Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
24.10.2025

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

2. Vorlesung

Plan für die heutige Vorlesung

- Kurze Wiederholung der Vorlesung 1
- Definition: Nash-Gleichgewichte und Dominante Strategien
- Gemischte Erweiterung eines Spiels (gemischte Strategien)
- Gemischte Auszahlungsfunktion
- Gemischtes Nash-Gleichgewicht
- Gemischtes Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd und Angsthasen Spiel
- Nash-Gleichgewichte bei (2 Spieler)-(3 Strategien) Spielen
- Gemischtes Nash-Gleichgewicht im Stein-Schere-Papier Spiel

Einführung

Key Question

How can one theoretically describe the time dependent evolution of the strategic behavior of an entire group of decision makers?

Theoretical Models used to answer the question:

(Evolutionary) Game Theory

[von Neumann 1928, Nash 1950, Smith 1972, Weibull 1997, Szabó/Fáth 07]

Theory of complex networks

[Barabasi/Albert 02, Mendes/Dorogovtsev 02, Jackson 10]

I.1.1 Definition eines Spiels

Die formale mathematische Definition eines *Simultanen (N Spieler)-(m Strategien) Spiels in strategischer Form mit Auszahlung* (siehe z.B. [2,3]) benötigt lediglich die Angabe dreier Größen: Die Menge $\mathcal{I}$ der Spieler, die Menge (der Raum) $\mathcal{S}$ der Strategien der Spieler und ihre Auszahlungsfunktion (Präferenzordnungen) $\$$.

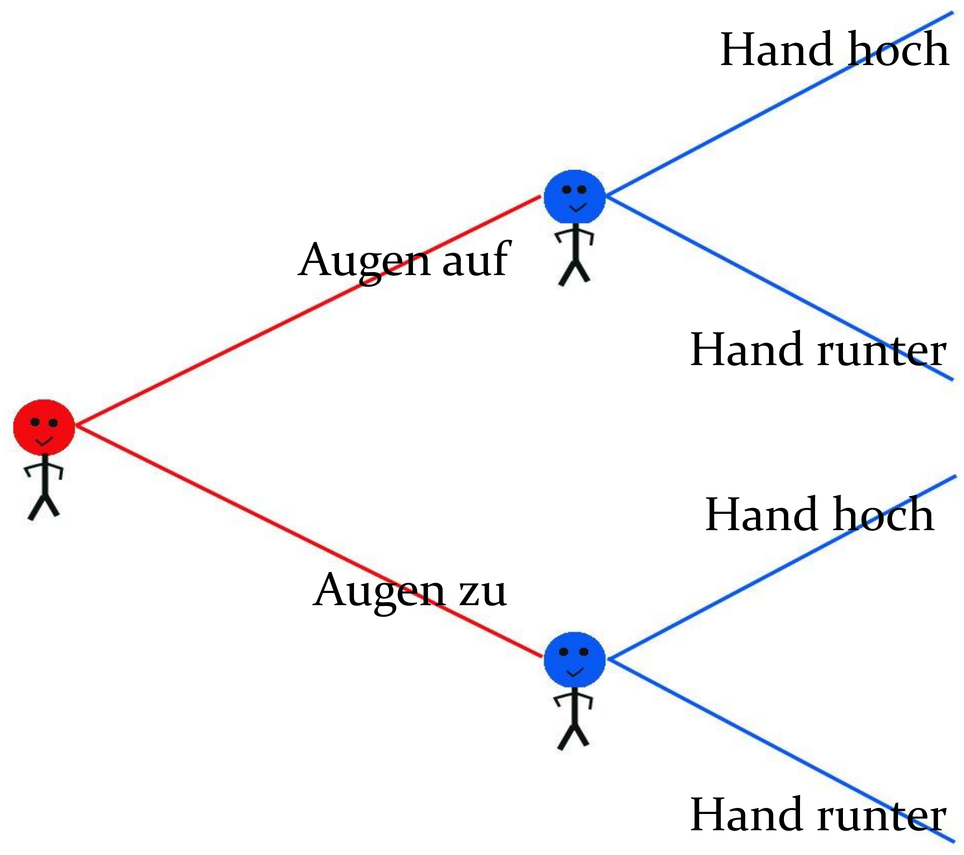
Ein Spiel $\Gamma := (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \$)$ in strategischer Form mit Auszahlung ist hinreichend definiert, wenn die folgenden drei Größen bekannt sind:

