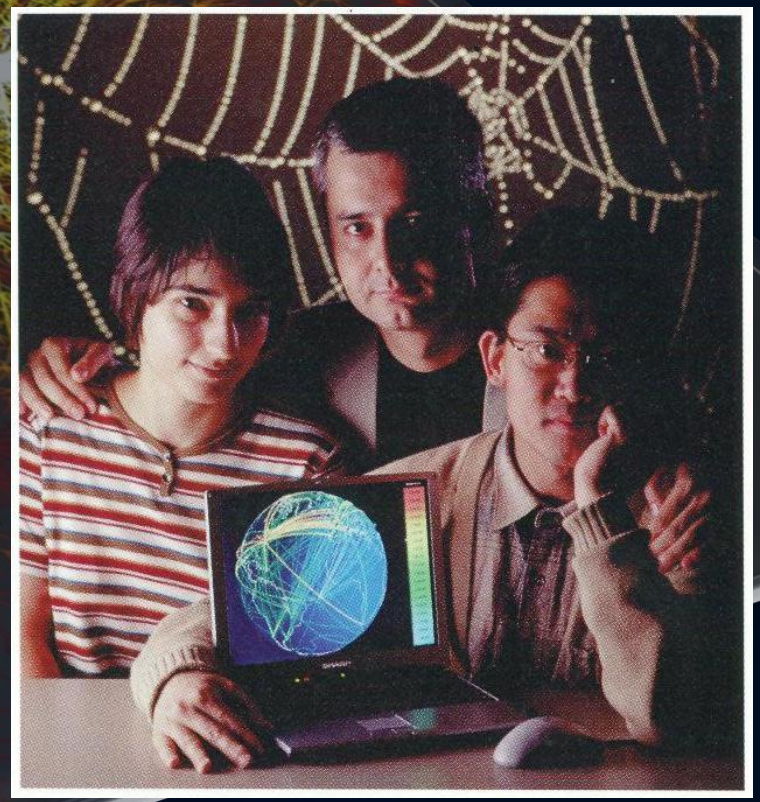
FIG. 1. Network structure of the World-Wide Web and the Internet. Upper panel: the nodes of the World-Wide Web are web documents, connected with directed hyperlinks (URLs). Lower panel: on the Internet the nodes are the routers and computers, the edges are the wires and cables that physically connect them. Figure courtesy of István Albert.

Beispiel eines komplexen Netzwerks

Wechselwirkungen und Struktur im Internet

Im Jahre 1999 untersuchten Albert-Laszlo Barabasi und Mitarbeiter die topologische Struktur des Internets (WWW)

A photo taken for Business 2.0 magazine in 2000, showing Reka Albert, Hawoong Jeong and Albert-Laszlo Barabasi, soon after our publication of the paper on the topology of the WWW.
(see http://networksciencebook.com/)



Viele der folgenden Abbildungen sind aus dem frei zugänglichen Buch „Network Science" von Albert-Laszlo Barabasi entnommen.
http://networksciencebook.com/

Netzwerk-Klassen

Aufgrund ihrer unterschiedlichen Eigenschaften unterscheidet man die folgenden Netzwerk-Klassen:

i. **Zufällige Netzwerke**

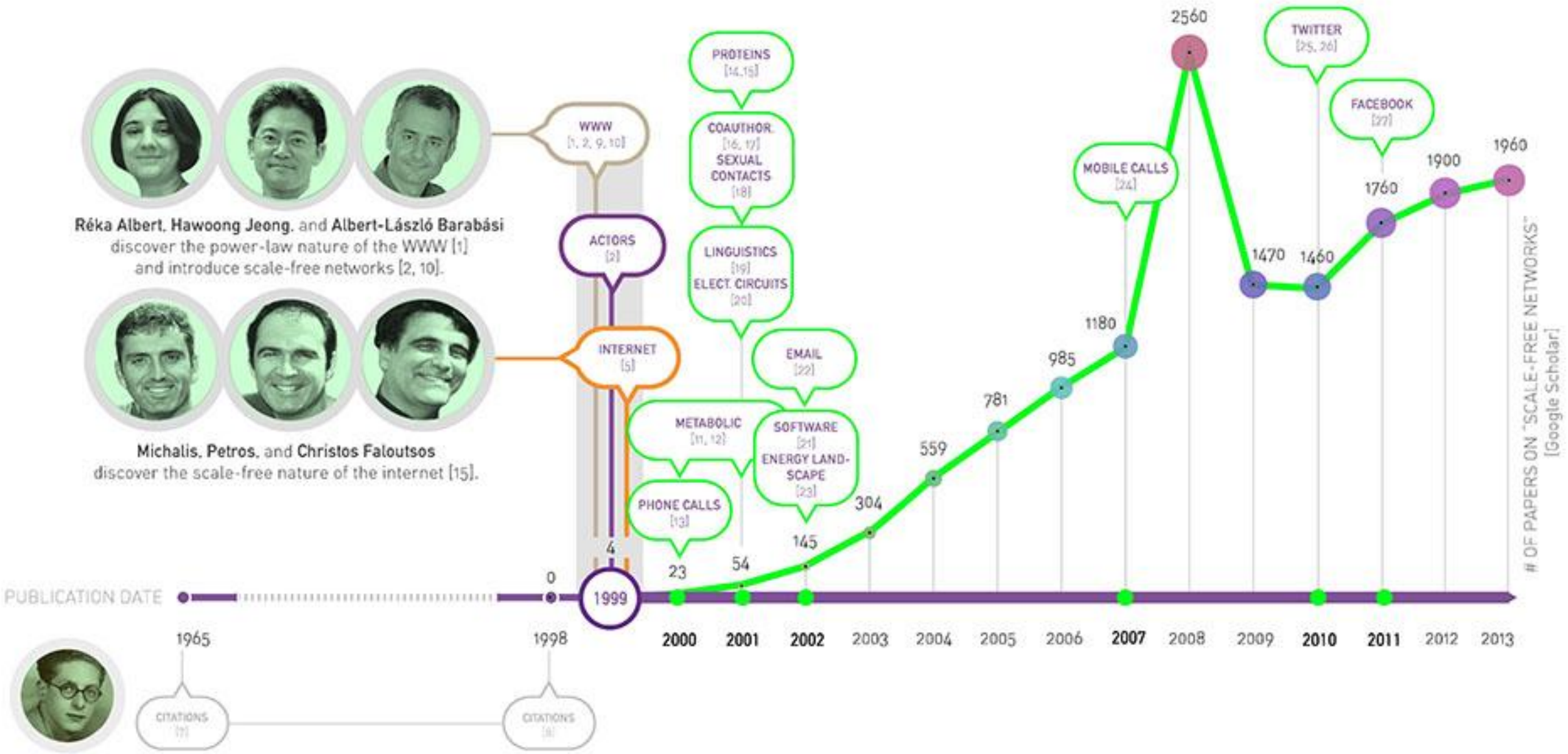
   Die einzelnen Kanten bei *zufälligen Netzwerken* werden von den Knoten (Spielern) nach einem rein zufälligen Muster ausgewählt.

ii. **„Kleine Welt"-Netzwerke (small-world networks)**

   i. „Kleine Welt"-Netzwerke zeichnen sich durch einen kleinen Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten des Netzwerkes und einem großen Wert des Clusterkoeffizienten aus.

iii. **Exponentielle Netzwerke**

iv. **Skalenfreie Netzwerke**

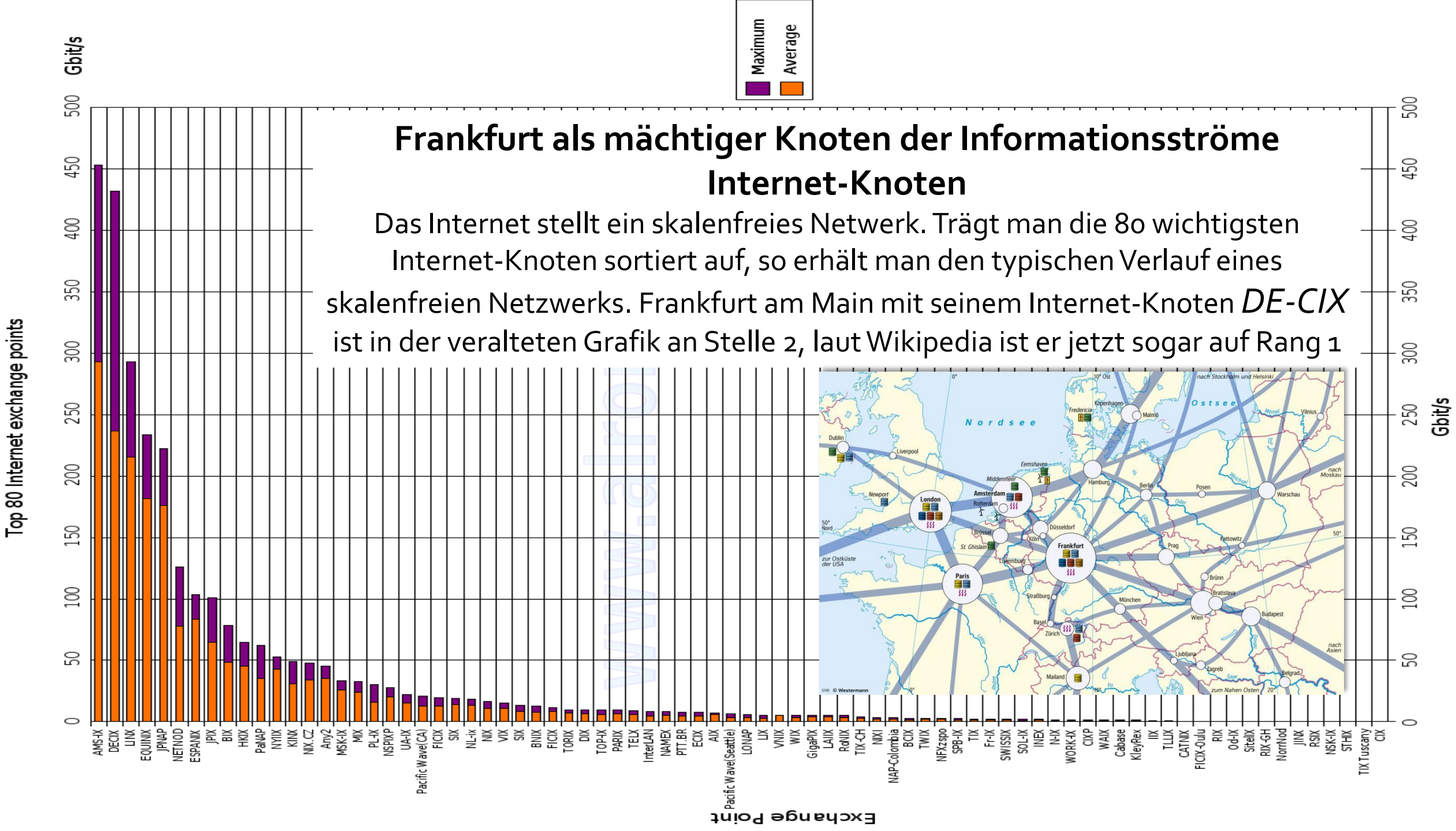


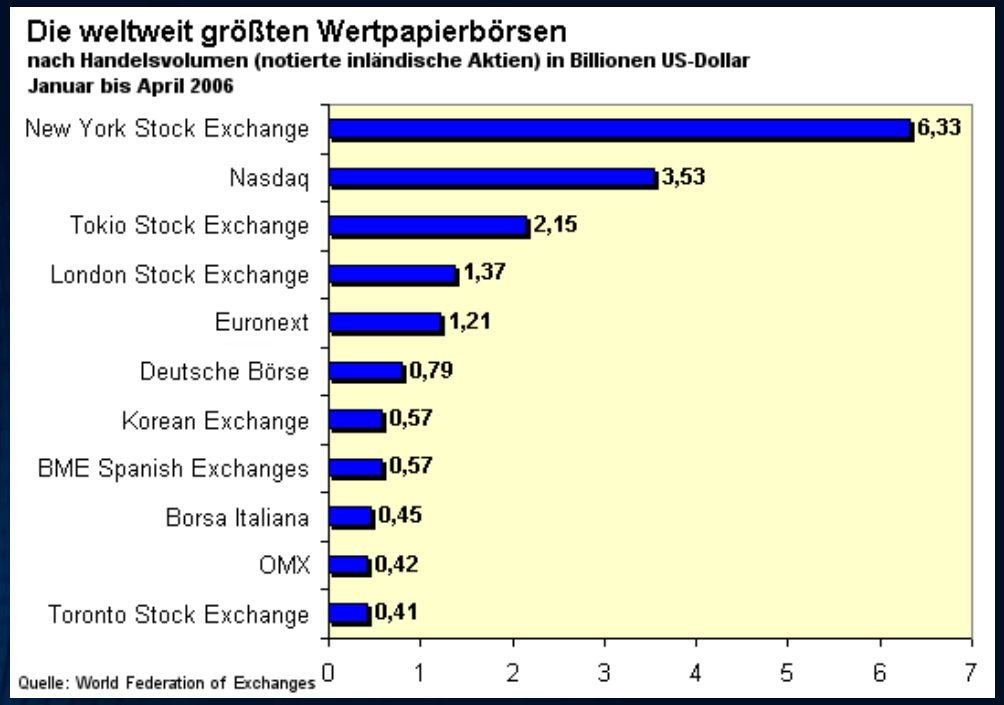
Skalenfreie Netzwerke auch in vielen weiteren sozio-ökonomischen und biologischen Systemen

