Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
31.10.2025

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

3. Vorlesung

Plan für die heutige Vorlesung

- Kurze Wiederholung der Vorlesung 2
- Gleichgewichtsselektion: Pareto-Effizienz und Risikodominanz
- Symmetrische und nicht symmetrische Spiele
- Klassen symmetrischer (2x2)-Spiele
- Beispiel eines asymmetrischen Spiels: Kampf der Geschlechter
- Einführung in die Evolutionäre Spieltheorie
  - Die Replikatordynamik der Quasispezies
  - Die Differentialgleichung eines evolutionären (2xm)-Spiels
  - Die Differentialgleichung eines evolutionären (2x2)-Spiels (Bi-Matrix Spiel)
  - Die Differentialgleichung eines evolutionären, symmetrischen (2x2)-Spiels
  - Definition: Evolutionär stabile Strategien (ESS)

Die dominante Strategie im Gefangenendilemma

Die untere Abbildung zeigt die Tabelle der "Auszahlungen" (hier die Gefängnisstrafe in Jahren) im Gefangenendilemma, wobei die roten und blauen Pfeile die Abbildung der besten Antwort der Spieler A und B visuell darstellen. Man erkennt, das beide Spieler stets zur Strategie *Gestehe* gezogen werden und somit eine dominante Strategienkombination existiert.

	Spieler B **Gestehe**	Spieler B **Gestehe nicht**
Spieler A **Gestehe**	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Spieler A **Gestehe nicht**	(-9 , -1)	(-3 , -3)

Zwei reine Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd Spiel

Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategienkombination, von der aus kein Spieler einen Vorteil erhalten würde, wenn er von seiner Strategie abweicht. Die Spieler würden keine größere Auszahlung erhalten.

	Spieler B **Hasen** jagen	Spieler B **Hirsch** jagen
Spieler A **Hasen** jagen	(2 , 2)	(4 , 0)
Spieler A **Hirsch** jagen	(0 , 4)	(5 , 5)

Gemischte Strategien

Die Menge der gemischten Strategien der Spieler $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}^1 \times \tilde{\mathcal{S}}^2 \times \ldots \times \tilde{\mathcal{S}}^N$ setzt sich aus den einzelnen Mengen der gemischten Strategien der Spieler zusammen. Die Menge der gemischten Strategien des Spielers $\mu \in \mathcal{I}$ ($\tilde{\mathcal{S}}^\mu$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien $\mathcal{S}^\mu$ verstanden werden, wobei die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien des Spielers μ aus m_μ reellwertigen Zahlen bestehen, die folgenden Normalisierungsbedingungen unterliegen:

$$\tilde{\mathcal{S}}^\mu = \left\{ (\tilde{s}^\mu_1, \tilde{s}^\mu_2, \ldots, \tilde{s}^\mu_{m_\mu}) \mid \sum_{i=1}^{m_\mu} \tilde{s}^\mu_i = 1, \tilde{s}^\mu_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m_\mu \right\}$$

Auszahlungsfunktion in gemischten Strategien

Die einzelnen Werte $\tilde{s}^\mu_i$ können als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie i interpretiert werden. Unter Verwendung der gemischten Strategien lässt sich eine gemischte Auszahlungsfunktion der Spieler wie folgt definieren:

$$\tilde{\$} = \left(\tilde{\$}^1, \tilde{\$}^2, \dots, \tilde{\$}^N\right) : \tilde{\mathcal{S}} \to \mathbb{R}^N \;, \; \text{ wobei } \; \tilde{\$}^\mu(\tilde{s}^1, \tilde{s}^2, \dots, \tilde{s}^N) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \dots \sum_{i_N=1}^{m_N} \$^\mu(s^1_{i_1}, s^2_{i_2}, \dots, s^N_{i_N}) \prod_{\nu=1}^{N} \tilde{s}^\nu_{i_\nu}$$

Im folgenden wird das Konzept der gemischten Erweiterung für den Fall eines (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels illustrieren. Die Menge der gemischten Strategien des Spielers A ($\tilde{\mathcal{S}}^A$) und B ($\tilde{\mathcal{S}}^B$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien ($\mathcal{S}^A$ und $\mathcal{S}^B$) verstanden werden. Die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien eines Spielers $\mu = A, B$ ($\tilde{\mathbf{s}}^\mu = (\tilde{s}^\mu_1, \tilde{s}^\mu_2) \in \mathcal{S}^\mu$) besteht aus zwei reellwertigen Zahlen ($\tilde{s}^\mu_1 \in [0,1]$ und $\tilde{s}^\mu_2 \in [0,1]$) und kann als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie 1 ($\tilde{s}^\mu_1$) bzw. der Strategie 2 ($\tilde{s}^\mu_2$) interpretiert werden. Desweiteren gilt die folgende Normalisierungsbedingung: $\tilde{s}^\mu_1 + \tilde{s}^\mu_2 = 1 \; \forall \, \mu = A, B$. Unter Verwendung der Auszahlungsmatrizen des Spielers A ($\hat{\$}^A$) und B ($\hat{\$}^B$) schreibt sich die gemischte Auszahlungsfunktion des Spielers $\mu = A, B$ wie folgt:

$$\tilde{\$}^\mu : \left(\tilde{\mathcal{S}}^A \times \tilde{\mathcal{S}}^B\right) \to \mathbb{R}$$

$$\tilde{\$}^\mu((\tilde{s}^A_1, \tilde{s}^A_2), (\tilde{s}^B_1, \tilde{s}^B_2)) = \$^\mu_{11} \tilde{s}^A_1 \tilde{s}^B_1 + \$^\mu_{12} \tilde{s}^A_1 \tilde{s}^B_2 + \$^\mu_{21} \tilde{s}^A_2 \tilde{s}^B_1 + \$^\mu_{22} \tilde{s}^A_2 \tilde{s}^B_2$$

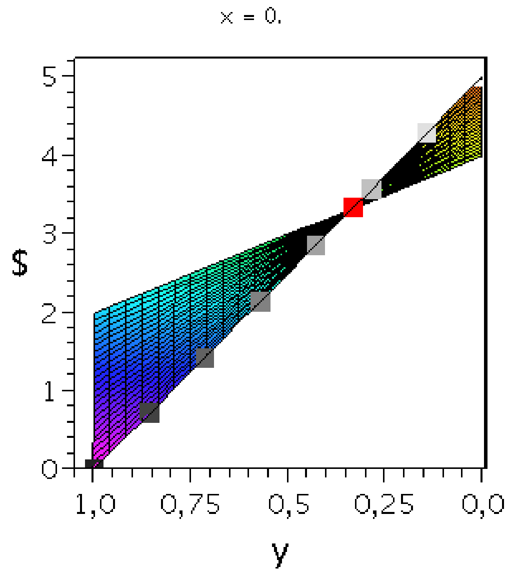
Das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

Ein Spezialfall des Nash-Gleichgewichts besteht, falls die partielle Ableitung der gemischten Auszahlungsfläche verschwindet. Man nennt dann ein solches Nash-Gleichgewicht $(\tilde{s}^{A\star}, \tilde{s}^{B\star})$ ein internes Nash-Gleichgewicht bzw. ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

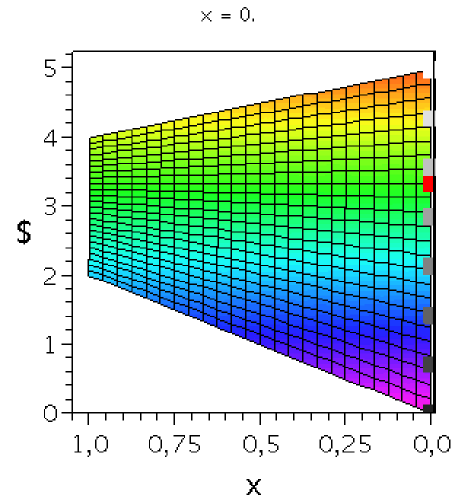
Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien:

$$\left.\frac{\partial \tilde{\$}^{A}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B})}{\partial \tilde{s}^{A}}\right|_{\tilde{s}^{B}=\tilde{s}^{B\star}} = 0 \quad \forall \;\; \tilde{s}^{A} \in [0,1] \;\; , \;\; \tilde{s}^{B\star} \in]0,1[$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{\$}^{B}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B})}{\partial \tilde{s}^{B}}\right|_{\tilde{s}^{A}=\tilde{s}^{A\star}} = 0 \quad \forall \;\; \tilde{s}^{B} \in [0,1] \;\; , \;\; \tilde{s}^{A\star} \in]0,1[$$



Das gemischte Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd-Spiel liegt bei der Strategien-kombination (x=1/3 , y=1/3) .



Zwei Nash Gleichgewichte in reinen Strategien im Angsthasen Spiel

	Spieler B Weiche nicht aus	Spieler B Weiche aus
Spieler A Weiche nicht aus	(-10 , -10)	(2 , 0)
Spieler A Weiche aus	(0 , 2)	(1 , 1)

Beispiel: Das Angsthasen-Spiel (Chicken Game)

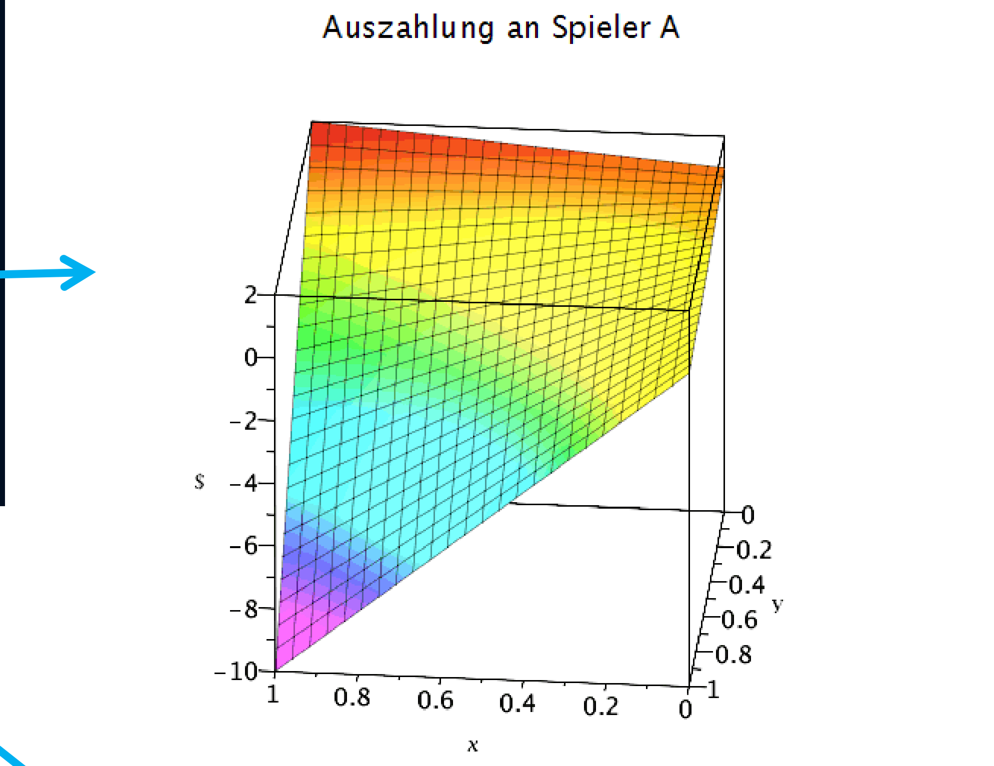
Das *Angsthasen-Spiel* ist ein simultanes (2 Personen)-(2 Strategien) Spiel und kann z.B. mittels der folgenden Geschichte illustriert werden (siehe z.B. S.16 in [2]).