- Menge der Spieler: $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$
  Die Menge der Spieler $\mathcal{I}$ kann unter Umständen aus unterschiedlichen Teilmengen bestehen, die ihrerseits unterschiedliche Strategiemengen $\mathcal{S}$ besitzen. In sozio-ökonomischen Netzwerken stellen die Spieler die jeweiligen Knoten des Netzwerkes dar (näheres siehe Teil II).
- Menge der reinen Strategien der Spieler: $\mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^2 \times \dots \times \mathcal{S}^N$
  Jeder Spieler $\mu \in \mathcal{I}$ besitzt eine eigene Menge an reinen Strategien $\mathcal{S}^\mu = \left\{s_1^\mu, s_2^\mu, \dots, s_{m_\mu}^\mu\right\}$, wobei jede dieser m_μ Strategien eine für ihn mögliche Entscheidung darstellt.
- Präferenzordnungen der Spieler, quantifiziert durch eine vektorwertige Auszahlungsfunktion:
  $\$ = \left(\$^1, \$^2, \dots, \$^N\right) : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^N$
  Nachdem jeder Spieler (ohne die Entscheidung seiner Mitspieler zu kennen) eine Strategie aus seiner Strategienmenge $\mathcal{S}^\mu$ ausgewählt hat, beurteilt er die entstehende Strategienkombination $\mathcal{S}$ entsprechend seiner Präferenzordnung (Auszahlungsfunktion) $\$^\mu$.

Um diese formale Definition im einzelnen zu erklären, beschränken sich die folgenden Darlegungen auf den einfachsten Fall des simultanen

Einfaches Beispiel

	$s_1^2 \mathrel{\hat{=}} Hh$	$s_1^2 \mathrel{\hat{=}} Hr$
$s_1^1 \mathrel{\hat{=}} Aa$	(10 , 10)	(0 , 0)
$s_2^1 \mathrel{\hat{=}} Az$	(0 , 0)	(0 , 0)



$(2-\textit{Personen})-(2-\textit{Strategien})-\textit{Spiel} \quad \Gamma:$

$\Gamma := (\mathrm{A}, (\mathrm{S}^1, \mathrm{S}^2), (\$^1, \$^2))$

Menge der Spieler : $\mathrm{A} = \{1,2\} = \{\text{Alice, Bob}\}$

Strategienmenge des 1 - ten Spielers (Alice) :

$\mathrm{S}^1 = \{s_1^1, s_2^1\} = \{\text{Augen auf , Augen zu}\}$

Strategienmenge des 2 - ten Spielers :

$\mathrm{S}^2 = \{s_1^2, s_2^2\} = \{\text{Hand hoch, Hand runter}\}$

Auszahlungsfunktion des 1 - ten Spielers :

$\$^1 : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2 \rightarrow \Re \quad \text{mit}$