Frankfurt als mächtiger Knoten der Informationsströme

Internet-Knoten

Das Internet stellt ein skalenfreies Netwerk. Trägt man die 80 wichtigsten Internet-Knoten sortiert auf, so erhält man den typischen Verlauf eines skalenfreien Netzwerks. Frankfurt am Main mit seinem Internet-Knoten *DE-CIX* ist in der veralteten Grafik an Stelle 2, laut Wikipedia ist er jetzt sogar auf Rang 1





Die Frankfurter Wertpapierbörse (FWB)

ist die bedeutendste deutsche Börse mit Sitz in Frankfurt am Main und einer der weltweit größten Handelsplätze für Wertpapiere. Betreiberin und Träger ist die Deutsche Börse AG. Im Jahr 2000 wurde die Neue Börse im Industriehof in Frankfurt am Main in einem neuen Gebäude bezogen. Im Jahr 2005 wurden an den deutschen Börsen rund 3,8 Billionen Euro umgesetzt. Dabei entfielen vom Gesamtumsatz rund 3,2 Billionen Euro auf Aktien, Optionsscheine und börsengehandelte Fonds und rund 615 Milliarden Euro auf Anleihen. Gemessen am Wert der Unternehmen, deren Aktien gehandelt werden, ist die Börse Frankfurt die drittgrößte Börse Europas (Stand 2022). Im Mai 2011 wurde der Parketthandel der Frankfurter Wertpapierbörse nach 425 Jahren eingestellt und ab dem 23. Mai 2011 auf die elektronische Handelsplattform Xetra übertragen.

Contact

Mailing list
Issue tracker
Source

Releases

Stable (notes)

3.5 — May 2025
Documentation

Latest (notes)

3.6 development
Documentation

Archive

NetworkX

Network Analysis in Python

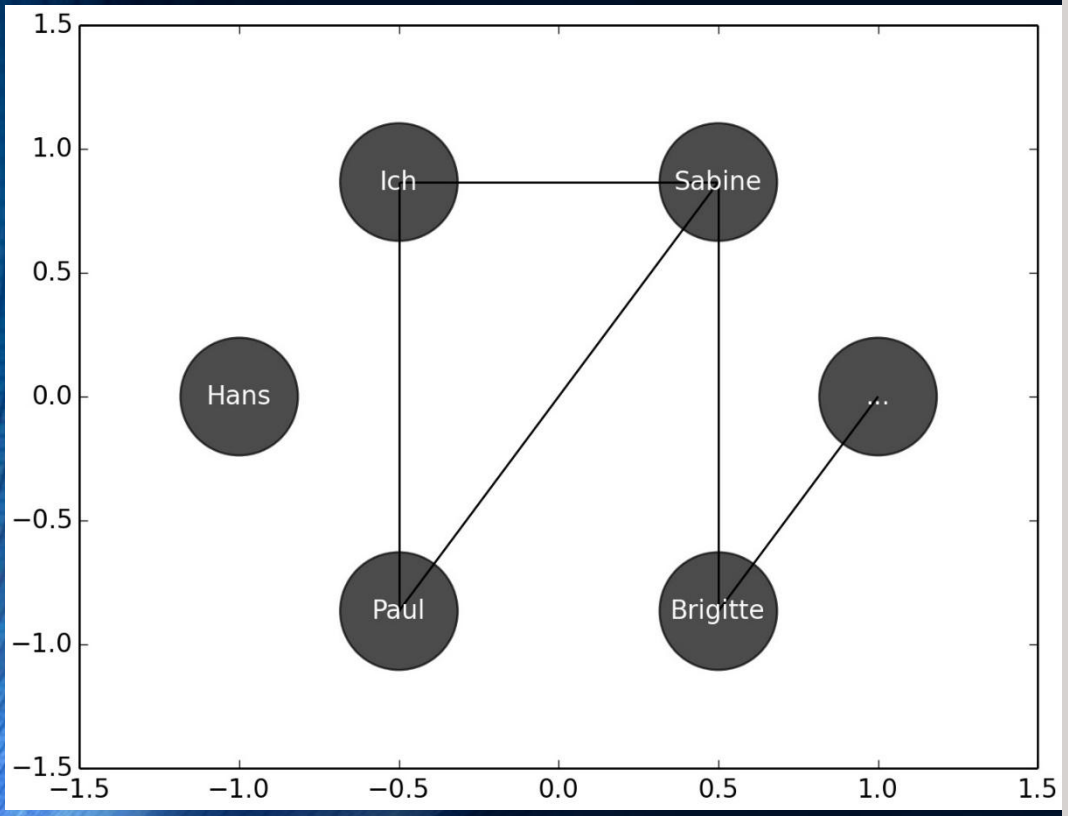
https://networkx.org/

NetworkX is a Python package for the creation, manipulation, and study of the structure, dynamics, and functions of complex networks.

Software for complex networks

- Data structures for graphs, digraphs, and multigraphs
- Many standard graph algorithms
- Network structure and analysis measures
- Generators for classic graphs, random graphs, and synthetic networks
- Nodes can be "anything" (e.g., text, images, XML records)
- Edges can hold arbitrary data (e.g., weights, time-series)
- Open source 3-clause BSD license
- Well tested with over 90% code coverage
- Additional benefits from Python include fast prototyping, easy to teach, and multi-platform

Simulation und Darstellung von komplexen Netzwerken mit Python




```python
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G=nx.Graph()

#Hinzufuegen von Knoten zum Netzwerk
G.add_nodes_from(["Ich","Paul","Brigitte","Sabine","Hans","..."])
G.add_edge("Ich","Paul")
G.add_edge("Ich","Sabine")
G.add_edge("Sabine","Brigitte")
G.add_edge("Sabine","Paul")
G.add_edge("Paul","Sabine")
G.add_edge("Brigitte","...")

#Erzeugung des Netzwerk-Bildes
graph_pos=nx.shell_layout(G)
#graph_pos=nx.shell_layout(G)
#graph_pos=nx.spring_layout(G)
nx.draw_networkx_nodes(G,graph_pos,node_size=3000,alpha=0.7,node_color="black")
nx.draw_networkx_edges(G,graph_pos)
nx.draw_networkx_labels(G, graph_pos,font_color="white")

#Speicherung des Bildes als .jpg
saveFig="./Netzwerk.jpg"
plt.savefig(saveFig, dpi=200,bbox_inches="tight",pad_inches=0.05,format="jpg")

plt.show()
```

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2025/26)

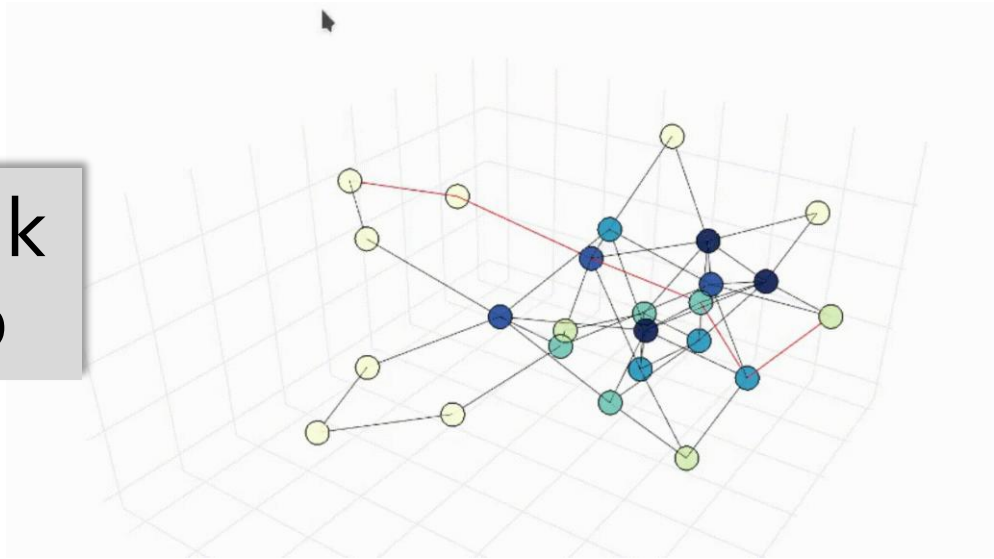
von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 22.08.2025

Zweiter Vorlesungsteil:

Einführung in die Theorie der komplexen Netzwerke

Jupyter Notebook
Network1.ipynb



Einführung

Eine bedeutende Einschränkung der deterministischen, evolutionären Spieltheorie ist deren zugrundeliegende Netzwerkstruktur (Netzwerktopologie). Die jeweiligen Spieler der betrachteten Population suchen in jeder Spielperiode einen neuen Spielpartner, wobei sie hierbei zufällig vorgehen (zufälliges Netzwerk) und vom Prinzip her mit jedem Spieler innerhalb der Population potenziell das zugrundeliegende Spiel spielen können (vollständig verbundenes Netzwerk). In Bimatrix Spielen suchen sich die Spieler der Teilpopulation A einen zufälligen Spielpartner aus Gruppe B (bzw. umgekehrt). Betrachtet man sich jedoch real existierende sozio-ökonomische Netzwerke, so zeigt sich, dass diese Annahme oft nicht erfüllt ist. Personen kennen oft nur eine Teilmenge von Spielern innerhalb der Population (kein vollständig verbundenes Netzwerk) und die Wahl der potenziellen Spielpartner erfolgt oft auch nicht nach zufälligen Mustern.

Wichtige Netzwerk charakterisierende Größen

Teil II.2 Einführung in die Theorie der komplexe Netzwerke - Mozilla Firefox

Teil II.2 Einführung in die T

https://itp.uni-frankfurt.de/~hanauske/VPSOC/T2/II-2.html

170%

Meistbesucht Getting Started

- **Der Knotengrad k_i**
  Der Knotengrad des Knotens i ist gleich der Anzahl der Kanten die der Knoten i besitzt. Bei gerichteten Netzwerken unterscheidet man zwischen dem eingehenden k_i^{in} und ausgehenden Knotengrad k_i^{out}. Bei gewichteten Netzwerken summiert man über die Zahlenfaktoren der gewichteten Kanten.
- **Der durchschnittliche Knotengrad $<k>$**
  Der durchschnittliche Knotengrad eines ungerichteten Netzwerks $<k>$ ist gegeben durch $<k> = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i = \frac{2L}{N}$, wobei $L =$ die gesamte Anzahl der Links (Kanten) des Netzwerks ist.
- **Die Nachbarschaftsmatrix (Adjazenzmatrix) A_{ij}**
  Die Nachbarschaftsmatrix des Netzwerkes beschreibt, welche Knoten des Graphen durch eine Kante verbunden sind. Zeigt eine Kante von Knoten j auf den Knoten i, dann ist der zugehörige Matrixwert $A_{ij} = 1$, wohingegen ein Eintrag $A_{ij} = 0$ bedeutet, dass keine Kante von j nach i zeigt. Bei ungerichteten Netwerken ist die Nachbarschaftsmatrix symmetrisch. Der Knotengrad k_i des Knotens i (bzw. k_i^{in} und k_i^{out} bei gerichteten Graphen) lässt sich mittels der Nachbarschaftsmatrix wie folgt bestimmen: $k_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}$ ($k_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}$ und $k_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^{N} A_{ji}$ bei gerichteten Graphen), wobei die gesamte Anzahl der Kanten sich wie folgt bestimmen lässt: $L = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}/2$ und die Größe N die Anzahl der Knoten des Netzwerkes bezeichnet. In gewichteten Netztwerken sind die Einträge der Nachbarschaftsmatrix nicht mehr auf Null und Eins beschränkt $A_{ij} = w_{ij}$.
- **Die Verteilungsfunktion der Knotengrade $P(k) = N(k)/N$**

Nachbarschaftsmatrix nicht mehr auf Null und Eins beschränkt $A_{ij} = w_{ij}$.