"Auf einer einsamen Landstraße in Indien, bei der es nur eine geteerte Fahrbahn gibt, kommen sich zwei Autos mit hoher Geschwindigkeit entgegen. Beide Fahrer stehen nun vor der Entscheidung ob sie dem Anderen die Fahrbahn überlassen und Ausweichen oder mit hoher Geschwindigkeit weiterfahren um zu hoffen, dass der Andere ausweicht." Eine weitere Deutung des *Angsthasen-Spiel* basiert auf dem Film von Nicholas Ray "Denn sie wissen nicht was sie tun" aus dem Jahre 1955 (mit James Dean): "Jimbo und sein Erzfeind Buzz machen eine Mutprobe und rasen in ihren Autos auf eine Klippe zu. Derjenige ist der Angsthase, der als erster aus seinem Auto herrausspringt."

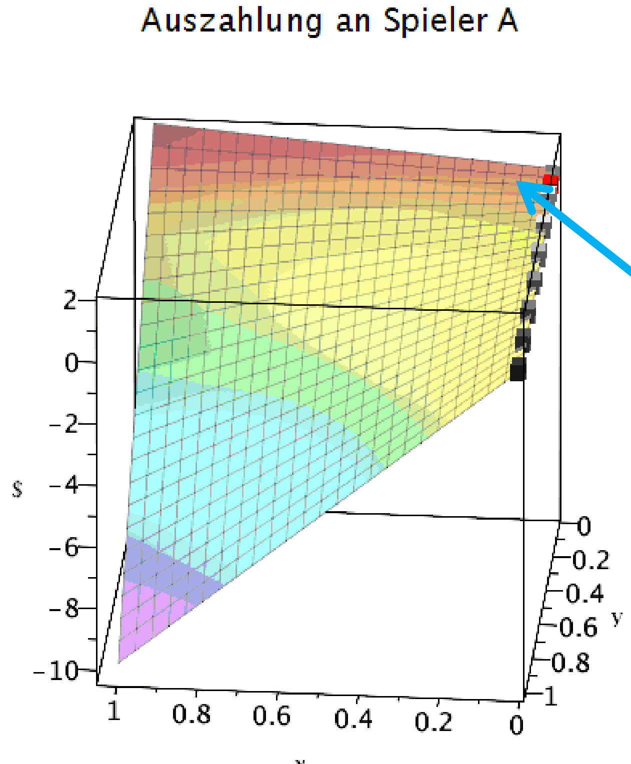
Ähnliche Spiele: Das Spiel mit dem Untergang, das Falke-Taube Spiel

Gemischtes Nash-Gleichgewicht im Angsthasen-Spiel

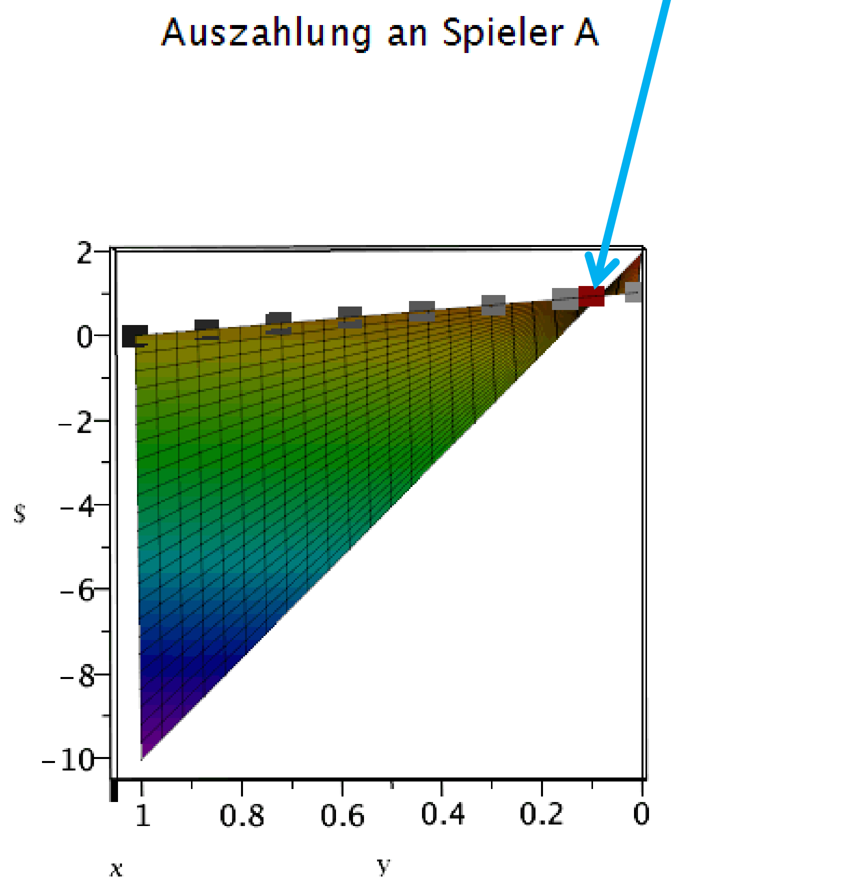
Gemischte Auszahlungsfunktion des Spielers A



Gemischtes Nash-Gleichgewicht
(x,y)=(1/11 , 1/11)



Gemischtes Nash-Gleichgewicht
(x,y)=(1/11 , 1/11)



Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Sommersemester 2024)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 13.01.2024

Erster Vorlesungsteil:

Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte am Beispiel der folgenden Spiele:

Gefangenendilemma, Hirschjagt- und Angsthasen-Spiel

Das Jupyter Notebook findet man auf der Internetseite der Vorlesung

Weiterführende Links

Folien der 2.Vorlesung
Vorlesungsaufzeichnung der 2.Vorlesung: WS 2022/23 bzw. WS 2021/22
View Jupyter Notebook: Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte
Download Jupyter Notebook: Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte

Einführung

In diesem Python Notebook werden die in der Vorlesung definierten Gleichgewichtskonzepte (dominante Strategie, reine und gemischte Nash-Gleichgewichte) am Beispiel dreier simultaner, symmetrischer (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiele illustriert. Zunächst wird das Python-Modul "sympy" eingebunden, das ein Computer-Algebra-System für Python bereitstellt und symbolische Berechnungen und im speziellen Matrix-Berechnungen relativ einfach möglich macht.

```
from sympy import *
init_printing()
```

Das Gefangenendilemma

Definition der Auszahlunsmatrix für Spieler A ($\hat{\$}^A$):

```
D_A=Matrix([[-7,-1],[-9,-3]])
D_A
```

$$\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$$

Da es sich bei dem Spiel um ein symmetrisches (2 Personen)-(2 Strategien) Spiel handelt, erhält man die Auszahlungsmatrix für Spieler B durch die transponierte Matrix des Spielers A ($\hat{\$}^B = (\hat{\$}^A)^T$):

```
D_B=transpose(D_A)
D_B
```

Konzepte der Gleichgewichtsselektion
Pareto-Effizienz

Besitzt ein Spiel mehr als einen Gleichgewichtszustand, so stellt sich die Frage, welcher dieser Gleichgewichte realisiert wird. Ein mögliches Kriterium bietet das Konzept der *Pareto-Effizienz*. Jeder Strategiewechsel der die Auszahlung eines Spielers erhöht, ohne einen anderen Spieler zu verschlechtern, stellt eine *Pareto-Verbesserung* des Gleichgewichtszustand dar. Strategienkombinationen von denen aus keine weite Verbesserung möglich ist, heissen *Pareto-Effizient.*

Beispiel: Hirschjagd-Spiel

	Spieler B Hasen jagen	Spieler B Hirsch jagen
Spieler A Hasen jagen	(2 , 2)	(4 , 0)
Spieler A Hirsch jagen	(0 , 4)	(5 , 5)

Pareto-perfektes Nash-Gleichgewicht

Ausgehend von der Strategiekombination des Gleichgewichtszustandes (Hasen jagen,Hasen jagen) ist ein Übergang zu (Hirsch jagen,Hirsch jagen) für beide Spieler eine Verbesserung (*Pareto-Verbesserung*). Die Strategie-kombination des Gleichgewichtszustandes (Hirsch jagen,Hirsch jagen) ist das eindeutige *Pareto-effiziente Nash-Gleichgewicht* des Spiels und wird als *Pareto-perfektes* Gleichgewicht *bezeichnet.*

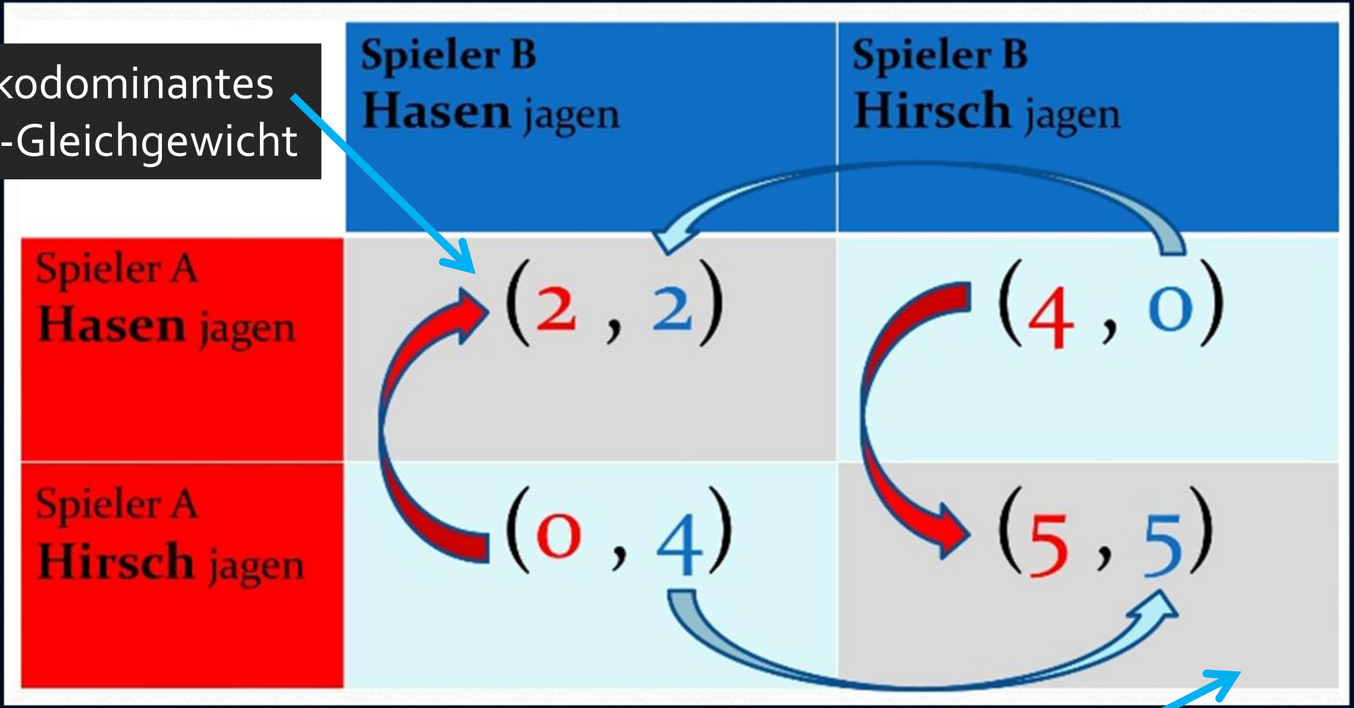
Konzepte der Gleichgewichtsselektion
Risikodominanz

Bei manchen Spielen mit mehreren Gleichgewichtszuständen ist es jedoch fraglich, ob ein Pareto-perfektes Nash-Gleichgewicht tatsächlich einem anderen vorzuziehen ist. Harsanyi und Selten hatten diesbezüglich im Jahre 1988 ein weiteres Konzept der Gleichgewichtsselektion entwickelt, das sogenannte *risikodominante Gleichgewicht*. Wir verdeutlichen dieses Konzept am Beispiel eines symmetrischen 2-Personen zwei Strategien Spiels.