$\$^1(\text{Augen auf, Hand hoch}) = 10$

$\$^1(\text{Augen auf, Hand runter}) = 0$

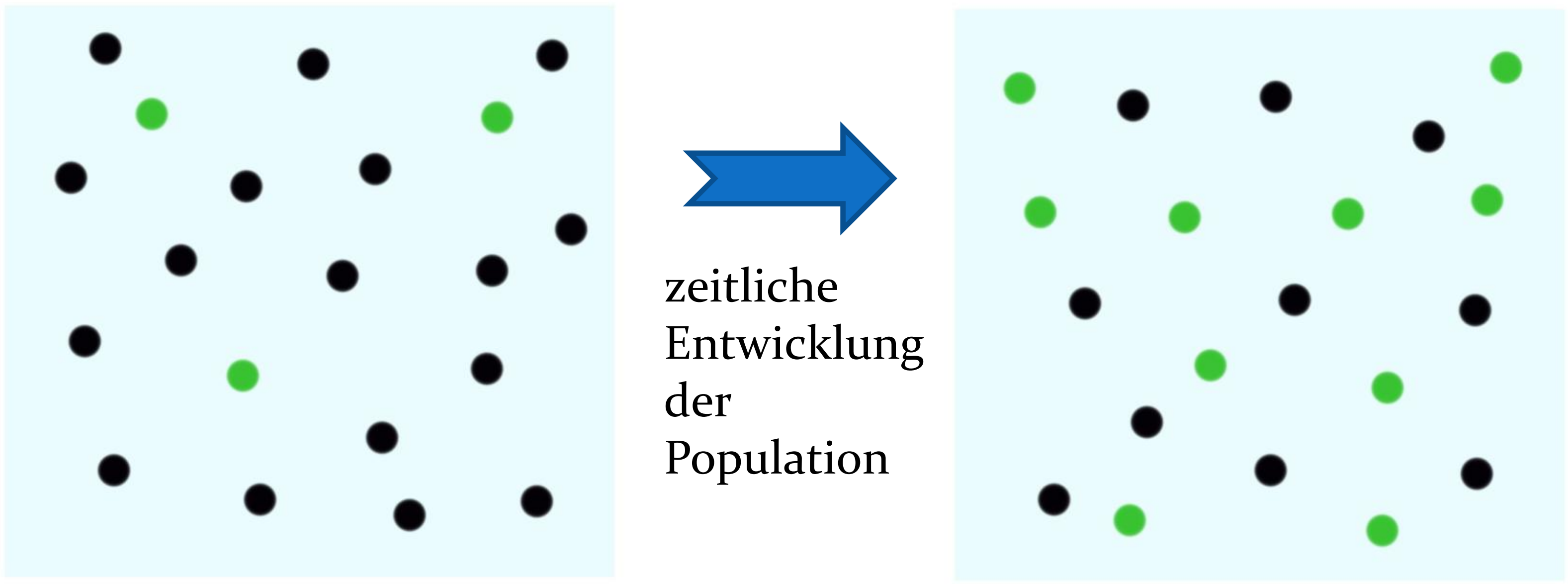
$\$^1(\text{Augen zu, Hand hoch}) = 0$

$\$^1(\text{Augen zu, Hand runter}) = 0$

Auszahlungsfunktion des 2. Spielers wie 1.

Evolutionäre Spieltheorie

Die evolutionäre Spieltheorie betrachtet die zeitliche Entwicklung des strategischen Verhaltens einer gesamten Spielerpopulation.



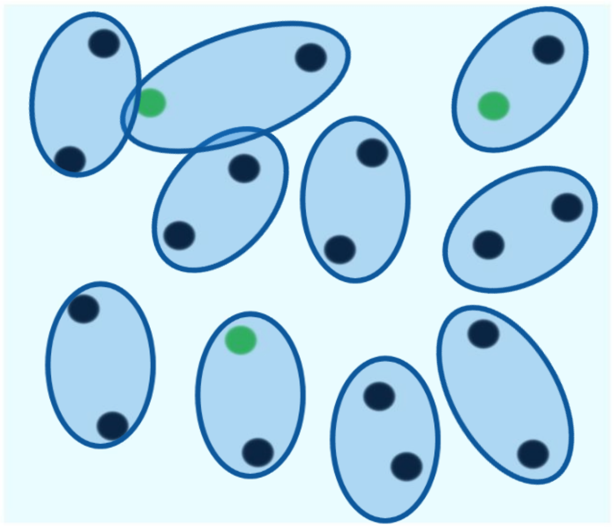
x(0)=0.15

x(10)=0.5

Mögliche Strategien: (grün , schwarz), Parameter t stellt die „Zeit" dar.
x(t) : Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün" spielen.

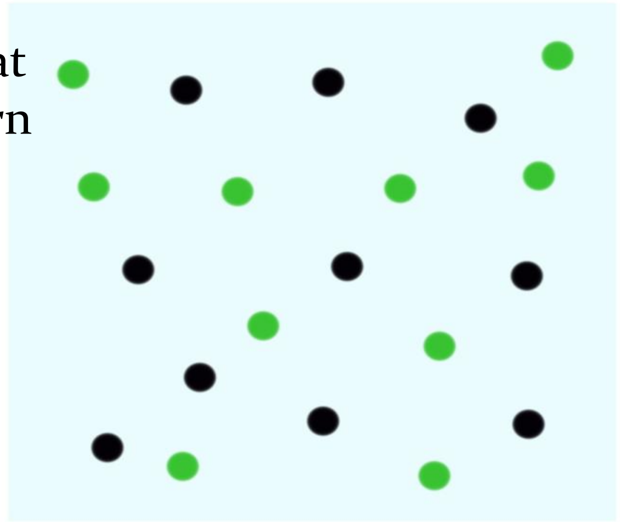
Evolutionäre Spieltheorie

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner wechseln .



x(0)=0.15

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt t=0 das erste Mal das Spiel. Die Spieler wählen im Mittel zu 15% die grüne Strategie.



x(10)=0.5

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die Spieler zunehmend attraktiver. Zum Zeitpunkt t=10 spielen schon 50% grün.