- **Die Verteilungsfunktion der Knotengrade $P(k) = N(k)/N$**
  Die Verteilungsfunktion der Knotengrade $P(k)$ (bzw. $N(k)$) ist eine wichtige das Netzwerk charakterisierende Größe. Sie gibt an, wie groß der Anteil an Netzwerkknoten mit Knotengrad k ist. Bei realen (endlichen) Netzwerken ist diese Funktion keine kontinuierliche, sondern eine diskrete Funktion $P(k) \approx P_k$. Bezeichnen wir mit N_k die Anzahl der Knoten mit Knotengrad k, so gilt $P_k = \frac{N_k}{N}$. Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ und der durchschnittliche Knotengrad berechnet sich wie folgt $<k> = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k$.
- **Die maximale Anzahl möglicher Kanten L_{max}**
  Die maximale Anzahl möglicher Kanten in einem ungerichteten Netzwerk (ein sogenannter 'complete graph') besitzt $L_{max} = \frac{N(N-1)}{2}$ Kanten. Viele real existierende Netzwerke sind dünnbesetzt ($L << L_{max}$).
- **Die kürzeste Verbindungstrecke zwischen zwei Knoten d_{ij}**
  Die Anzahl der Kanten die in einem Verbindungsweg von Knoten i zum Knoten j durchlaufen wird hängt vom gewÃ¤hten Pfad ab. Die kürzeste Verbindungstrecke d_{ij} kann hierbei im allgemeinen auf unterschiedlichen Wegen realisiert sein, wobei der Pfad keine Schleifen enthalten darf und sich nicht kreuzen darf. Die Anzahl der kürzeste Verbindungswege N_{ij} lässt sich mittels der Nachbarschaftsmatrix berechnen. Existieren z.B. Verbindungswege vom Knoten i zum Knoten j mit $d_{ij} = 2$, so muss die Anzahl der kürzeste Verbindungswege $N_{ij} = \sum_{l=1}^{N} A_{il}A_{jl} \geq 1$ sein.
- **Der Clusterkoeffizient C_i bzw. C**
  Der Clusterkoeffizient gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass zwei nächste Nachbarn eines Knotens

berechnen. Existieren z.B. Verbindungswege vom Knoten i zum Knoten j mit $a_{ij} = 2$, so muss die Anzahl der kürzeste Verbindungswege $N_{ij} = \sum_{l=1}^{N} A_{il} A_{jl} \geq 1$ sein.

- **Der Clusterkoeffizient C_i bzw. C**

  Der Clusterkoeffizient gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass zwei nächste Nachbarn eines Knotens ebenfalls nächste Nachbarn untereinander sind. Für einen speziellen Knoten i berechnet er sich mittels: $C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i-1)}$, wobei L_i die Anzahl der Kanten darstellt, die die nächsten Nachbarn des Knoten i miteinander verbinden. Der globale Wert C des Clusterkoeffizienten ist der Mittelwert aller C_i's ($C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} C_i$) und stellt demnach eine Art von der Enge der Nachbarschaftsbeziehungen des Netzwerks dar.

- **Durchnittliche Anzahl der m-nächsten Nachbarn z_m**

  z_1 stellt hierbei den Wert der mittleren Knotenzahl des Netzwerkes dar ($z_1 = \langle k \rangle$) und z_2 die mittlere Anzahl zweiter-nächster Nachbarn ($z_2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle$, siehe z.B. Claudius Gros, "Complex and Adaptive Dynamical Systems, a Primer", S:18).

- **Durchmesser des Netzwerks l**

  Der Durchmesser des Netzwerks gibt die maximale kürzeste Kantenlänge zwischen zwei beliebigen Knoten des Netzwerkes an: $l = \log(N/z_1)/\log(z_2/z_1) + 1$, wobei N die Anzahl der Knoten des Netzwerkes darstellt (siehe z.B. Claudius Gros, "Complex and Adaptive Dynamical Systems, a Primer", S:20). Der Wert l wird auch in einigen Lehrbüchern als $d_{\max}$ bezeichnet (siehe Albert-Laszlo Barabasi, Network science, Chapter 2 *Graph Theory*).

- **Größter verbundener Knotenclusters N_G (Giant component, Hub)**

miteinander verbunden. Der globale Wert C des Clusterkoeffizienten ist der Mittelwert aller C_i's ($C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i$) und stellt demnach eine Art von der Enge der Nachbarschaftsbeziehungen des Netzwerks dar.

- **Durchnittliche Anzahl der m-nächsten Nachbarn z_m**
  z_1 stellt hierbei den Wert der mittleren Knotenzahl des Netzwerkes dar ($z_1 = \langle k \rangle$) und z_2 die mittlere Anzahl zweiter-nächster Nachbarn ($z_2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle$, siehe z.B. Claudius Gros, "Complex and Adaptive Dynamical Systems, a Primer", S:18).
- **Durchmesser des Netzwerks l**
  Der Durchmesser des Netzwerks gibt die maximale kürzeste Kantenlänge zwischen zwei beliebigen Knoten des Netzwerkes an: $l = \log(N/z_1)/\log(z_2/z_1) + 1$, wobei N die Anzahl der Knoten des Netzwerkes darstellt (siehe z.B. Claudius Gros, "Complex and Adaptive Dynamical Systems, a Primer", S:20). Der Wert l wird auch in einigen Lehrbüchern als $d_{\max}$ bezeichnet (siehe Albert-Laszlo Barabasi, Network science, Chapter 2 *Graph Theory*).
- **Größter verbundener Knotenclusters N_G (Giant component, Hub)**
  Die Anzahl der Knoten im größten verbundenen Knotenclusters des Netzwerkes wird mit N_G bezeichnet.

Diese und weitere graphentheoretischen Größen (Number of Shortest Parths Between Two Nodes, Shortest Path, Average Path Length, ...) sind in Albert-Laszlo Barabasi, Network science, Chapter 2 *Graph Theory* zu finden.

Zufällige Netzwerke

Verteilungsfunktion der Knotengrade
P(k)
bzw. N(k):=N*P(k)

VI. CLASSICAL RANDOM GRAPHS, THE ERDÖS-RÉNYI MODEL

The simplest and most studied network with undirected edges was introduced by Erdös and Rényi (ER model) [77,78]. In this network:

(i) the total number of vertices, N, is fixed;

(ii) the probability that two arbitrary vertices are connected equals p.

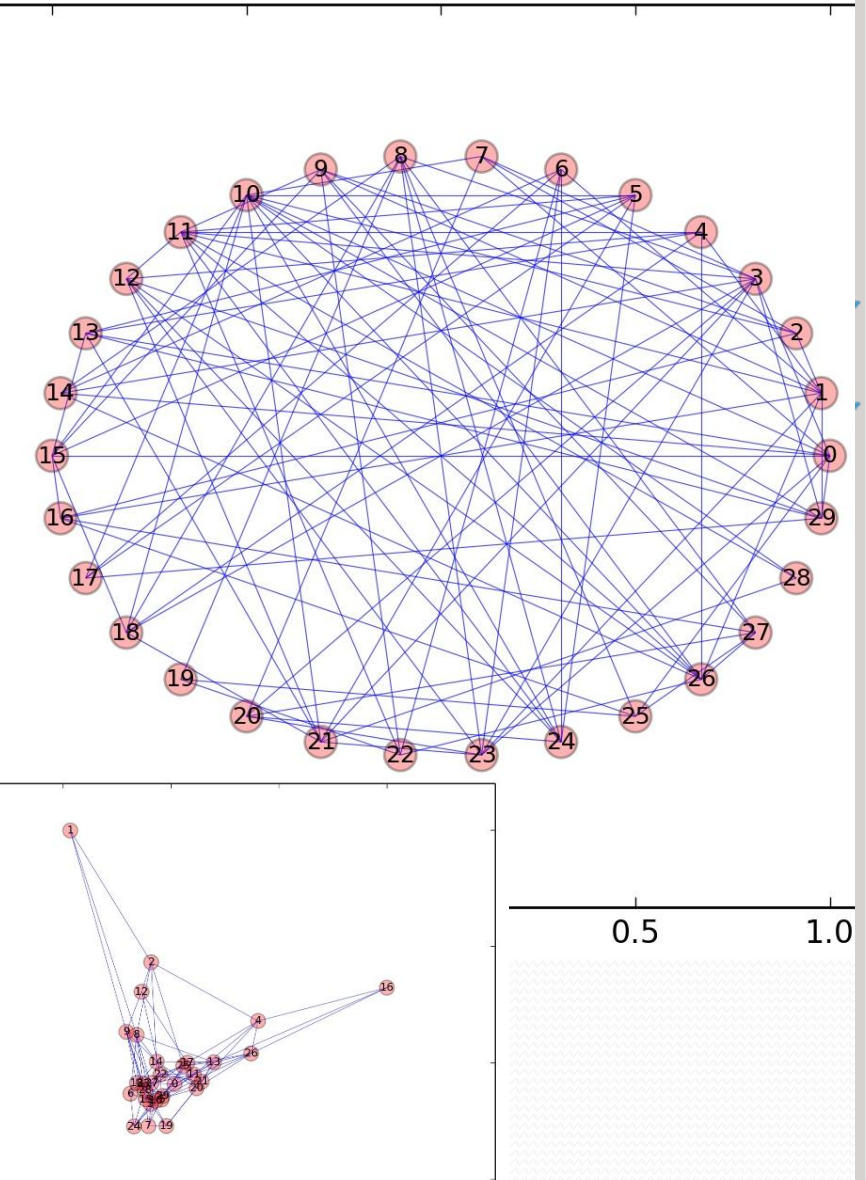
One sees that, on average, the network contains $pN(N-1)/2$ edges. The degree distribution is binomial,

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}, \qquad (4)$$

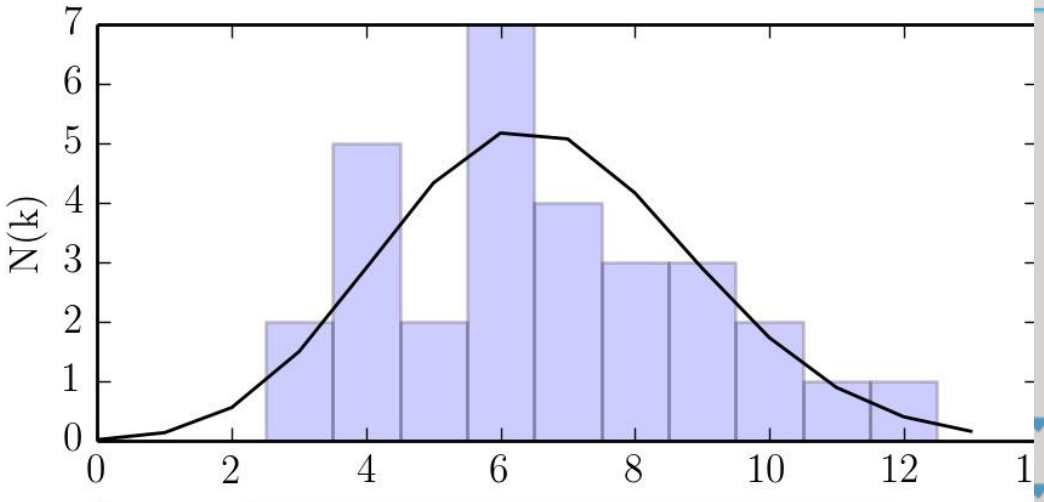
so the average degree is $\overline{k} = p(N-1)$. For large N, the distribution, Eq. (4) takes the Poisson form,

$$P(k) = e^{-\overline{k}}\, \overline{k}^{\,k} / k! . \qquad (5)$$

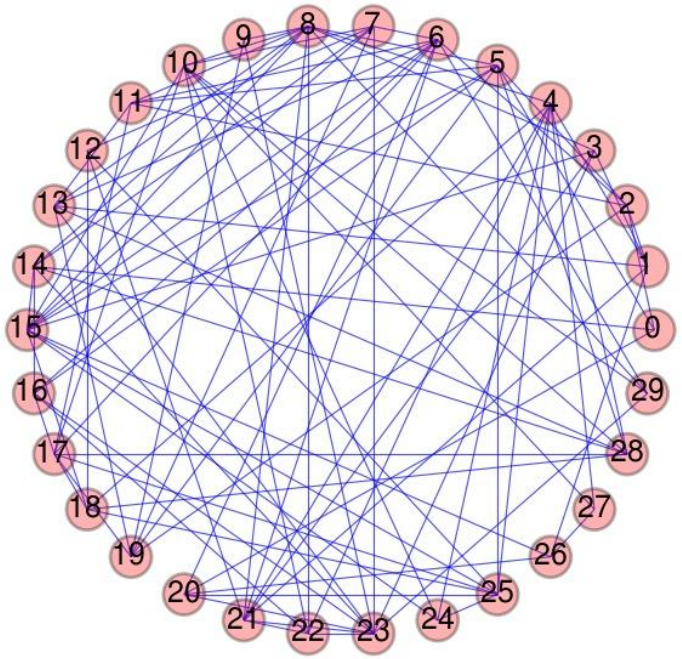
Python (Version 2)




```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
from random import randint
from random import uniform

G=nx.Graph()

#Allgemeine Festlegungen des Netzwerks
NKn =30 #Anzahl der Knoten (vertices)
anzedges=100 #Gesamte Anzahl der im Netzwerk bestehenden Kanten (links, connections)

#Hinzufuegen der Knoten zum Netzwerk
G.add_nodes_from(range(0,NKn,1))

#Erzeugung der Kanten des Netzwerkes (zufaellig anzedges-Kanten zwischen den NKn-Knoten erzeugen)
links=0
while links < anzedges:
  KnA = randint(0, NKn-1)
  KnB = randint(0, NKn-1)
  if KnA != KnB and list(G.edges()).count((KnA,KnB))==0 and list(G.edges()).count((KnB,KnA))==0:
    G.add_edge(KnA,KnB)
    links=links+1

#Erzeugung des Netzwerk-Bildes
node_size=150
node_alpha=0.3
node_color="red"
edge_tickness=0.4
edge_alpha=0.7
edge_color="blue"
node_text_size=9
text_font="sans-serif"
graph_pos=nx.shell_layout(G)
#graph_pos=nx.spectral_layout(G)
#graph_pos=nx.spring_layout(G)
nx.draw_networkx_nodes(G,graph_pos,node_size=node_size,alpha=node_alpha, node_color=node_color)
nx.draw_networkx_edges(G,graph_pos,width=edge_tickness, alpha=edge_alpha,edge_color=edge_color)
nx.draw_networkx_labels(G, graph_pos,font_size=node_text_size,font_family=text_font)


#Speicherung des Bildes als .jpg und .pdf Datei
saveFig="./Netzwerk.jpg"
```