Beispiel: Hirschjagd-Spiel

Hierbei vergleicht man die mittlere Auszahlung des Spielers bei Strategiewahl "Hasen jagen" mit dem mittleren Auszahlungswert bei Strategienwahl "Hirsch jagen" . Das Gleichgewicht mit dem höheren Wert ist das *risikodominante Gleichgewicht* des Spiels. Unter Verwendung der gemischten Auszahlungsfunktion ergibt sich:

Risikodominantes Nash-Gleichgewicht



Pareto-perfektes Nash-Gleichgewicht

$$\tilde{\$}^{A}(\tilde{s}^{A},\tilde{s}^{B}) = \tilde{\$}^{A}(x,y) = 3xy - x - 5y + 5$$
$$\tilde{\$}^{A}(Hasen, 0.5) = \tilde{\$}^{A}(1{,}0.5) = 1.5 - 1 - 2.5 + 5 = 3$$
$$\tilde{\$}^{A}(Hirsch, 0.5) = \tilde{\$}^{A}(0{,}0.5) = -2.5 + 5 = 2.5$$

-> $\tilde{\$}^{A}(Hasen, 0.5) = 3 \; > 2.5 = \tilde{\$}^{A}(Hirsch, 0.5)$

Symmetriebedingung der Auszahlungsmatrizen

	Spieler B wählt Strategie 1	**Spieler B wählt Strategie 2**
Spieler A wählt Strategie 1	$(\$^A_{11}, \$^B_{11})$	$(\$^A_{12}, \$^B_{12})$
Spieler A wählt Strategie 2	$(\$^A_{21}, \$^B_{21})$	$(\$^A_{22}, \$^B_{22})$

Auszahlungsmatrix des zweiten Spielers:

$$\hat{\$}^B = \begin{pmatrix} \$^B_{11} & \$^B_{12} \\ \$^B_{21} & \$^B_{22} \end{pmatrix}$$

Auszahlungsmatrix des ersten Spielers:

$$\hat{\$}^A = \begin{pmatrix} \$^A_{11} & \$^A_{12} \\ \$^A_{21} & \$^A_{22} \end{pmatrix}$$

Symmetriebedingung:

$$\left(\hat{\$}^B\right)^T = \begin{pmatrix} \$^B_{11} & \$^B_{21} \\ \$^B_{12} & \$^B_{22} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \$^A_{11} & \$^A_{12} \\ \$^A_{21} & \$^A_{22} \end{pmatrix} = \hat{\$}^A$$

Transponierte Matrix

Beispiel: Gefangenendilemma

(Symmetrisches (2x2)-Spiel)

	Ge	Sc
Ge	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Sc	(-9 , -1)	(-3 , -3)

Auszahlungsmatrix des zweiten Spielers:

$$\hat{\$}^{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Auszahlungsmatrix des ersten Spielers:

$$\hat{\$}^{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$$

Symmetriebedingung stimmt:

$$\left(\hat{\$}^{\mathrm{B}}\right)^{T} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} = \hat{\$}^{\mathrm{A}}$$

$\Rightarrow$ symmetrisches Spiel

Allgemeines (2x2)-Spiel

	Spieler B wählt Strategie 1	Spieler B wählt Strategie 2
Spieler A wählt Strategie 1	$(\$_{11}^{A}, \$_{11}^{B})$	$(\$_{12}^{A}, \$_{12}^{B})$
Spieler A wählt Strategie 2	$(\$_{21}^{A}, \$_{21}^{B})$	$(\$_{22}^{A}, \$_{22}^{B})$

Symmetrisches (2x2)-Spiel

	Spieler B Strategie 1 y=1	Spieler B Strategie 1 y=0
Spieler A Strategie 1 x=1	(a , a)	(b , c)
Spieler A Strategie 2 x=0	(c , b)	(d , d)

Klassen symmetrischer (2x2)-Spiele

	Spieler B Strategie 1 y=1	Spieler B Strategie 1 y=0
Spieler A Strategie 1 x=1	(a , a)	(b , c)
Spieler A Strategie 2 x=0	(c , b)	(d , d)

Symmetrisches (2x2)-Spiel

Symmetrische (2x2)-Spiele lassen sich in drei unterschiedliche Klassen gliedern:

1. Dominante Spiele
2. Koordinationsspiele
3. Anti-Koordinationsspiele

Die Klasse der dominanten Spiele (a > c und b > d bzw. a < c und b < d)

Bei dieser Spielklasse dominiert eine Strategie die andere. Es existiert nur ein reines Nash-Gleichgewicht welches die dominante Strategie des Spiels darstellt. Dieser Fall tritt ein, falls:
a > c und b > d : Strategie 1 dominiert Strategie 2; dominante Strategie bei (x,y)=(1,1).
a < c und b < d : Strategie 2 dominiert Strategie 1; dominante Strategie bei (x,y)=(0,0).

Koordinationsspiele (a > c und b < d)

Ein Koordinationsspiel existiert, falls die Parameter a, b, c und d der Auszahlungmatrix die folgenden Bedingungen erfüllen: a > c und b < d . Bei dieser Spielklasse existieren drei Nash-Gleichgewichte, ein gemischtes Nash-Gleichgewicht und zwei reine, symmetrische Nash-Gleichgewicht bei (x,y)=(0,0) und (x,y)=(1,1).

Anti-Koordinationsspiele (a < c und b > d)

Ein Anti-Koordinationsspiel existiert, falls die Parameter a, b, c und d der Auszahlungmatrix die folgenden Bedingungen erfüllen: a < c und b > d . Bei dieser Spielklasse existieren drei Nash-Gleichgewichte, ein gemischtes Nash-Gleichgewicht und zwei reine, unsymmetrische Nash-Gleichgewicht bei (x,y)=(0,1) und (x,y)=(0,1).

Beispiel: Spielklassen

- Betrachten Sie die folgenden Beispiele:

Beispiel 1:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Beispiel 2:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

Beispiel 3:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

1. Geben Sie die möglichen dominanten Strategien und Nash-Gleichgewichte der Spiels in reinen Strategien an.
2. Existieren Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien?
3. Um welche Spielklasse handelt es sich?

Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte

Beispiel 1	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Das erste Spiel besitzt nur ein Nash-Gleichgewicht das gleichzeitig die dominante Strategie des Spiels ist (Kugel, Kugel). Das Spiel gehört zur Klasse der dominanten Spiele.

Beispiel 2	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

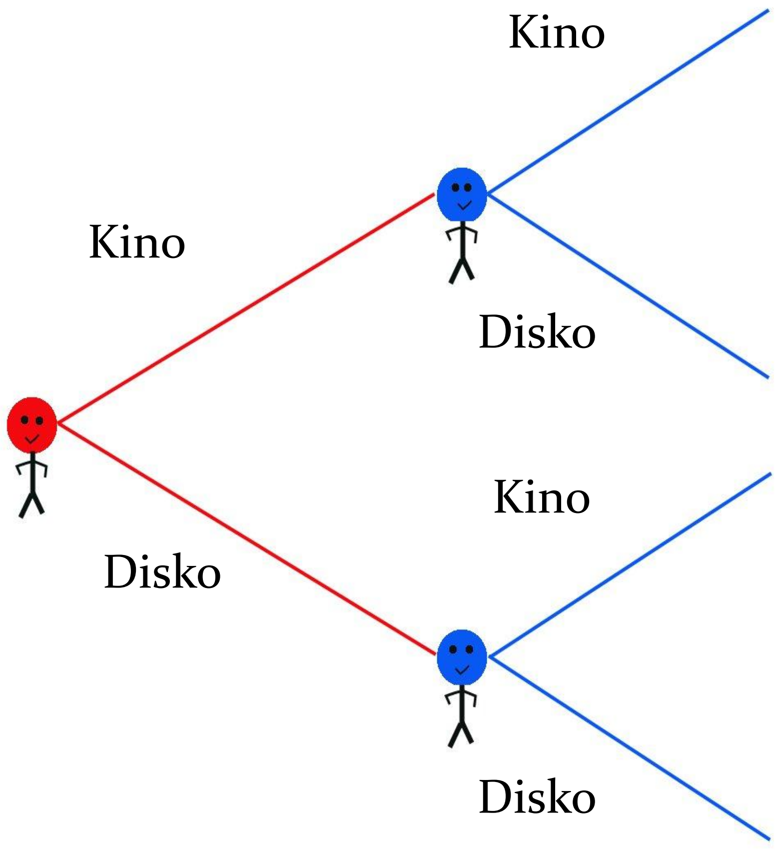
Das zweite Spiel besitzt keine dominante Strategie, aber zwei unsymmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,KK) und (KK,K)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.67 K , 0.33 KK). Das Spiel gehört zur Klasse der Anti-Koordinationsspiele.

Beispiel 3	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

Das dritte Spiel besitzt ebenfalls keine dominante Strategie, aber zwei symmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,K) und (KK,KK)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.33 K , 0.67 KK). Das Spiel gehört zur Klasse der Koordinationsspiele.

Kampf der Geschlechter

	Kino	Disko
Kino	(1 , 3)	(0 , 0)
Disko	(0 , 0)	(3 , 1)



Alexander und Bettina haben bei ihrem letzten Treffen nicht genau ausgemacht, wann und wo sie sich am Samstagabend treffen wollen. Bettina geht sehr gerne in das kleine Kino am Stadtrand (Spätvorstellung, Beginn 23.30 Uhr), Alexander aber würde gerne in die Diskothek im Zentrum der Stadt gehen. Keiner von ihnen hat ein Telefon. Bettina denkt, wird er mir zuliebe ins Kino gehen? Alexander denkt ähnlich, wird sie mir zuliebe in die Diskothek gehen? Beiden liegt aber viel daran sich am Samstagabend zu treffen. Der erzielte Nutzen dieses Spiels kann zum Beispiel wie oben angegeben quantifiziert werden.