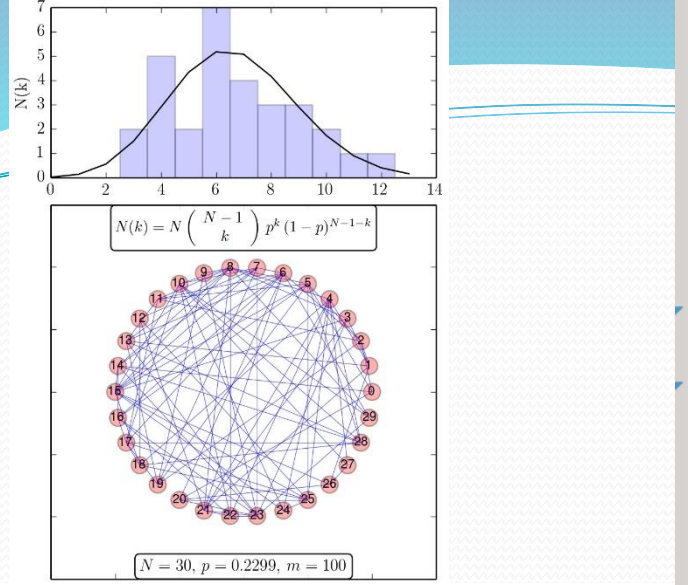


$$N(k) = N \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$



$$N = 30,\ p = 0.2299,\ m = 100$$

```python
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
from random import randint
from random import uniform
import numpy as np
import matplotlib
import matplotlib.gridspec as gridspec
from matplotlib.ticker import NullFormatter

nullfmt = NullFormatter()  # Keine Labels im Netzwerkplot

#Von https://de.wikibooks.org/wiki/Algorithmensammlung:_Statistik:_Binomialkoeffizient
def binomialkoeffizient(n, k):
    if k == 0: return 1
    if 2*k > n:
        ergebnis = binomialkoeffizient(n, n-k)
    else:
        ergebnis = n-k+1
        for i in range(2, k+1):  # i in [2; k]
            ergebnis *= (n-k+i)  # Selbstmultiplikation
            ergebnis /= i  # Achtung: Ergebnis ist eine Kommazahl!
    return int(ergebnis)

#Analytische Verteilungsfunktion eines zufaelligen Netzwerkes
def P(n,kmin,kmax,p):
    ergebnis=[]
    for k in range(kmin,kmax,1):
      ergebnis.append(binomialkoeffizient(n-1,k)*p**k*(1-p)**(n-1-k))
    return ergebnis

#plot settings
params = {
    'figure.figsize'    : [5, 7.2],
    'text.usetex'       : True,
}
matplotlib.rcParams.update(params)

#Grid
plt.figure(0)
gs = gridspec.GridSpec(2, 1, height_ratios=[1,2.2], hspace=0.1)
ax1 = plt.subplot(gs[0])
ax2 = plt.subplot(gs[1])
```



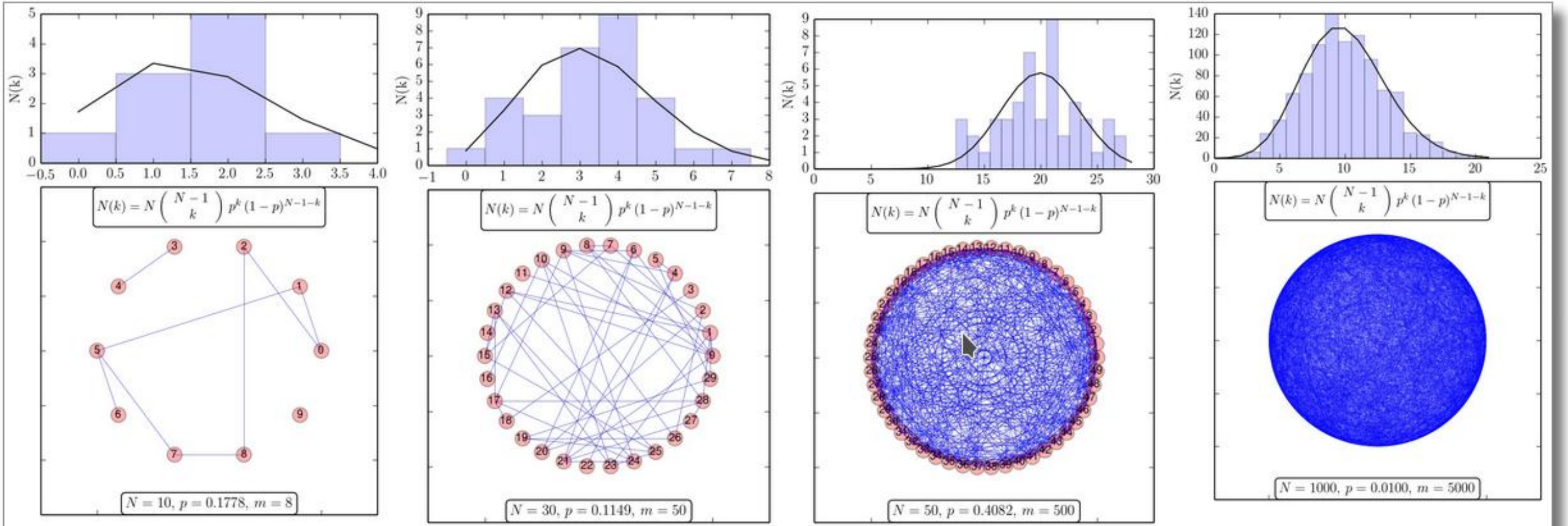

```
#Erzeugung des Netzwerk-Bildes
node_size=150
node_alpha=0.3
node_color="red"
edge_tickness=0.4
edge_alpha=0.7
edge_color="blue"
node_text_size=9
text_font="sans-serif"
graph_pos=nx.shell_layout(G)
nx.draw_networkx_nodes(G,graph_pos,node_size=node_size,alpha=node_alpha, node_color=node_color)
nx.draw_networkx_edges(G,graph_pos,width=edge_tickness, alpha=edge_alpha,edge_color=edge_color)
nx.draw_networkx_labels(G, graph_pos,font_size=node_text_size,font_family=text_font)

# Plotten der Netzwerkeigenschaften in das Bild
roundp="%.4f"%p
textstr1=r'$N(k) = N \left( \begin{array}[c]{cc} N -1  \\ \ k \end{array} \right)\, p^k\,(1-p)^{N-1-k} \,\,$'
textstr2=r'$N='+str(NKn)+',\,p='+roundp+',\,m='+str(anzedges)+'$'
props = dict(boxstyle='round', facecolor='white', alpha=0.92)
plt.text(0, 1.46, textstr1, fontsize=11, verticalalignment='top', horizontalalignment='center', bbox=props)
plt.text(0, -1.46, textstr2, fontsize=12, verticalalignment='bottom', horizontalalignment='center', bbox=props)

#Speicherung des Bildes als .jpg und .pdf Datei
saveFig="./Netzwerk.jpg"
plt.savefig(saveFig, dpi=200,bbox_inches="tight",pad_inches=0.05,format="jpg")
saveFig="./Netzwerk.pdf"
plt.savefig(saveFig,bbox_inches="tight",pad_inches=0.05,format="pdf")
plt.show()
```

```
#Beginn des eigentlichen Python Programms "Zufaelliges Netzwerk"
G=nx.Graph()
#Allgemeine Festlegungen des Netzwerks
NKn =30 #Anzahl der Knoten (vertices)
anzedges=100 #Gesamte Anzahl der im Netzwerk bestehenden Kanten (links, connections)

#Hinzufuegen der Knoten zum Netzwerk
G.add_nodes_from(range(0,NKn,1))

#Erzeugung der Kanten des Netzwerkes (zufaellig anzedges-Kanten zwischen den NKn-Knoten erzeugen)
links=0
while links < anzedges:
  KnA = randint(0, NKn-1)
  KnB = randint(0, NKn-1)
  if KnA != KnB and list(G.edges()).count((KnA,KnB))==0 and list(G.edges()).count((KnB,KnA))==0:
    G.add_edge(KnA,KnB)
    links=links+1

#Liste der Knotengrade
degree_sequence=sorted([d for n,d in G.degree()],reverse=True) # degree sequence
maxk=np.max(degree_sequence)

#Berechnung der Warscheinlichkeit das Knoten KnA mit KnB verbunden ist
p=(2*anzedges/float(NKn*(NKn-1)))

#Erzeugung des Bildes der Verteilungsfunktion der Knotengrade N(k) (analytisch,simulativ)
ax1.plot(range(0,int(maxk+2),1),np.array(P(NKn,0,int(maxk+2),p))*NKn, linewidth=1, linestyle='-', c="black")
ax1.hist(degree_sequence,bins=range(0,int(maxk+2),1), align="left" ,histtype='bar', color="blue", alpha=0.2)


#Achsenbeschriftung
ax1.set_ylabel(r'$\rm N(k)$')
ax2.yaxis.set_major_formatter(nullfmt)
ax2.xaxis.set_major_formatter(nullfmt)
```

Python (Version 3)

Python Programm *RandomNetwork.py*

II.2.1 *Zufällige Netzwerke (Random Networks)*



Ergebnisse des Python Skriptes RandomNetwork.py: Zufallsgraph und die zugehörige Verteilungsfunktion der Knotengrade (schwarze Kurve: analytische Verteilung).

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2025/26)

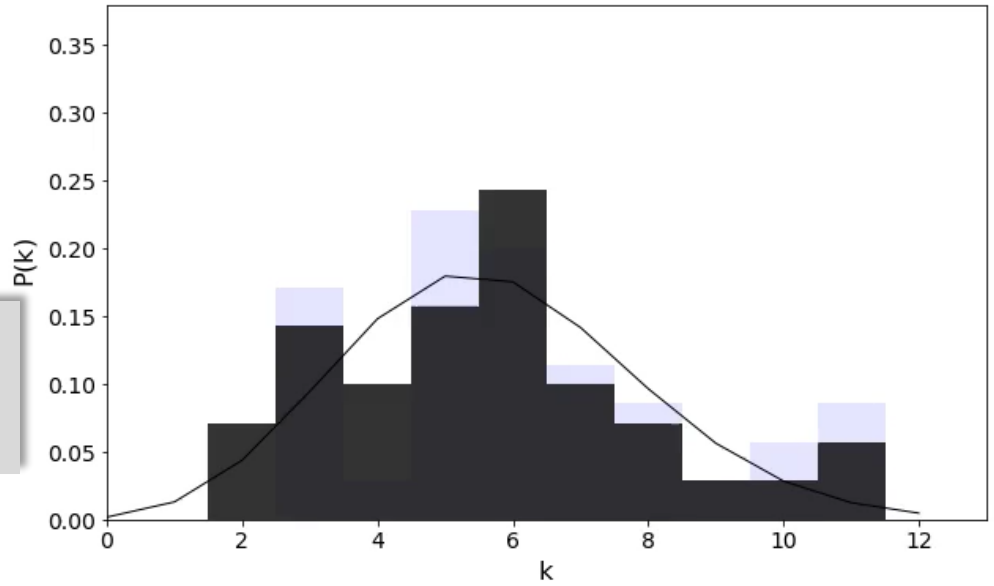
von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 22.08.2025

Zweiter Vorlesungsteil:

Zufällige komplexe Netzwerke (random networks)

Jupyter Notebook
RandomNetworks.ipynb



Einführung

Aufgrund ihrer unterschiedlichen Eigenschaften unterscheidet man die folgenden Netzwerk-Klassen: Zufällige Netzwerke (Random Networks: Die einzelnen Kanten bei zufälligen Netzwerke werden von den Knoten (Spielern) nach einem rein zufälligen Muster ausgewählt), Kleine Welt-Netzwerke (Small World Networks, Kleine Welt-Netzwerke zeichnen sich durch einen kleinen Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten des Netzwerkes und einem großen Wert des Clusterkoeffizienten aus), Exponentielle Netzwerke (Exponential Networks) und Skalenfreie Netzwerke (Scale-Free Networks).

Bei einigen Modellnetzwerken können analytische Ergebnisse gewonnen werden. Im Folgenden betrachten wir die Klasse der zufälligen Netzwerke. Die einzelnen Kanten bei zufälligen Netzwerken werden von den Knoten (Spielern) nach einem rein zufälligen Muster ausgewählt. Im Erdos-Renyi Modell (Erdos and Renyi, 1959) werden N Knoten zufällig mit L ungerichteten Kanten verbunden. Die Wahrscheinlichkeit p, dass ein Knoten mit dem anderen verbunden ist demnach $p = \frac{2L}{N(N-1)}$. Die Verteilungsfunktion der Knotengrade $P(k)$ ist binomialverteilt:

$$P(k) = N(k)/N = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$

Für große N geht diese Verteilung in die folgende Poisson Verteilungsfunktion über

$$P(k) = \frac{e^{-\bar{k}} \bar{k}^k}{k!} \quad ,$$

Python Programm VPSOC-RandomNetwork_evol.py

Die einzelnen Kanten bei zufälligen Netzwerke werden von den Knoten (Spielern) nach einem rein zufälligen Muster ausgewählt. Im Erdos-Renyi Modell (Erdos and Renyi, 1959) werden N Knoten zufällig mit m ungerichteten Kanten verbunden. Die Wahrscheinlichkeit p, das ein Knoten mit dem anderen verbunden ist demnach $p = 2m/(N(N-1))$. Die Verteilungsfunktion der Knotengrade $P(k)$ ist binomialverteilt:

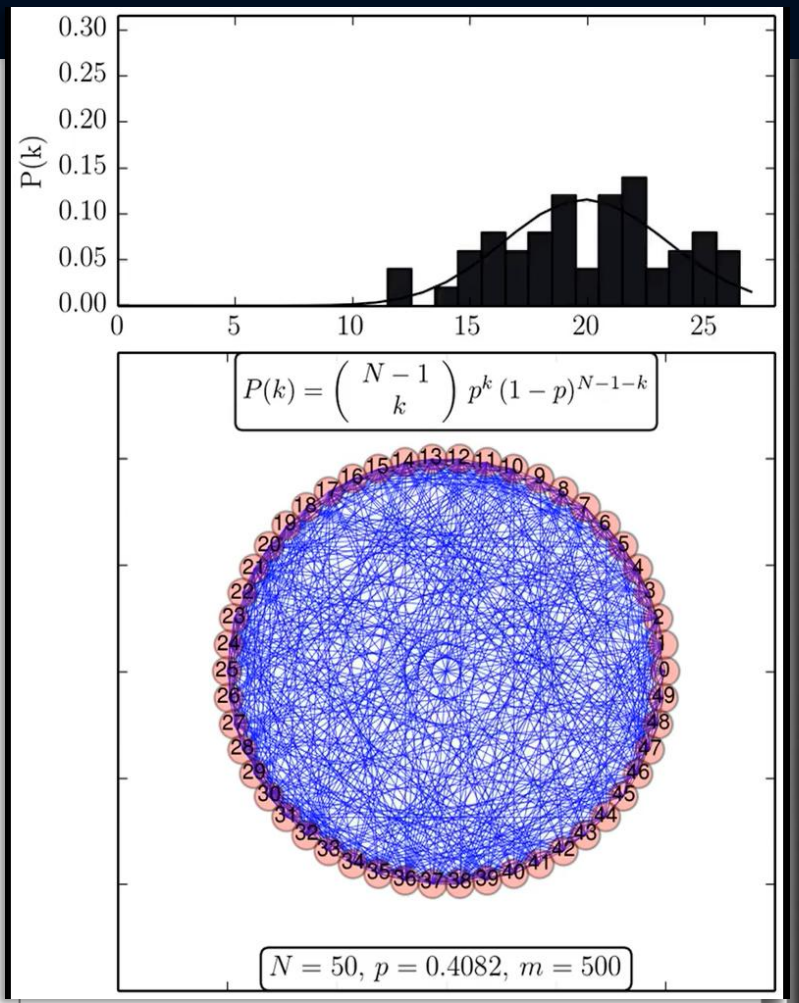
$$P(k) = N(k)/N = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$

Für große N geht diese Verteilung in die folgende Poisson Verteilungsfunktion über

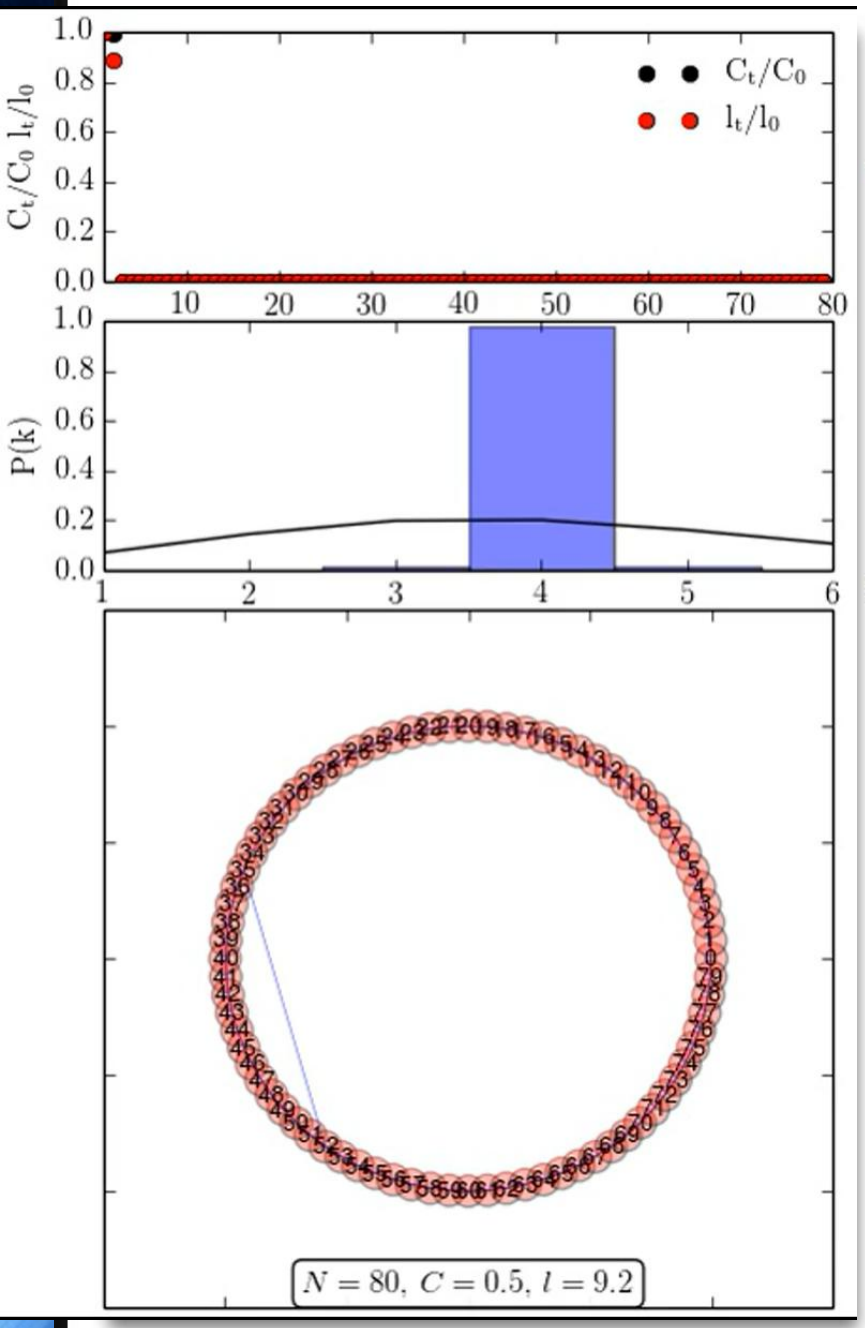
$$P(k) = \frac{e^{-\bar{k}}\,\bar{k}^k}{k!} \quad ,$$

wobei $\bar{k} = \langle k \rangle = p\,(N-1)$ der mittlere Knotengrad im Netzwerk ist (siehe Abb. 3.4 in Chapter 3: Albert-Laszlo Barabasi, Network Science). Die oberen Abbildungen zeigen Ergebnisse des Python Skriptes (Python Skript: RandomNetwork.py) welches einen Zufallsgraph mit N-Knoten und m-Kanten und die zugehörige Verteilungsfunktion $N(k) = N\,P(k)$ der Knotengrade darstellt. Die einzelnen blauen Kästchen des Balkendiagramms stellen die spezifische, zufällig erzeugte Realisierung des Zufallsgraphen dar, wohingegen die schwarze Kurve die analytische Binomialverteilung zeigt. Mittelt man über die einzelnen Verteilungsfunktionen P(k) mehrerer zufälliger Netzwerke, erzeugt man ein Ensemble-Mittelwert der möglichen Realisierungen des Zufallsgraphen. In der nebenstehenden rechten Abbildung ist eine solche Mittelung anhand einer Animation veranschaulicht. Man erkennt deutlich, dass die über mehrere zufällige Netzwerke gemittelte Verteilung (dunkel graue Kästchen) sich der analytische Verteilung (schwarze Kurve) immer mehr annähert.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des Netzwerkes ist die relative Größe des größten verbundenen Knotenclusters (Giant component, Hub) N_G/N. Zufällige Netzwerke mit kleinem mittlere Knotengrad $\langle k \rangle < 1$ besitzen keine



Mittelt man über die einzelnen Verteilungsfunktionen P(k) mehrerer zufälliger Netzwerke so ergeben sich die analytisch ermittelten Verteilungsfunktionen (Python Skript VPSOC-RandomNetwork_evol.py).



II.2.2 *Kleine Welt* Netzwerke (*Small-World Networks*)

Kleine Welt-Netzwerke zeichnen sich durch einen kleinen Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten des Netzwerkes und einem großen Wert des Clusterkoeffizienten aus. Ein einfaches Modell welches den Übergang von einem Netzwerk mit regulärer Struktur (Gitter-ähnlicher Struktur) über ein *kleines Welt* Netzwerk hin zu einem zufälligen Netzwerk veranschaulicht, wurde von Watts und Strogatz im Jahre 1998 vorgestellt: Im einfachsten Fall startet man hierbei mit einem eindimensionalen Gitter-Netzwerk mit N Knoten, wobei jeder Knoten mit seinen K-nächsten Nachbarn (hier speziell K=2) verbunden ist. Nun löscht man mit der Wahrscheinlichkeit p jede der existierenden Verbindungen (Kanten) und stellt eine neue Kante im Netzwerk in zufälliger Weise her. Für p=0 bleibt die ursprüngliche Gitterstruktur erhalten und für p=1 erzeugt man ein vollständig zufälliges Netzwerk. Watts und Strogatz konnten in ihrem Modell zeigen, dass man schon für kleine p ($0 < p << 1$) ein *kleines Welt*-Netzwerk erzeugt, das durch einen kleinen Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten und einem großen Wert des Clusterkoeffizienten gekennzeichnet ist.

Die linke, nebenstehende Abbildung zeigt eine Animation eines leicht abgeänderten Watts-Strogatz Modells. Zum Zeitpunkt t=0 startet man wiederum mit einer regulären Gitterstruktur (hier N=80, K=2). Zu jedem folgenden Zeitpunkt wird nun zufällig eine Kante im Netzwerk ausgewählt, die in zufälliger Weise neu angeordnet wird. Im Laufe der Zeitentwicklung erkennt man, dass sich die Verteilungsfunktion der Knotengrade immer mehr an die binomialverteilte Funktion des zufälligen Netzwerks annähert (P(k), siehe schwarze Kurve im mittleren Diagramm in der linken Animation). Im oberen Diagramm der linken Animation ist hingegen der normierte Wert des Clusterkoeffizienten (C_t/C_0, schwarze Punkte) und der normierte Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten des Netzwerkes (l_t/l_0, rote Punkte) als Funktion des Iterationszeitpunktes t dargestellt. Man erkennt, dass sich l_t schon nach wenigen Iterationsschritten schnell verkleinert - im Bereich $5 < t < 20$ hat das Netzwerk eine klare *Kleine Welt*-Struktur. Für große Zeiten näher sich das Netzwerk immer weiter einem zufälligen Netzwerk an.