Kampf der Geschlechter

(Unsymmetrisches (2x2)-Koordinationspiel)

	Kino	Disko
Kino	(1 , 3)	(0 , 0)
Disko	(0 , 0)	(3 , 1)

Auszahlungsmatrix des zweiten Spielers:

$$\hat{\$}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auszahlungsmatrix des ersten Spielers:

$$\hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Symmetriebedingung stimmt nicht:

$$\left(\hat{\$}^2\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \hat{\$}^1$$

$\Rightarrow$ unsymmetrisches Spiel

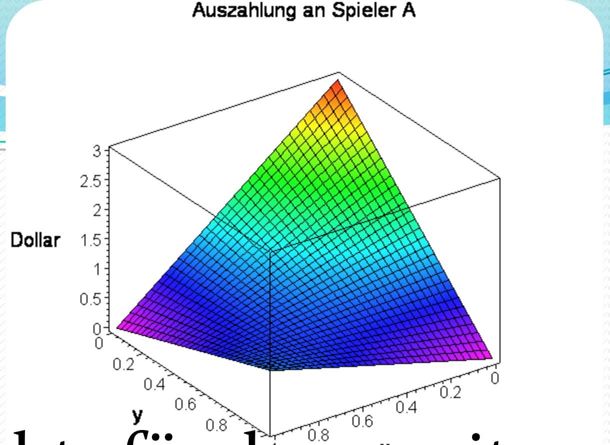
Kampf der Geschlechter

(Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien)

- Es gibt keine dominante Strategie bei diesem Spiel.
- Es gibt zwei reine Nash-Gleichgewichte:
  (Kino,Kino)
  (Disko, Disko)

	Kino	**Disko**
Kino	(1 , 3)	(0 , 0)
Disko	(0 , 0)	(3 , 1)

Kampf der Geschlechter
(Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien)



- Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts für den zweiten Spieler (Bettina):

$$\text{Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers (Alexander)}: \quad \$^1 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \rightarrow \Re$$

$$\$^1(x,y) = 1 \cdot x \cdot y + 0 \cdot x \cdot (1-y) + 0 \cdot (1-x) \cdot y + 3 \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

$$= 4 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x - 3 \cdot y + 3$$

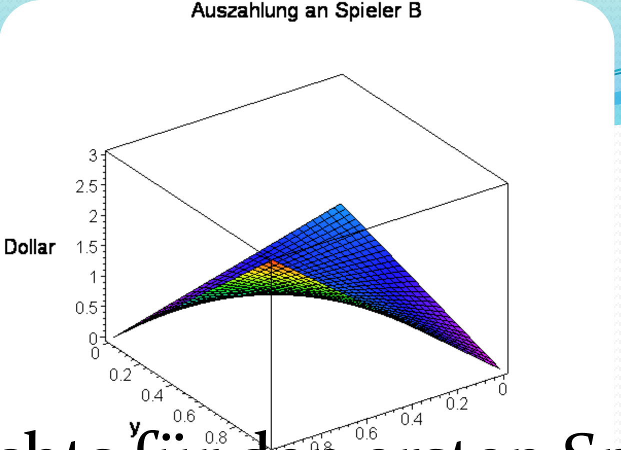
$$\left. \frac{\partial \, \$^1(x,y)}{\partial x} \right|_{y=y^*} = 4 \cdot y^* - 3 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y^* = \frac{3}{4} \approx 75\%$$

Das gemischte Nash-Gleichgewicht für Bettina befindet sich bei

$$y^* = \frac{3}{4} \approx 75\%$$

Kampf der Geschlechter

(Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien)



- Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts für den ersten Spieler (Alexander):

Auszahlungsfunktion des 2 - ten Spielers (Bettina) : $\$^2 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \rightarrow \Re$

$$\$^2(x,y) = 3 \cdot x \cdot y + 0 \cdot x \cdot (1-y) + 0 \cdot (1-x) \cdot y + 1 \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

$$= 4 \cdot x \cdot y - x - y + 1$$

$$\left.\frac{\partial \$^2(x,y)}{\partial y}\right|_{x=x^*} = 4 \cdot x^* - 1 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^* = \frac{1}{4} \approx 25\%$$

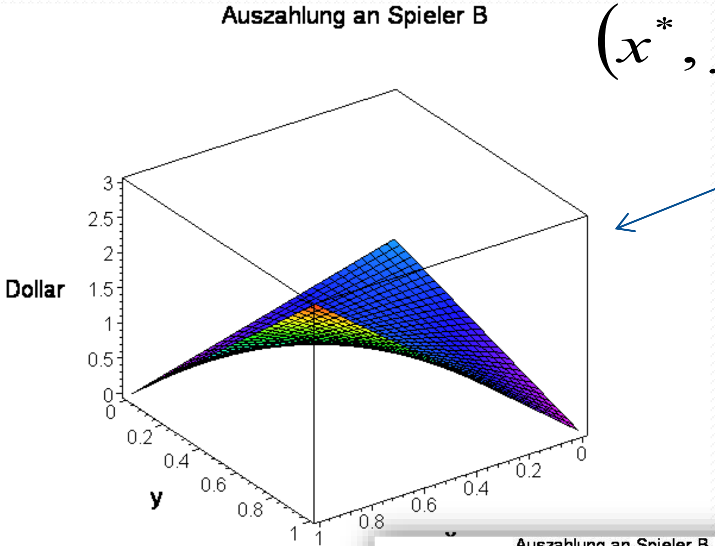
Das gemischte Nash-Gleichgewicht für Alexander befindet sich bei $x^* = \frac{1}{4} \approx 25\%$

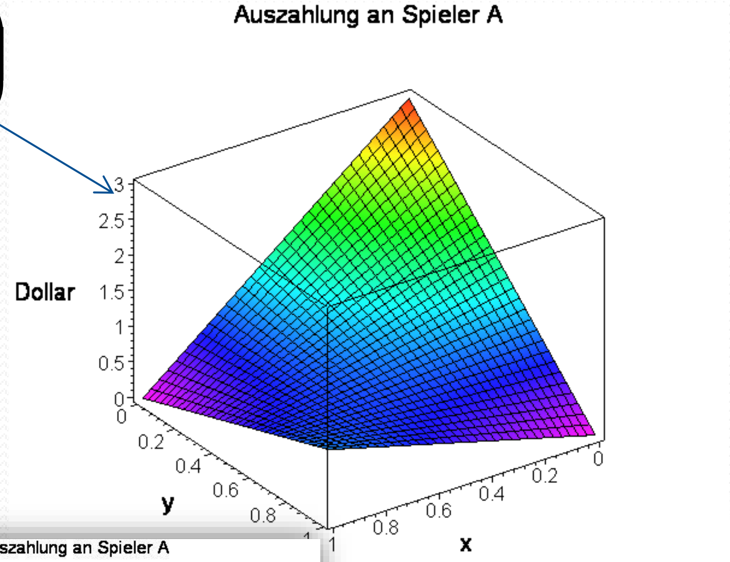
Kampf der Geschlechter

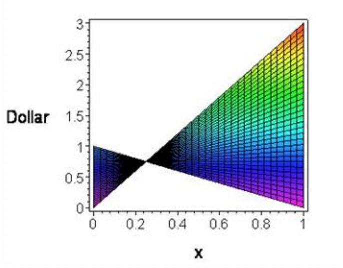
(Grafische Veranschaulichung des gemischten Nash-Gleichgewichts)

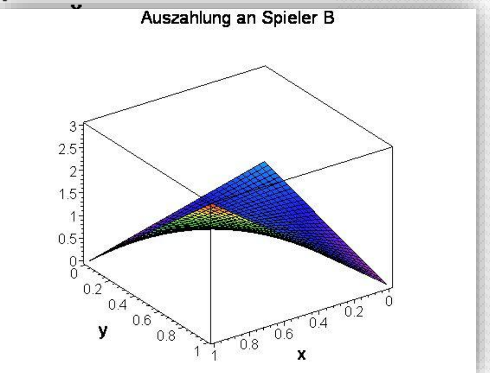
- Das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien befindet sich bei

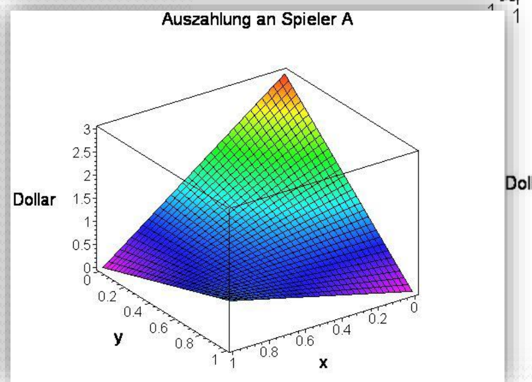
$$\left(x^*, y^*\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

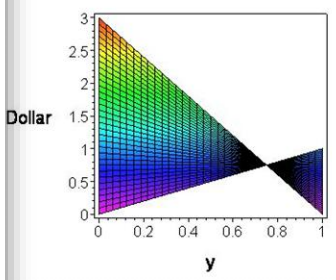












Ursprünge der evolutionären Spieltheorie

- Der von Maynard Smith im Jahre 1972 veröffentlichte Artikel (*J. Maynard Smith* **Game theory and the evolution of fighting**, *In "On Evolution"*, Seiten 8-28. Edingburgh University Press, Edingburgh, 1972) gilt allgemein als der erste spieltheoretische Ansatz der ***Evolutionären Spieltheorie***. Smith beschreibt in dem Artikel, wie man die biologische, evolutionäre Entwicklung von Organismen aus den Nash-Gleichgewichten von symmetrischen (2x2)-Spielen ablesen kann. Er zeigt, wie die dynamische Entwicklung der Häufigkeitsverteilung der Organismen in einem stabilen Zustand endet – der sogenannten *evolutionär stabilen Strategie*.