Neben den hier dargestellten Netzwerkeigenschaften von zufällige und klenen Welt Netzwerke findet sich eine ausührliche Darstellung in Chapter 3: Albert-Laszlo Barabasi, Network Science. In der Section 3

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

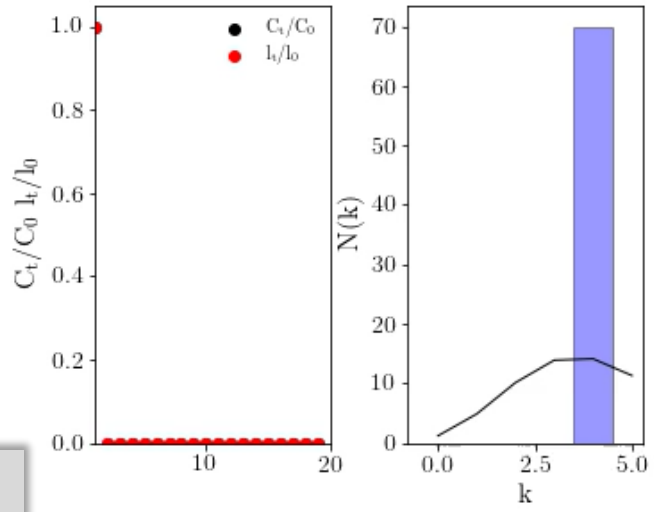
(Wintersemester 2025/26)

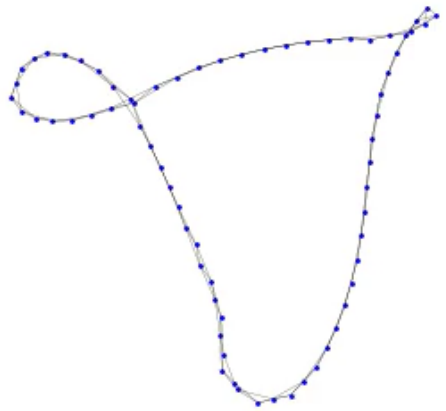
von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 22.08.2025

Zweiter Vorlesungsteil:

Kleine Welt Netzwerke (small world networks)





Einführung

Jupyter Notebook
SmallWorldNetworks.ipynb

Aufgrund ihrer unterschiedlichen Eigenschaften unterscheidet man die folgenden Netzwerk-Klassen: Zufällige Netzwerke (Random Networks: Die einzelnen Kanten bei zufälligen Netzwerke werden von den Knoten (Spielern) nach einem rein zufälligen Muster ausgewählt), Kleine Welt-Netzwerke (Small World Networks, Kleine Welt-Netzwerke zeichnen sich durch einen kleinen Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten des Netzwerkes und einem großen Wert des Clusterkoeffizienten aus), Exponentielle Netzwerke (Exponential Networks) und Skalenfreie Netzwerke (Scale-Free Networks). Bei einigen Modellnetzwerken können analytische Ergebnisse gewonnen werden. Im Folgenden betrachten wir die Klasse der kleinen Welt Netzwerke.

Network Science

by Albert-László Barabási

http://networksciencebook.com/

Start Reading

English Русский Magyar فارسی 日本語

Zufällige Neztwerke (Section 3)
http://networksciencebook.com/chapter/3

Section 3.2
The Random Network Model
Wie erzeugt man mittels eines mathematischen Algorithmus ein zufälliges Netzwerk (siehe Box 3.1)

Section 3.4
Degree Distribution
Wie sieht die Verteilungsfunktion der Knotengrade in zufälligen Netzwerken aus (siehe Image 3.4 Binomial vs. Poisson Degree Distribution)

Section 3.5
Real Networks are Not Poisson
Vergleich: Real existierende Netzwerke <-> Zufällige Netzwerke (siehe Image 3.6 Degree Distribution of Real Networks)

Section 3.6
The Evolution of a Random Network
Relativen Größe des Hubs (grösster verbundener Knotencluster) hängt von dem durchschnittlichen Knotengrad des Netzwerkes ab.
Definition von unterschiedlichen Regimen in zufälligen Netzwerken (subcritical, supercritical, fully connected) (siehe Image 3.7 Evolution of a Random Network)

Section 3.7
Real Networks are Supercritical
Sind real existierende Netzwerke subcritical, supercritical oder fully connected? (siehe Table 3.1 Are Real Networks Connected? und Image 3.9 Most Real Networks are Supercritical)

Section 3.8
Small Worlds
Definition der kleinen Welt Eigenschaft in komplexen Netzwerken "In the language of network science the small world phenomenon implies that the distance between two randomly chosen nodes in a network is short." Mittlerer Abstand zwischen zwei Knoten im Netzwerk <d> bestimmt die Eigenschaft von kleinen Welt Netzwerken (siehe Image 3.10 Six Deegree of Separation and Image 3.11 Why are Small Worlds Surprising? und Table 3.2 Six Degrees of Separation)

Section 3.9
Clustering Coefficient
Der Clusterkoeffizient in real existierenden und zufälligen Netzwerken (siehe Image 3.13 Clustering in Real Networks und Box 3.9 Watts-Strogatz Model)

Random Networks: a Brief History

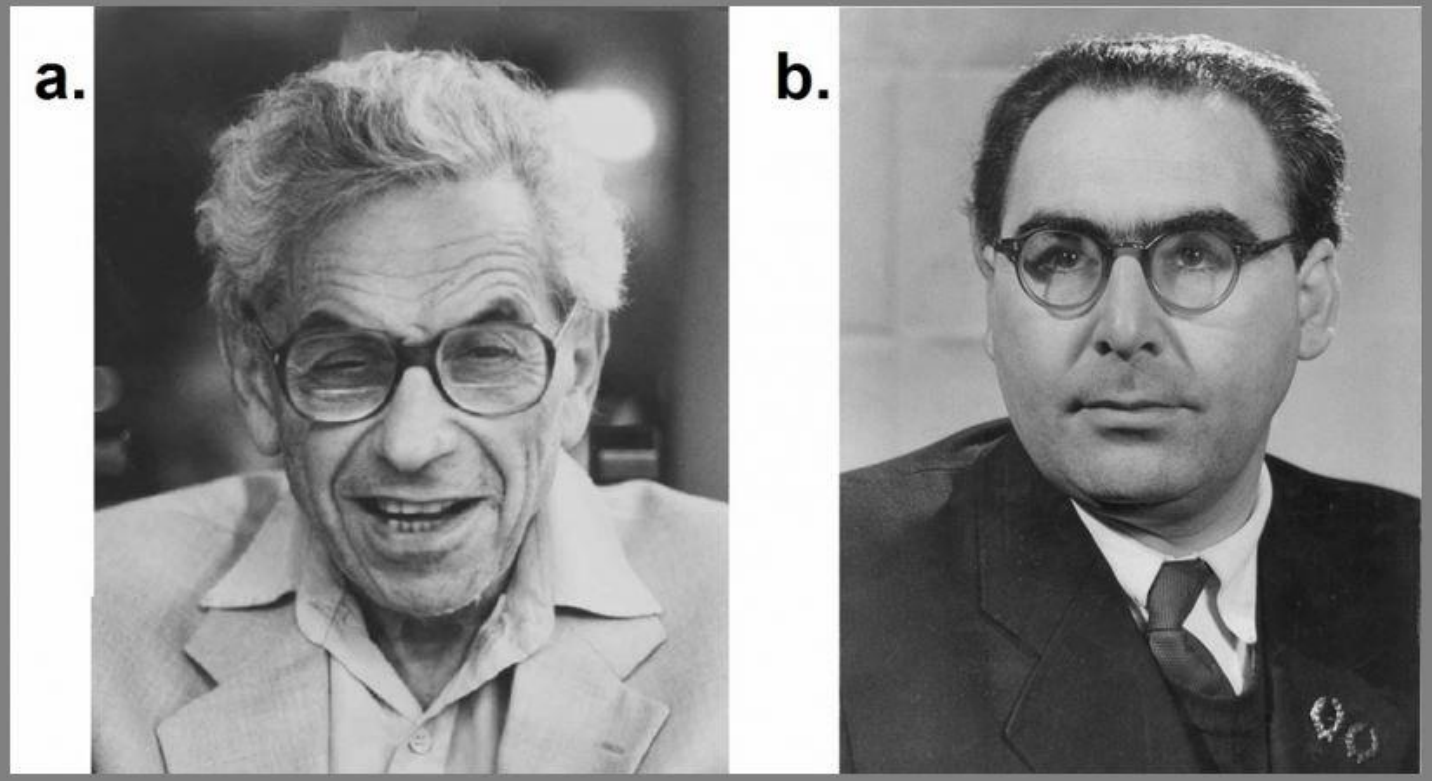


Image 3.2

(a) Pál Erdős (1913-1996)
Hungarian mathematician known for both his exceptional scientific output and eccentricity. Indeed, Erdős published more papers than any other mathematician in the history of mathematics. He co-authored papers with over five hundred mathematicians, inspiring the concept of *Erdős number*. His legendary personality and profound professional impact has inspired two biographies [12, 13] and a documentary [14] (Video 3.1).

(b) Alfréd Rényi (1921-1970)
Hungarian mathematician with fundamental contributions to combinatorics, graph theory, and number theory. His impact goes beyond mathematics: The Rényi entropy is widely used in chaos theory and the random network theory he co-developed is at the heart of network science. He is remembered through the hotbed of Hungarian mathematics, the Alfréd Rényi Institute of Mathematics in Budapest.

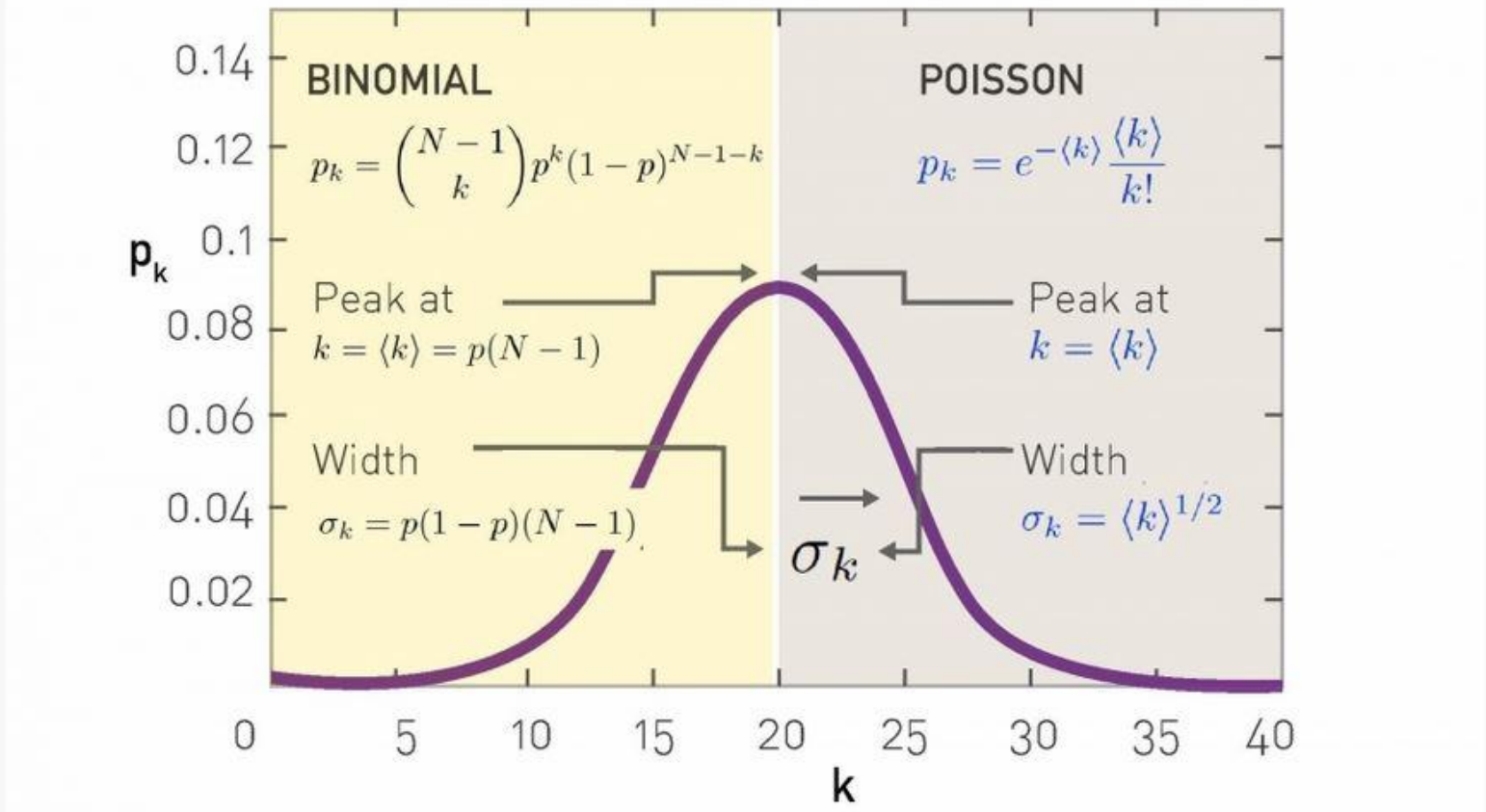


Image 3.4

Binomial vs. Poisson Degree Distribution

The exact form of the degree distribution of a random network is the binomial distribution(left half). For $N \gg \langle k \rangle$ the binomial is well approximated by a Poisson distribution (right half). As both formulas describe the same distribution,they have the identical properties, but they are expressed in terms of different parameters: The binomial distribution depends on p and N, while the Poisson distribution has only one parameter, $\langle k \rangle$. It is this simplicity that makes the Poisson form preferred in calculations.

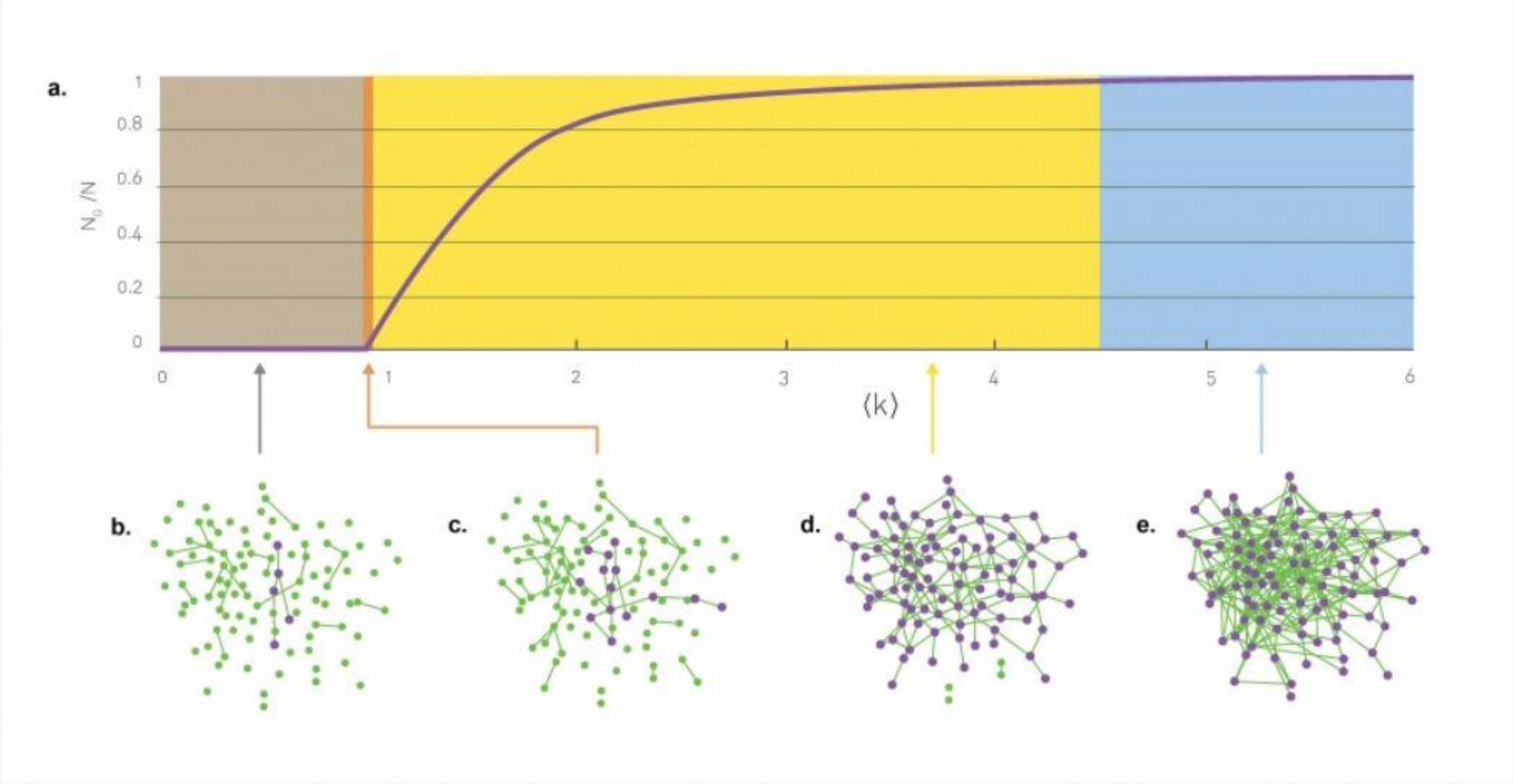


Image 3.7

Evolution of a Random Network

- The relative size of the giant component in function of the average degree ‹*k*› in the Erdős-Rényi model. The figure illustrates the phase tranisition at ‹*k*› = 1, responsible for the emergence of a giant component with nonzero N_G
- A sample network and its properties in the four regimes that characterize a random network.

Small Worlds

The *small world phenomenon*, also known as *six degrees of separation*, has long fascinated the general public. It states that if you choose any two individuals anywhere on Earth, you will find a path of at most six acquaintances between them (Image 3.10). The fact that individuals who live in the same city are only a few handshakes from each other is by no means surprising. The small world concept states, however, that even individuals who are on the opposite side of the globe can be connected to us via a few acquaintances.

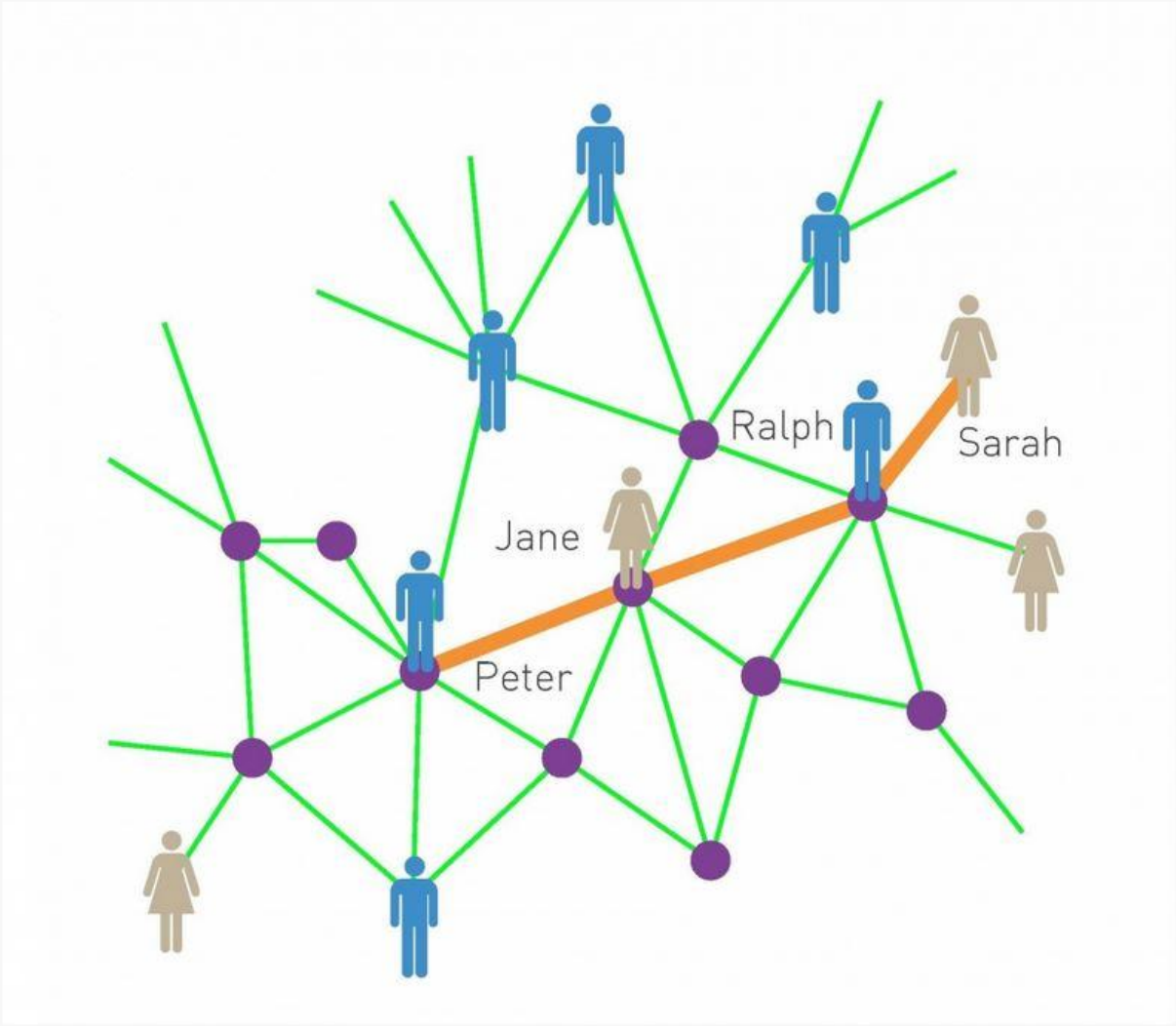
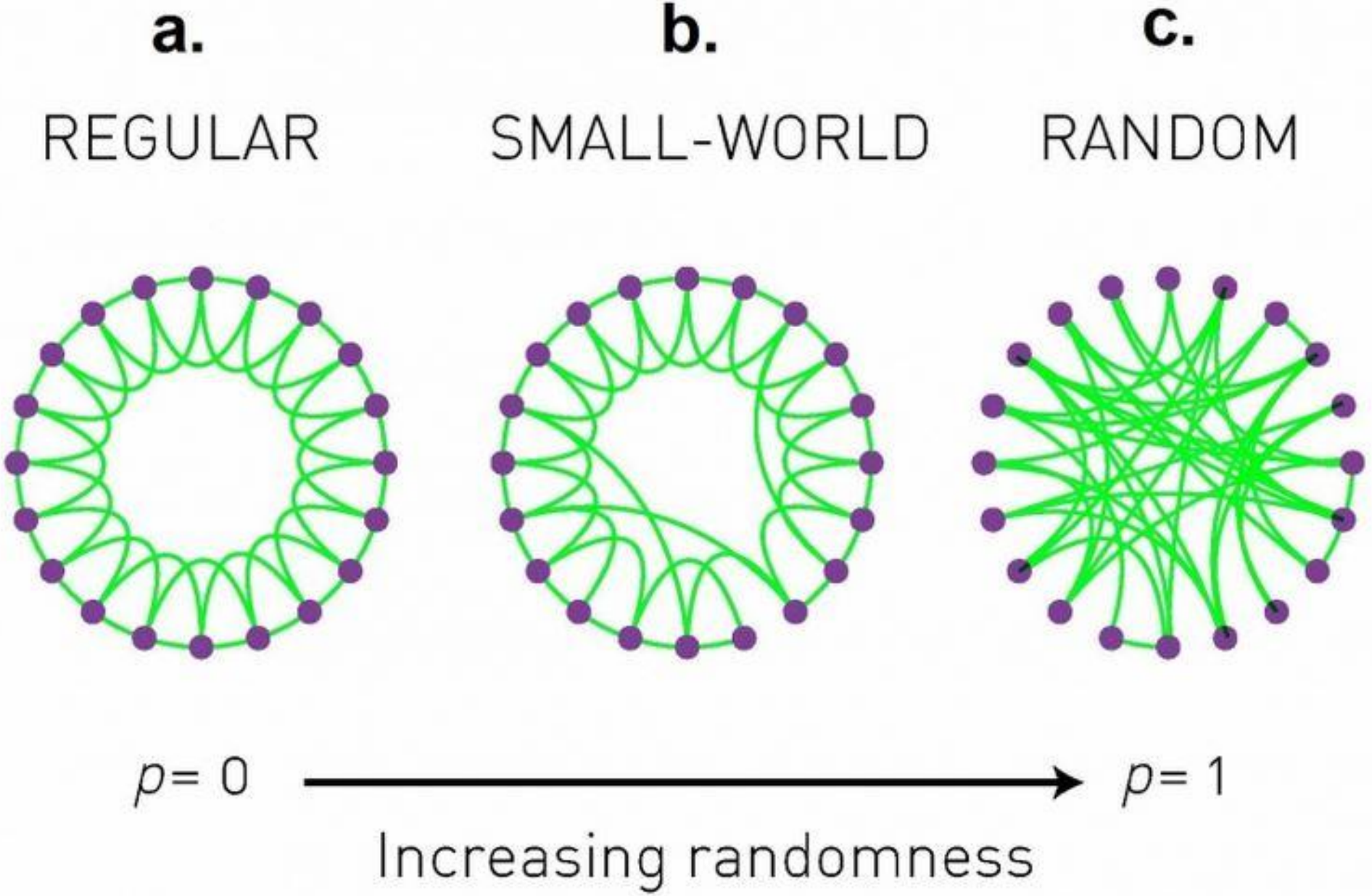
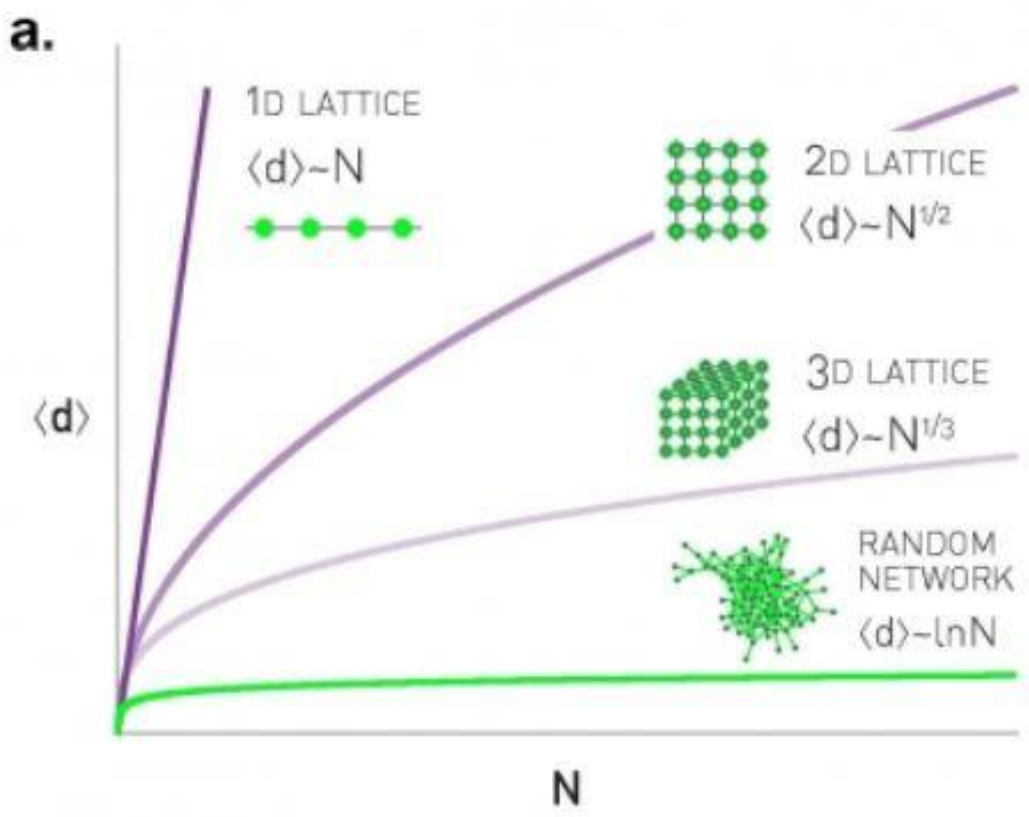
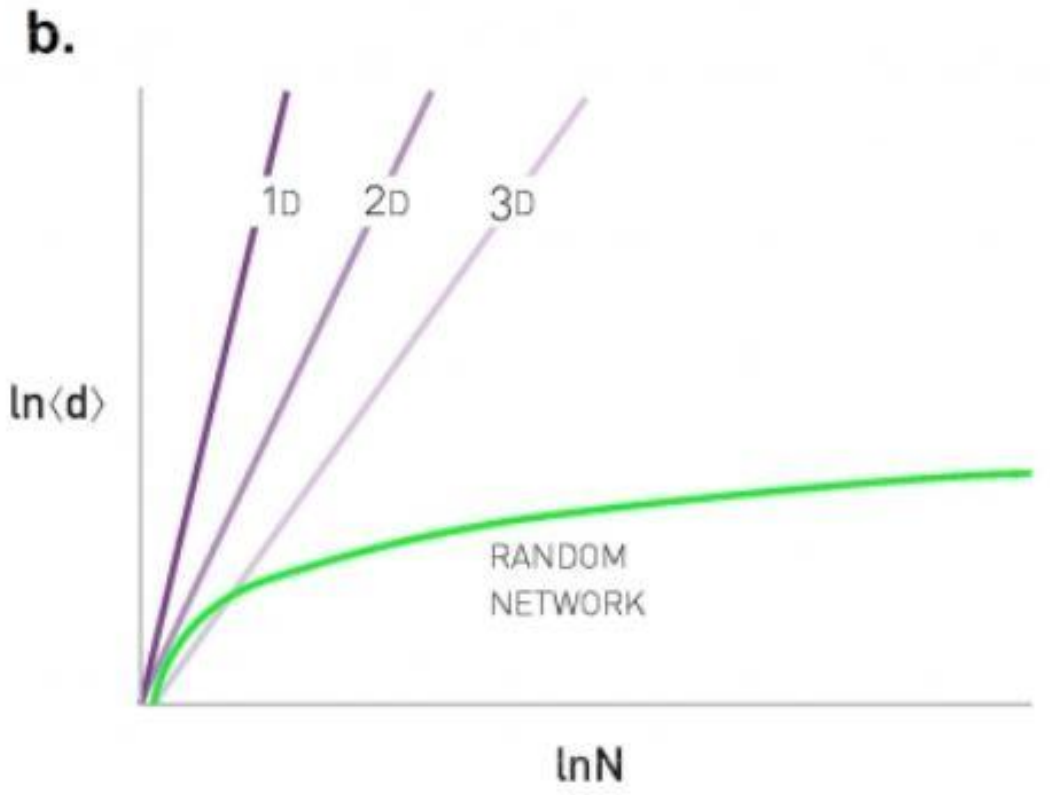