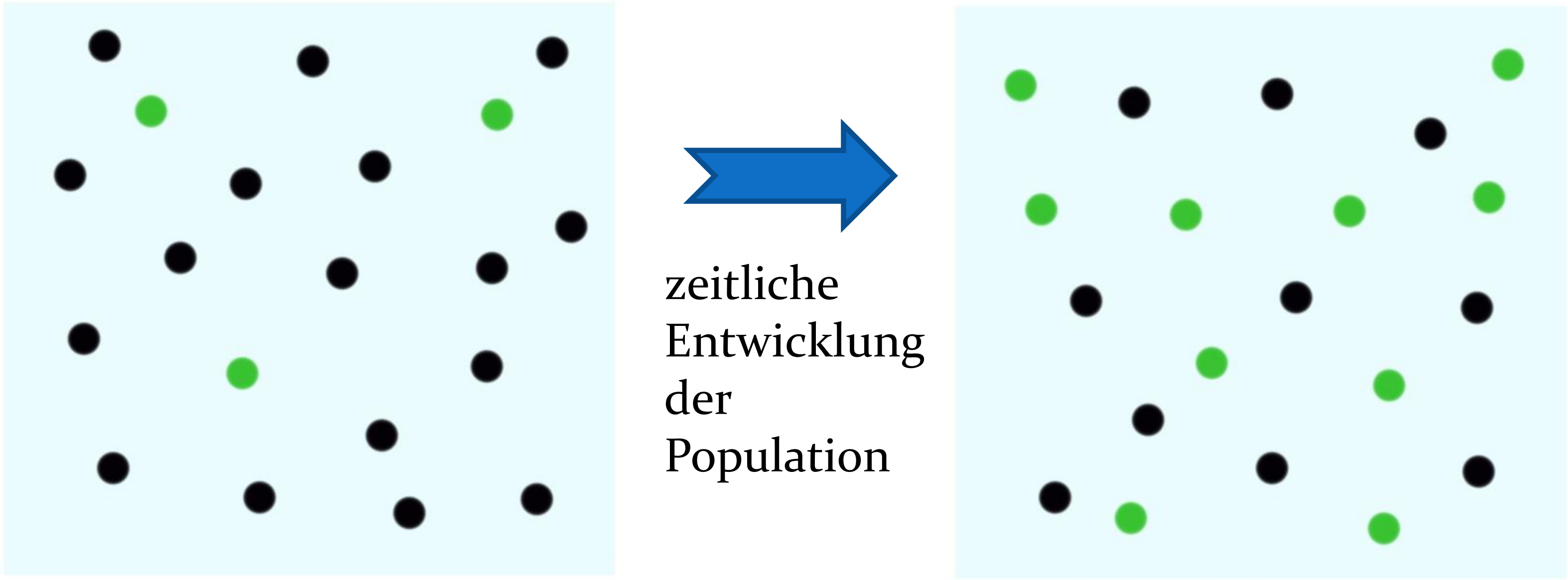
Evolutionäre Spieltheorie
Evolutionäre Entwicklung von biologischen Systemen
Quasispezies und die Fitness der Genom Sequenz

Viele der in diesem Unterkapitel behandelten Systeme sind dem Buch Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life, 2006 entnommen, welches eine sehr gute und allgemein verständliche Einführung in das Themengebiet der evolutionären Dynamik darstellt. Obwohl der Fokus dieses Buches im Bereich der Evolution von biologischen Systemen liegt (siehe Kapitel 10: HIV Infection, Kapitel 11: Evolution of Virulence, Kapitel 12: Evolutionary Dynamics of Cancer, und Kapitel 13: Language Evolution), sind die Kapitel 1-9 weitgehend allgemein formuliert. Die evolutionäre Dynamik unterschiedlicher Spezien einer Tierart und der Mechanismus wie Tierarten ineinander übergehen wurde von Charles Darwin bereits im Jahre 1840 beschrieben. Im Jahre 1973 stellte John Maynard Smith eine Verbindung zwischen den Populationsgleichungen der Biologie und der evolutionären Spieltheorie her. Das Konzept der *Quasi-Spezien* (Ensemble von ähnlichen Genomen Sequenzen (Erbgut eines Lebewesens) welches durch einen Prozess der Mutation und Selektion entstanden ist) wurde von Manfred Eigen und Peter Schuster entwickelt (siehe Kapitel 3.3: Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life). Die Struktur der Quasi-Spezien Differentialgleichung ist den Gleichungen der evolutionären Spieltheorie sehr ähnlich (siehe Bild 3.4 und 4.5: Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life). Die evolutionäre Vorteilhaftigkeit einer Genom Sequenz wird hierbei als die *Fitness* der Quasi-Spezie bezeichnet. *Quasi-Spezien* entsprechen den Strategien der Spieltheorie und die Fitness kann als der Auszahlungswert einer Strategie aufgefasst werden. Die zeitliche Entwicklung der *Quasi-Spezien* am Beispiel des Paarungsverhalten von Eidechsen wird z.B. in siehe Sinervo, Barry, and Curt M. Lively. 'The rock-paper-scissors game and the evolution of alternative male strategies.' Nature 380.6571 (1996): 240. analysiert (siehe auch Vorlesung 6). Die evolutionäre Dynamik hängt von der unterliegenden Netzwerkstruktur der beteiligten Akteure ab und skalenfreie Netzwerkstrukturen agieren hier als Verstärker der evolutionären Selektion (siehe Kapitel 8, Evolutionary Graph Theory: Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life). Im folgenden Unterpunkt werden sie sogenannten *Spatial Games* behandelt (eine ausführliche Einführung findet sich im Kapitel 9: Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life).

Siehe Teil III der Vorlesung

Evolutionäre Spieltheorie (I)

Die evolutionäre Spieltheorie betrachtet die zeitliche Entwicklung des strategischen Verhaltens einer gesamten Spielerpopulation.

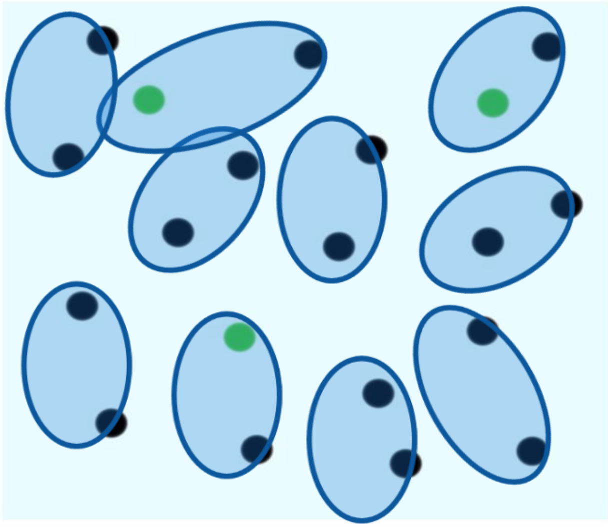


$x(0)=0.15$ $x(10)=0.5$

Mögliche Strategien: (grün , schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
$x(t)$: Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.

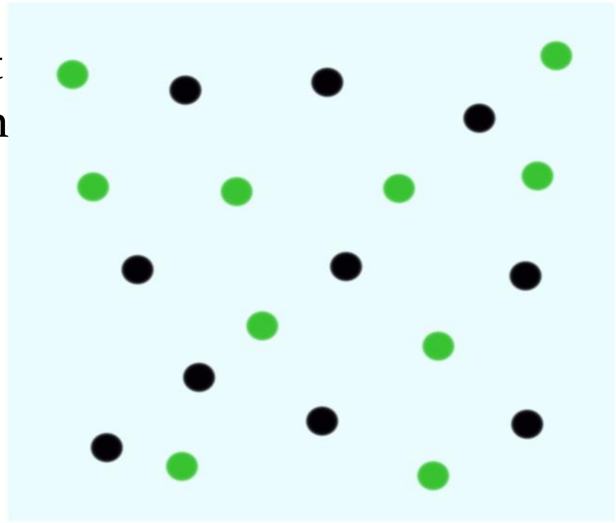
Evolutionäre Spieltheorie (II)

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner wechseln .



$x(0)=0.15$

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt t=0 das erste Mal das Spiel. Die Spieler wählen im Mittel zu 15% die grüne Strategie.



$x(10)=0.5$

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die Spieler zunehmend attraktiver. Zum Zeitpunkt t=10 spielen schon 50% grün.

I.2.1 Die Gleichungen der evolutionären Dynamik

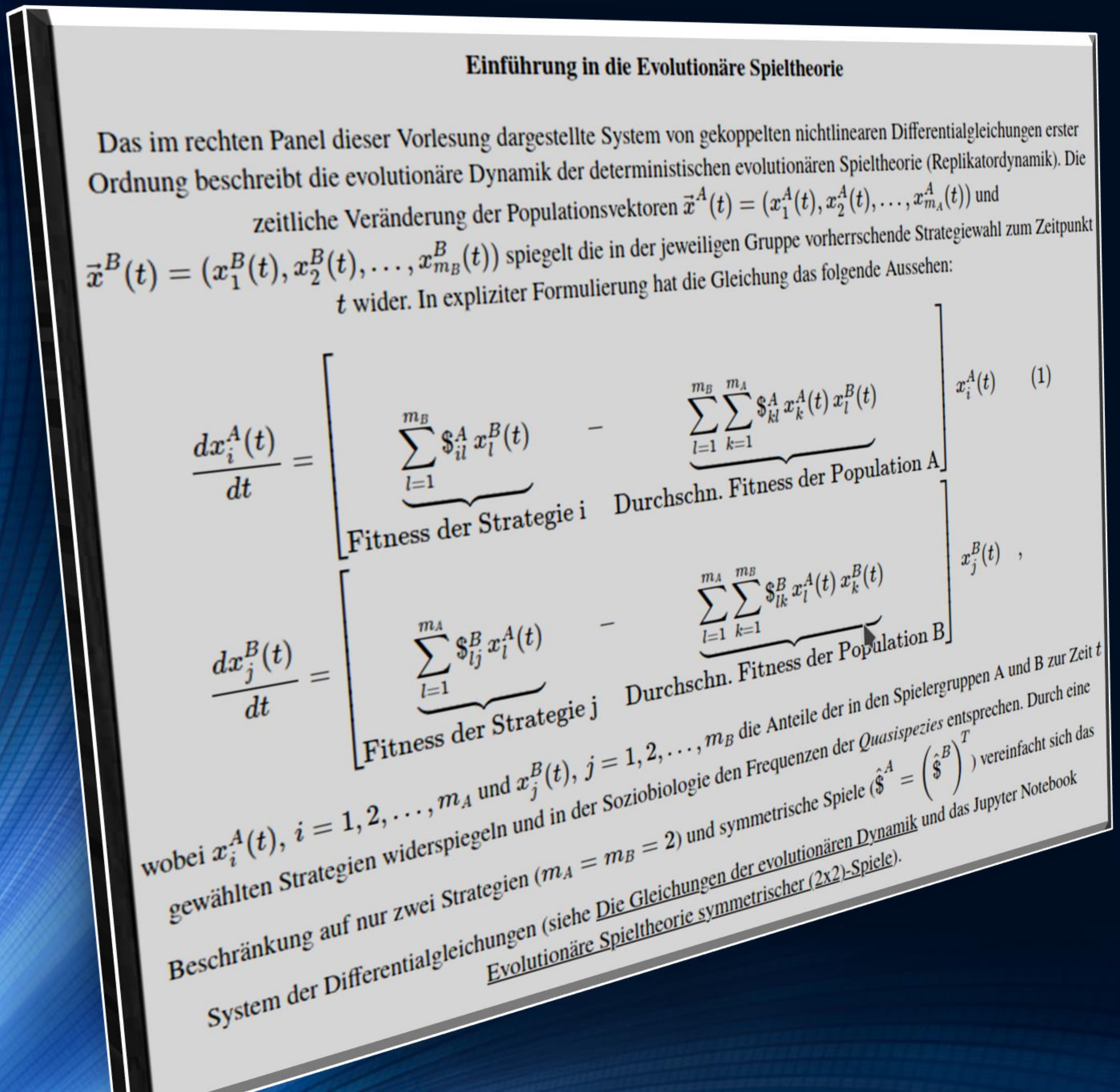
Dieses Kapitel fasst die wesentlichen Konzepte der deterministischen evolutionäre Spieltheorie zusammen. Die evolutionäre Spieltheorie untersucht das zeitliche Verhalten einer großen Anzahl von individuellen Spielern, der sogenannten Population (siehe [1,2,3,4]). Wir nehmen im folgenden zunächst an, dass die Population aus einer unendlichen Anzahl von individuellen Spieler besteht, die sich aus zwei separaten, unterscheidbaren Gruppen (A und B) zusammensetzt. Gegeben sei die strategische Form eines, zunächst noch unsymmetrischen (2 Personen)-(m Strategien) Spiels Γ. $x_i^\mu(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, m_\mu$ und $\mu = A, B$) seien die zeitabhängigen, gemittelten Anteile der Spieler innerhalb der Spielergruppe $\mu = A, B$, die die Strategie i wählen. Diese gruppenspezifischen Populationsvektoren ($\vec{x}^A(t) = (x_1^A(t), x_2^A(t), \ldots, x_{m_A}^A(t))$ und $\vec{x}^B(t) = (x_1^B(t), x_2^B(t), \ldots, x_{m_B}^B(t))$) unterliegen folgenden Normalisierungsbedingungen:

$$x_i^\mu(t) \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m_\mu} x_i^\mu(t) = 1 \quad \forall \; i = 1, 2, \ldots, m_\mu \;, \; t \in \mathbb{R}, \; \mu = A, B$$