Image 3.10

Six Deegree of Separation


a.
b.
c.
REGULAR
SMALL-WORLD
RANDOM
p= 0
p= 1
Increasing randomness


a.
1D LATTICE
⟨d⟩~N
2D LATTICE
⟨d⟩~N^1/2
3D LATTICE
⟨d⟩~N^1/3
RANDOM
NETWORK
⟨d⟩~lnN
⟨d⟩
N


b.
1D
2D
3D
RANDOM
NETWORK
ln⟨d⟩
lnN

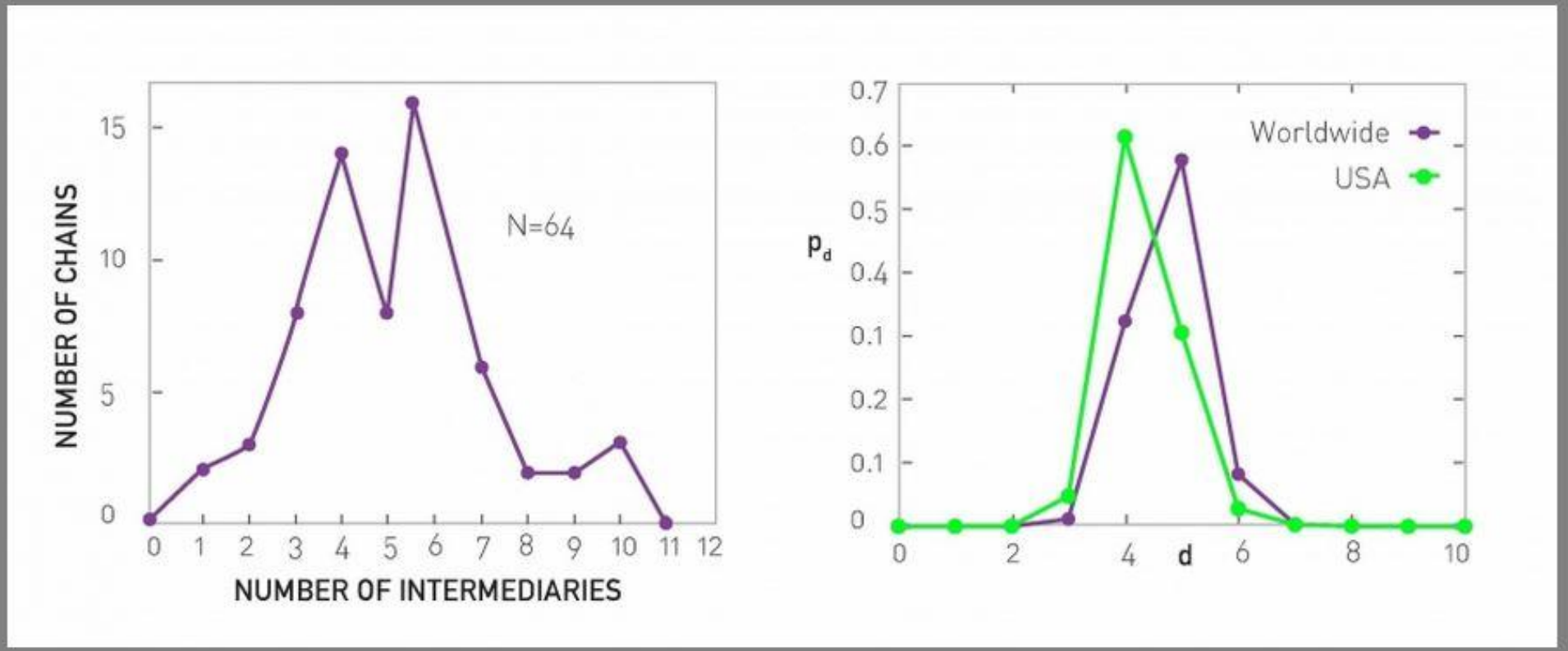


Image 3.12

Six Degrees? From Milgram to Facebook

- In Milgram's experiment 64 of the 296 letters made it to the recipient. The figure shows the length distribution of the completed chains, indicating that some letters required only one intermediary, while others required as many as ten. The mean of the distribution was 5.2, indicating that on average six 'handshakes' were required to get a letter to its recipient. The playwright John Guare renamed this 'six degrees of separation' two decades later. After [25].
- The distance distribution, p_d , for all pairs of Facebook users worldwide and within the US only.Using Facebook's N and L (3.19) predicts the average degree to be approximately 3.90, not far from the reported four degrees. After [18].

Box 3.6

19 Degrees of Separation

How many clicks do we need to reach a randomly chosen document on the Web? The difficulty in addressing this question is rooted in the fact that we lack a complete map of the WWW—we only have access to small samples of the full map. We can start, however, by measuring the WWW's average path length in samples of increasing sizes, a procedure called *finite size scaling*. The measurements indicate that the average path length of the WWW increases with the size of the network as [21]

$$\langle d \rangle \approx 0.35 + 0.89 \ln N$$

In 1999 the WWW was estimated to have about 800 million documents [22], in which case the above equation predicts $\langle d \rangle \approx 18.69$. In other words in 1999 two randomly chosen documents were on average 19 clicks from each other, a result that became known as *19 degrees of separation*. Subsequent measurements on a sample of 200 million documents found $\langle d \rangle \approx 16$ [23], in good agreement with the $\langle d \rangle \approx 17$ prediction. Currently the WWW is estimated to have about trillion nodes ($N \sim 10^{12}$), in which case the formula predicts $\langle d \rangle \approx 25$. Hence $\langle d \rangle$ is not fixed but as the network grows, so does the distance between two documents.

The average path length of 25 is much larger than the proverbial six degrees (BOX 3.7). The difference is easy to understand: The WWW has smaller average degree and larger size than the social network. According to (3.19) both of these differences increase the Web's diameter.

Network	N	L	‹k›	‹d›	d_{max}	ln*N*/ln‹*k*›
Internet	192,244	609,066	6.34	6.98	26	6.58
WWW	325,729	1,497,134	4.60	11.27	93	8.31
Power Grid	4,941	6,594	2.67	18.99	46	8.66
Mobile-Phone Calls	36,595	91,826	2.51	11.72	39	11.42
Email	57,194	103,731	1.81	5.88	18	18.4
Science Collaboration	23,133	93,437	8.08	5.35	15	4.81
Actor Network	702,388	29,397,908	83.71	3.91	14	3.04
Citation Network	449,673	4,707,958	10.43	11.21	42	5.55
E. Coli Metabolism	1,039	5,802	5.58	2.98	8	4.04
Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	5.61	14	7.14

Table 3.2

Six Degrees of Separation

The average distance ‹*d*› and the maximum distance d_{max} for the ten reference networks. The last column provides ‹*d*› predicted by (3.19), indicating that it offers a reasonable approximation to the measured ‹*d*›. Yet, the agreement is not perfect – we will see in the next chapter that for many real networks (3.19) needs to be adjusted. For directed networks the average degree and the path lengths are measured along the direction of the links.

Weiterführende Links

- Folien der 6.Vorlesung
- Vorlesungsaufzeichnung der 6.Vorlesung: WS 2022/23 bzw. WS 2021/22
- View Jupyter Notebook: Einführung in die Theorie der komplexe Netzwerke
- Download Jupyter Notebook: Einführung in die Theorie der komplexe Netzwerke
- View Jupyter Notebook: Zufällige komplexe Netzwerke (random networks)
- Download Jupyter Notebook: Zufällige komplexe Netzwerke (random networks)
- View Jupyter Notebook: Kleine Welt Netzwerke (small world networks)
- Download Jupyter Notebook: Kleine Welt Netzwerke (small world networks)
- Download Python Programm: Zufälliges komplexes Netzwerk
- Download Python Programm: Mittelung mehrerer zufälliger komplexer Netzwerke
- Download Python Programm: Kleine Welt Netzwerke (Watts-Strogatz Modell)