Die gesamte Population spielt zu jedem Zeitpunkt das gleiche Spiel, wobei sich die einzelnen Spieler der Gruppe A mit Spielern der Gruppe B zufällig paaren, das simultane Spiel spielen, ihre erzielten Auzahlungen erhalten und dann erneut zufällig paaren. Eine Miteinbeziehung von zugrundeliegenden komplexen Netzwerkstrukturen, die eine nicht-zufällige Paarung in die Beschreibung mitaufnehmen, bzw. die Betrachtung einer endlichen Spielerpopulation erfordert meisst eine nicht analytische, nummerisch simulative Beschreibung; dies wird Gegenstand der Untersuchungen im Teil II und Teil III dieser Vorlesung sein.

Die zeitliche Veränderung der Populationsvektoren $\vec{x}^A(t)$ und $\vec{x}^B(t)$ spiegelt die in der Gruppe vorherschende Strategienwahl zum Zeitpunkt t wider und beschreibt demnach die evolutionäre Dynamik der interagierenden Menschengruppen. Die maßgeblichen Faktoren, die die evolutionäre Entwicklung bestimmen sind der Soziobiologie entnommen und basieren auf Reproduktion, Mutation und Selektion der Strategienentscheidungen. Die zugrundeliegende mathematische Beschreibung lehnt sich an die, in der theoretischen Biologie verwendete, sogenannte *Quasispezies-Gleichung* (siehe [1], S: 33) an und ist ein System nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit. Für das zuvor definierte evolutionäre Spiel besitzt die Differentialgleichung das folgende Aussehen:

Internetseite der 3. Vorlesung



Einführung in die Evolutionäre Spieltheorie

Das im rechten Panel dieser Vorlesung dargestellte System von gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung beschreibt die evolutionäre Dynamik der deterministischen evolutionären Spieltheorie (Replikatordynamik). Die zeitliche Veränderung der Populationsvektoren $\vec{x}^A(t) = (x_1^A(t), x_2^A(t), \dots, x_{m_A}^A(t))$ und $\vec{x}^B(t) = (x_1^B(t), x_2^B(t), \dots, x_{m_B}^B(t))$ spiegelt die in der jeweiligen Gruppe vorherrschende Strategiewahl zum Zeitpunkt t wider. In expliziter Formulierung hat die Gleichung das folgende Aussehen:

$$\frac{dx_i^A(t)}{dt} = \Bigg[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \$^A_{il}\, x_l^B(t)}_{\text{Fitness der Strategie i}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B}\sum_{k=1}^{m_A} \$^A_{kl}\, x_k^A(t)\, x_l^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population A}} \Bigg]\, x_i^A(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dx_j^B(t)}{dt} = \Bigg[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \$^B_{lj}\, x_l^A(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A}\sum_{k=1}^{m_B} \$^B_{lk}\, x_l^A(t)\, x_k^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population B}} \Bigg]\, x_j^B(t) \quad ,$$

wobei $x_i^A(t)$, $i = 1, 2, \dots, m_A$ und $x_j^B(t)$, $j = 1, 2, \dots, m_B$ die Anteile der in den Spielergruppen A und B zur Zeit t gewählten Strategien widerspiegeln und in der Soziobiologie den Frequenzen der *Quasispezies* entsprechen. Durch eine Beschränkung auf nur zwei Strategien ($m_A = m_B = 2$) und symmetrische Spiele ($\hat{\$}^A = \left(\hat{\$}^B\right)^T$) vereinfacht sich das System der Differentialgleichungen (siehe Die Gleichungen der evolutionären Dynamik und das Jupyter Notebook Evolutionäre Spieltheorie symmetrischer (2x2)-Spiele).

Im Folgenden wird das zeitabhängige Strategieverhalten einer Gruppe von Spielern untersucht. Die *evolutionäre Spieltheorie* betrachtet das zeitliche Verhalten einer ganzen Population von Spieler (unendliche Anzahl von Spielern $N \to \infty$). Die einzelnen Spieler der Population paaren sich zufällig und spielen ein simultanes $(2 \times m)$ Spiel, erhalten ihre erzielten Auszahlungen und paaren sich dann erneut um das gleiche Spiel immer wiederkehrend zu spielen. Gegeben sei die strategische Form eines, zunächst noch unsymmetrischen (2 Personen)-(m Strategien) Spiels Γ. $x_i^\mu(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m_\mu$ und $\mu = A, B$) seien die zeitabhängigen, gemittelten Anteile der Spieler innerhalb der Spielergruppe $\mu = A, B$, die die Strategie i wählen; sie entsprechen somit einer Art von gemischten Strategie der gesamten Populationsgruppe. Die zeitliche Veränderung der Populationsvektoren $\vec{x}^A(t)$ und $\vec{x}^B(t)$ spiegelt die in der Gruppe vorherrschende Strategiewahl zum Zeitpunkt t wider und sind durch folgende Differentialgleichung bestimmt (siehe Die Gleichungen der evolutionären Dynamik und *Schlee, Walter, Einführung in die Spieltheorie, Vieweg 2004, Seite 169-188)*):

$$\frac{d\vec{x}^A}{dt} = \hat{\mathbf{x}}^A \left(\hat{\$}^A \vec{x}^B \right) - \left(\left(\hat{\$}^A \vec{x}^B \right)^T \vec{x}^A \right) \vec{x}^A$$

$$\frac{d\vec{x}^B}{dt} = \hat{\mathbf{x}}^B \left(\left(\hat{\$}^B \right)^T \vec{x}^A \right) - \left(\left(\hat{\$}^B \vec{x}^B \right)^T \vec{x}^A \right) \vec{x}^B \quad ,$$

wobei $\hat{\mathbf{x}}^\mu := \mathrm{diag}\left(x_1^\mu(t), x_2^\mu(t), \dots, x_{m_\mu}^\mu(t)\right)$. Die maßgeblichen Faktoren, die die evolutionäre Entwicklung bestimmen sind der Soziobiologie entnommen und basieren auf Reproduktion, Mutation und Selektion der Strategieentscheidungen. Die zugrundeliegende mathematische Beschreibung und Herleitung der Gleichung lehnt sich an die, in der theoretischen Biologie verwendete, sogenannte *Quasispezies-Gleichung* (siehe M.A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life, 2006, S: 33) an.

$$\frac{dx_i^A(t)}{dt} = \Bigg[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \$_{il}^A \, x_l^B(t)}_{\text{Fitness der Strategie i}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{k=1}^{m_A} \$_{kl}^A \, x_k^A(t) \, x_l^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population A}} \Bigg] \, x_i^A(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dx_j^B(t)}{dt} = \Bigg[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \$_{lj}^B \, x_l^A(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \sum_{k=1}^{m_B} \$_{lk}^B \, x_l^A(t) \, x_k^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population B}} \Bigg] \, x_j^B(t) \quad ,$$

wobei $x_i^A(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m_A$ und $x_j^B(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m_B$ die Anteile der in den Spielergruppen A und B zur Zeit t gewählten Strategien widerspiegeln und in der Soziobiologie den Frequenzen der *Quasispezies* entsprechen.

Wir beschränken uns im folgenden auf den 2-Strategien Fall ($m_A = m_B = 2$), lassen jedoch weiter eine Unsymmetrie der Auszahlungsmatrix zu. Die beiden Komponenten der zweidimensionalen gruppenspezifischen Populationsvektoren lassen sich dann, aufgrund ihrer Normalisierungsbedingung, auf eine Komponente reduzieren ($x_2^A = 1 - x_1^A$ und $x_2^B = 1 - x_1^B$). Das zeitliche Verhalten der Komponenten der Populationsvektoren (Gruppe A: $x(t) := x_1^A(t)$ und Gruppe B: $y(t) := x_1^B(t)$) wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben (siehe z.B. [4], S:116 oder [3], S:69):

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[\left(\$_{11}^A + \$_{22}^A - \$_{12}^A - \$_{21}^A\right) y(t) + \left(\$_{12}^A - \$_{22}^A\right)\right] \left(x(t) - (x(t))^2\right) =: g_A(x,y)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[\left(\$_{11}^B + \$_{22}^B - \$_{12}^B - \$_{21}^B\right) x(t) + \left(\$_{21}^B - \$_{22}^B\right)\right] \left(y(t) - (y(t))^2\right) =: g_B(x,y)$$

Replikatordynamik

Wir beschränken uns zunächst auf symmetrische (2xM)-Spiele , d.h. zwei Personen - M Strategien Spiele. Da es sich um symmetrische Spiele handelt, sind alle Spieler gleichberechtigt und man kann von einer homogenen Population ausgehen.
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik beschreibt wie sich die einzelnen Populationsanteil der zur Zeit t gewählten Strategien $x_j(t)$, j=1,2,...M im Laufe der Zeit entwickeln.

$$\dot{x}_j(t) := \frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[\underbrace{\sum_{k=1}^{M} \$_{jk} \cdot x_k(t)} - \underbrace{\sum_{l=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t)} \right]$$

Wobei die Parameter $\$_{kl}$ die einzelnen Einträge in der Auszahlungsmatrix des 1.Spielers darstellen

$$\hat{\$} = \hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} \$_{11} & \$_{12} & \$_{13} & \dots & \$_{1M} \\ \$_{21} & \$_{22} & \$_{23} & \dots & \$_{2M} \\ \$_{31} & \$_{32} & \$_{33} & \dots & \$_{3M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \$_{M1} & \$_{M2} & \$_{M3} & \dots & \$_{MM} \end{pmatrix}$$

Fitness der Strategie j

Durchschnitt-licher Erfolg der j-ten Strategie

Durchschnittliche Fitness (Auszahlung) der gesamten Population

Replikatordynamik

(für symmetrische (2x2)-Spiele)

Wir beschränken uns nun auf symmetrische (2x2)-Spiele , d.h. zwei Personen - 2 Strategien Spiele (M=2). Die Differentialgleichung der Replikatordynamik vereinfacht sich unter dieser Annahme wie folgt:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[\sum_{k=1}^{2} \$_{jk} \cdot x_k(t) - \sum_{l=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t) \right]$$

$$\frac{dx_j}{dt} = x_j \cdot \left[\$_{j1} \cdot x_1 + \$_{j2} \cdot x_2 - \left(\$_{11} \cdot x_1 \cdot x_1 + \$_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \$_{21} \cdot x_2 \cdot x_1 + \$_{22} \cdot x_2 \cdot x_2 \right) \right]$$

Da es lediglich zwei Strategien und somit zwei Populationsanteile (x_1, x_2) gibt, können wir den zweiten Populationsanteil durch den ersten ausdrücken: $x_2 = 1 - x_1$
Wir setzen im Folgenden der Einfachheit halber $x = x_1$ und $1 - x = x_2$
und betrachten nur j=1.

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \left[\$_{11} \cdot x + \$_{12} \cdot (1-x) - \left(\$_{11} \cdot x \cdot x + \$_{12} \cdot x \cdot (1-x) + \$_{21} \cdot (1-x) \cdot x + \$_{22} \cdot (1-x) \cdot (1-x) \right) \right]$$

Nimmt man zusätzlich ein symmetrisches Spiel an ($\hat{\$} := \hat{\$}^A = \left(\hat{\$}^B\right)^T$), in welchem die Auszahlungswerte (Fitness-Werte) der Populationsgruppen gleich sind, so kann man die beiden Gruppen von ihrer mathematischen Struktur her als ununterscheidbare Spielergruppen mit identischen Populationsvektoren $x(t) = y(t)$ annehmen. Die Differentialgleichung schreibt sich dann wie folgt:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[(\$_{11} - \$_{21})(x - x^2) + (\$_{12} - \$_{22})(1 - 2x + x^2)\right] x(t) \; =: \; g(x) \qquad (3)$$

Verallgemeinert man diese Differentialgleichung wieder auf mehr als zwei Strategien, so kann man abkürzend die folgende Formulierung schreiben:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \hat{\mathbf{x}} \left(\hat{\$}\,\vec{x}\right) - \left(\left(\hat{\$}\,\vec{x}\right)^T \vec{x}\right) \vec{x}$$

Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Ein „einfaches“Beispiel

Ein einfaches Beispiel einer Differentialgleichung lautete:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(0)berechnen?

Analytische Lösung:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dx}{dt} = x \quad \Big| \cdot dt$$

$$dx = x \cdot dt \quad \Big| / x$$

$$\frac{1}{x} dx = dt \quad \Big| \int (\ldots)$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x} dx = \int_0^t dt$$

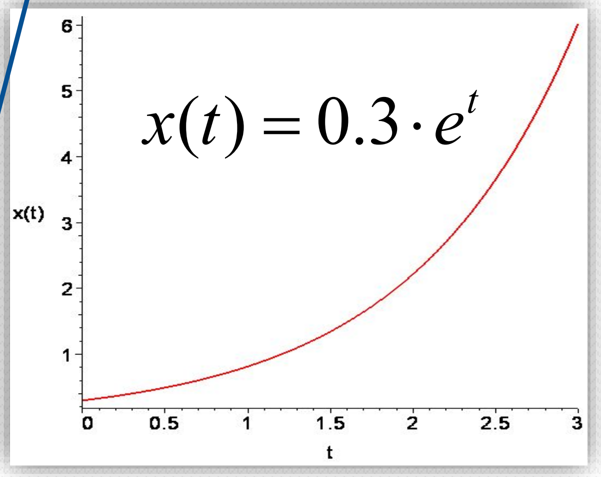
$$\ln(x(t)) - \ln(x(0)) = t$$

$$\ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right) = t \quad \Big| e^{(\ldots)}$$

$$e^{\ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)} = e^t$$

$$\frac{x(t)}{x(0)} = e^t \quad \Big| \cdot x(0)$$

$$x(t) = x(0) \cdot e^t$$



x(t), wobei x(0)=0.3

Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Beispiel 1

Beispiel 1	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das erste Beispiel lautete:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - \left(x(t)\right)^2$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(0)berechnen?

Analytische Lösung:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 \quad \Big| \cdot dt$$

$$dx = \left(x - x^2\right) \cdot dt \quad \Big| / \left(x - x^2\right)$$

$$\frac{1}{x - x^2} dx = dt \quad \Big| \int(\ldots)$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x - x^2} dx = \int_0^t dt$$

$$\ln(x(t)) - \ln(x(t)-1) - \left(\ln(x(0)) - \ln(x(0)-1)\right) = t$$

$$\ln\left(\frac{x(t)\cdot\left(x(0)-1\right)}{x(0)\cdot\left(x(t)-1\right)}\right) = t \quad \Big| e^{(\ldots)}$$

$$e^{\ln\left(\frac{x(t)\cdot\left(x(0)-1\right)}{x(0)\cdot\left(x(t)-1\right)}\right)} = e^t$$

$$\frac{x(t)\cdot\left(x(0)-1\right)}{x(0)\cdot\left(x(t)-1\right)} = e^t \quad \Big| \cdot \left(x(0)\cdot\left(x(t)-1\right)\right)$$

$$x(t)\cdot\left(x(0)-1\right) = x(0)\cdot x(t)\cdot e^t - x(0)\cdot e^t \quad \Big| - \left(x(0)\cdot x(t)\cdot e^t\right)$$

$$x(t)\cdot\left(x(0)-1-x(0)\cdot e^t\right) = -x(0)\cdot e^t \quad \Big| / \left(x(0)-1-x(0)\cdot e^t\right)$$

$$x(t) = \frac{-x(0)\cdot e^t}{x(0)-1-x(0)\cdot e^t} \Leftrightarrow x(t) = \frac{x(0)\cdot e^t}{1-x(0)+x(0)\cdot e^t}$$

Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Beispiel 1

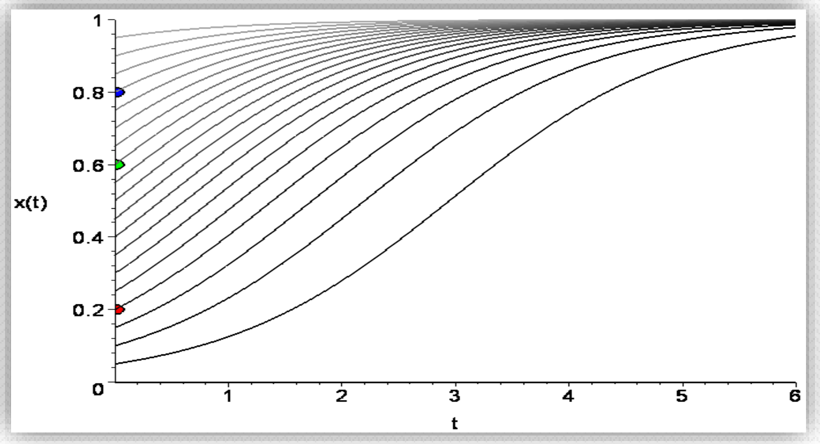
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das erste Beispiel lautete:

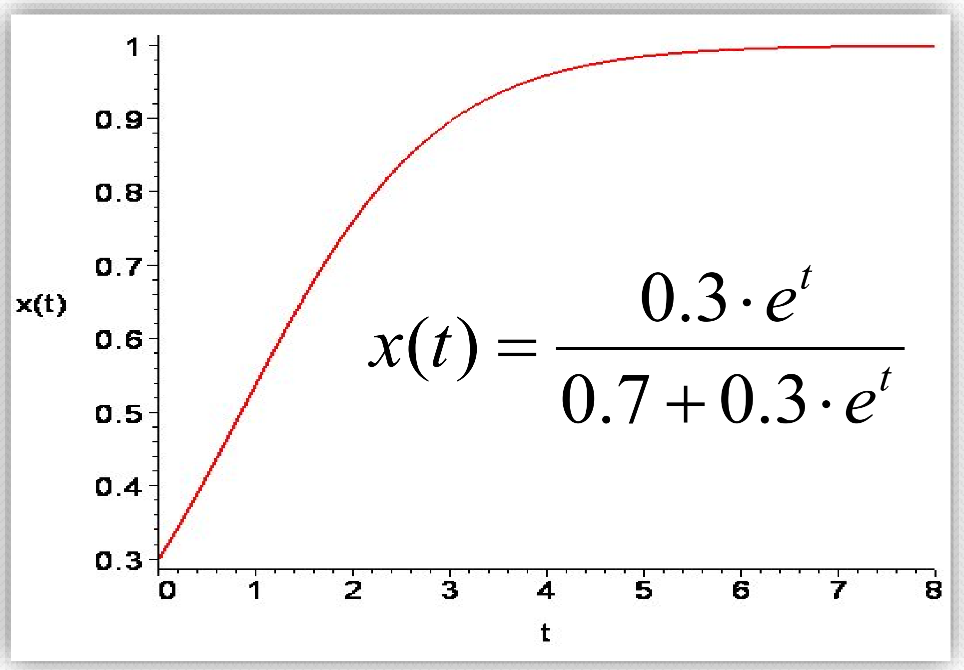
$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - (x(t))^2$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(0)berechnen?

Analytische Lösung:

$$x(t) = \frac{x(0)\cdot e^t}{1 - x(0) + x(0)\cdot e^t}$$





$$x(t) = \frac{0.3\cdot e^t}{0.7 + 0.3\cdot e^t}$$

x(t), wobei x(0)=0.3

Evolutionär stabile Strategien (ESS)

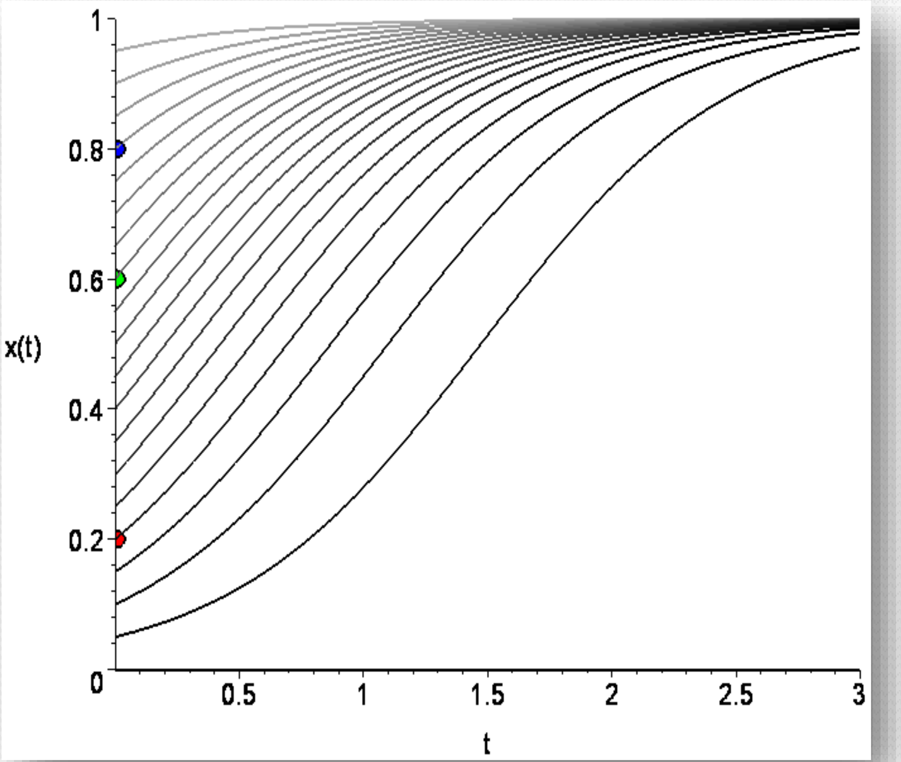
- Evolutionär stabile Strategien sind die stabilen Endzustände der Häufigkeitsverteilung x(t):

$$\underset{t\to\infty}{Limes}\big(x(t)\big)$$

Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Existenz einer ESS ist, dass diese ein Nash – Gleichgewicht des zugrundeliegenden Spiels ist.

Beispiel:
Gefangenendilemma ähnliche Spiele
Für die ESS des evolutionären Gefangenendilemma – Spiels ergibt sich:

$$\underset{t\to\infty}{Limes}\big(x(t)\big)=1 \quad\Rightarrow\quad \text{alle "gestehen"}$$



Def.: Evolutionär stabile Strategie

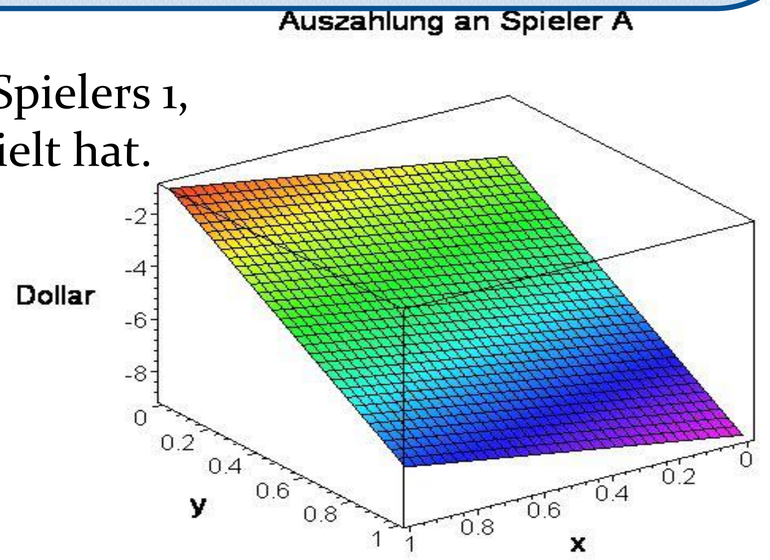
(Für symmetrisches Zweipersonen-Spiel)

Mathematische Definition (W.Schlee):
Gegeben sei ein symmetrisches Zweipersonen-Spiel Γ mit der Auszahlungsmatrix $\hat{\$} := \hat{\$}^1 = \left(\hat{\$}^2\right)^T$. Eine Strategie $s^* := s^{1*} = s^{2*}$ heißt evolutionär stabile Strategie (ESS), wenn

1. (s^*, s^*) ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht des Spiels ist, und
2. $\forall s$ mit der Eigenschaft $s \neq s^*$ und $s \in r(s^*)$ gilt $\$(s\ ,s\ ) < \$(s^*, s\ )$

$r(s^*)$ ist die Menge der besten Antworten des Spielers 1, wenn der andere Spieler die Strategie s^* gespielt hat.

Beispiel:	$s_1^2 \triangleq Ge$	$s_1^2 \triangleq Sc$
$s_1^1 \triangleq Ge$	(-7 , -7)	(-1 , -9)
$s_2^1 \triangleq Sc$	(-9 , -1)	(-3 , -3)



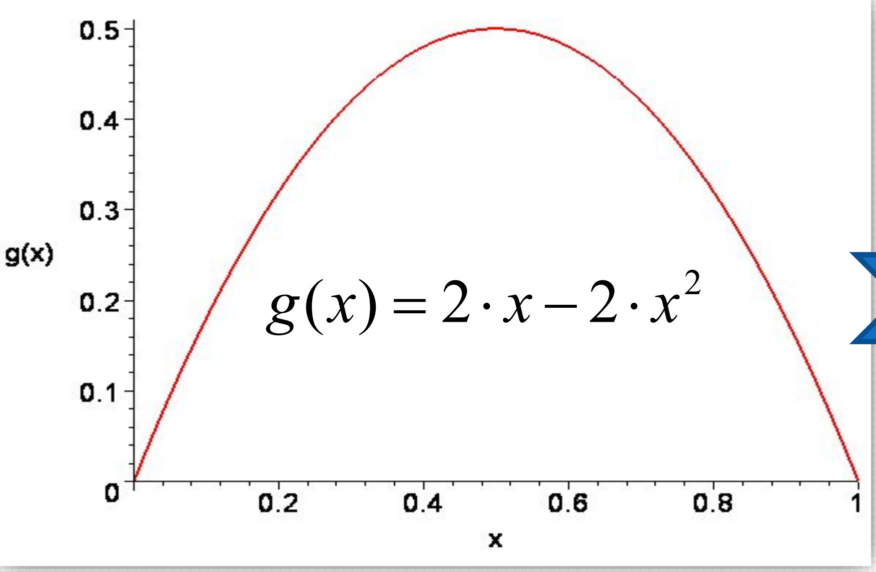
Replikatordynamik
(für das Gefangenendilemma)

	Ge	Sc
Ge	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Sc	(-9 , -1)	(-3 , -3)

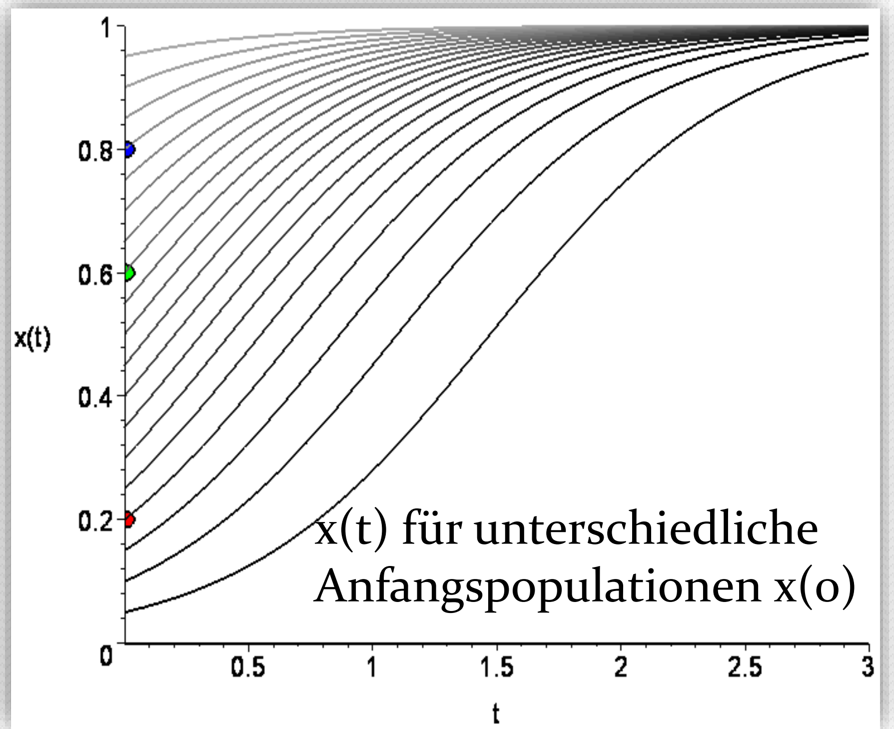
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Gefangenendilemma lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot x(t) - 2 \cdot (x(t))^2 = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((-7-(-9)) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (-3-(-1)) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2)\right)$$



Beispiel: Gefangenendilemma
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



Internetseite der 3. Vorlesung

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2025/26)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 22.08.2025

Erster Vorlesungsteil:

Evolutionäre Spieltheorie symmetrischer (2×2)-Spiele

Einführung

In diesem Python Notebook werden die Grundlagen der evolutionären Spieltheorie vorgestellt und die zeitabhängigen Lösungen symmetrischer (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiele berechnet. Zunächst wird das Python Modul "sympy" eingebunden, das ein Computer-Algebra-System für Python bereitstellt und symbolische Berechnungen und im speziellen Matrix-Berechnungen relativ einfach möglich macht.

In [1]:
```
from sympy import *
init_printing()
```

Die Gleichungen der evolutionären Dynamik

Die evolutionäre Spieltheorie untersucht das zeitliche Verhalten einer großen Anzahl von individuellen Spielern, der sogenannten Population (siehe [1,2,3,4]). Wir nehmen im folgenden zunächst an, dass die Population aus einer unendlichen Anzahl von individuellen Spieler besteht, die sich aus zwei separaten, unterscheidbaren Gruppen (A und B) zusammensetzt. Gegeben sei die strategische Form eines, zunächst noch unsymmetrischen (2 Personen)-(m Strategien) Spiels Γ. $x_i^\mu(t)$ $(i = 1, 2, \dots, m_\mu$ und

Einführung in die Evolutionäre Spieltheorie

Das im rechten Panel dieser Vorlesung dargestellte System von gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung beschreibt die evolutionäre Dynamik der deterministischen evolutionären Spieltheorie (Replikatordynamik). Die zeitliche Veränderung der Populationsvektoren $\vec{x}^A(t) = (x_1^A(t), x_2^A(t), \dots, x_{m_A}^A(t))$ und $\vec{x}^B(t) = (x_1^B(t), x_2^B(t), \dots, x_{m_B}^B(t))$ spiegelt die in der jeweiligen Gruppe vorherrschende Strategiewahl zum Zeitpunkt t wider. In expliziter Formulierung hat die Gleichung das folgende Aussehen:

$$\frac{dx_i^A(t)}{dt} = \left[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \$_{il}^A \, x_l^B(t)}_{\text{Fitness der Strategie i}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{k=1}^{m_A} \$_{kl}^A \, x_k^A(t) \, x_l^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population A}} \right] x_i^A(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dx_j^B(t)}{dt} = \left[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \$_{lj}^B \, x_l^A(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \sum_{k=1}^{m_B} \$_{lk}^B \, x_l^A(t) \, x_k^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population B}} \right] x_j^B(t) \quad ,$$

wobei $x_i^A(t)$, $i = 1, 2, \dots, m_A$ und $x_j^B(t)$, $j = 1, 2, \dots, m_B$ die Anteile der in den Spielergruppen A und B zur Zeit t gewählten Strategien widerspiegeln und in der Soziobiologie den Frequenzen der *Quasispezies* entsprechen. Durch eine Beschränkung auf nur zwei Strategien $(m_A = m_B = 2)$ und symmetrische Spiele $(\hat{\$}^A = \left(\hat{\$}^B\right)^T)$ vereinfacht sich das System der Differentialgleichungen (siehe Die Gleichungen der evolutionären Dynamik und das Jupyter Notebook Evolutionäre Spieltheorie symmetrischer (2x2)-Spiele).

Weiterführende Links

- Folien der 3.Vorlesung
- Vorlesungsaufzeichnung der 3.Vorlesung: WS 2022/23 bzw. WS 2021/22
- View Jupyter Notebook: Evolutionäre Spieltheorie symmetrischer (2x2)-Spiele
- Download Jupyter Notebook: Evolutionäre Spieltheorie symmetrischer (2x2)-Spiele