Wir spielen ein Spiel (Spiel 1)

Spieler B Spieler A	Strategie 1 Ohne Kugel	Strategie 2 Mit Kugel
Strategie 1 Ohne Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Strategie 2 Mit Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Wir spielen ein Spiel (Spiel 2)

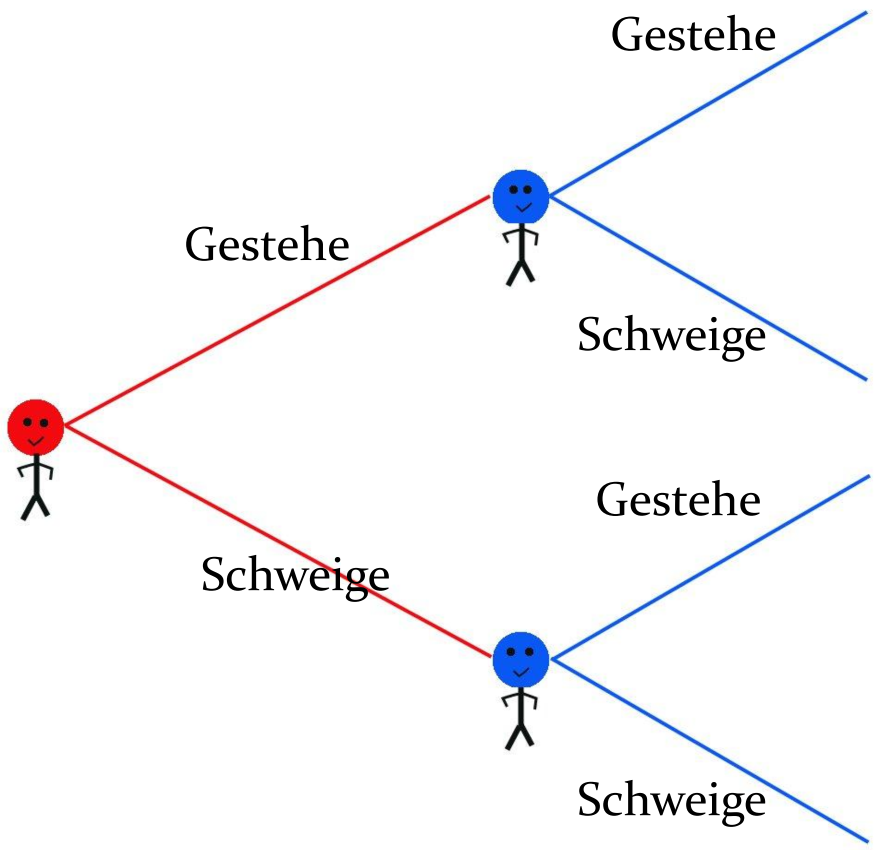
Spieler B Spieler A	Strategie 1 Ohne Kugel	Strategie 2 Mit Kugel
Strategie 1 Ohne Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Strategie 2 Mit Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

Wir spielen ein Spiel (Spiel 3)

Spieler B Spieler A	Strategie 1 Ohne Kugel	Strategie 2 Mit Kugel
Strategie 1 Ohne Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Strategie 2 Mit Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

Das Gefangenendilemma

	G	S
G	(-7 , -7)	(-1 , -9)
S	(-9 , -1)	(-3 , -3)



Bonnie und Clyde werden nach einem missglückten Banküberfall geschnappt und in verschiedenen Zellen untergebracht. Wenn beide schweigen kann der Staatsanwalt sie nur wegen verbotenen Waffenbesitzes für drei Jahre hinter Gitter bringen. Verrät jedoch einer den anderen, dann bekommt der Geständige als Zeuge der Anklage nur für ein Jahr hinter Gitter – der Nichtgeständige muss dann aber für neun Jahre ins Gefängnis. Gestehen beide, so müssen sie sieben Jahre absitzen.

Definition: Dominante Strategie

Im Folgenden werden zwei fundamentale Gleichgewichtskonzepte der Spieltheorie vorgestellt. Wir beschränken uns wieder auf ein *Simultanes (N Spieler)-(m Strategien) Spiel in strategischer Form mit Auszahlung*. Eine Strategienkombination aller Spieler $\boldsymbol{s} = \left(s^1, s^2, .., s^N\right) \in \mathcal{S}$ setzt sich aus der gewählten Strategie des μ-ten Spielers $s^\mu \in \mathcal{S}^\mu$ und der Strategienkombination aller Spieler mit Ausnahme des μ-ten Spielers $\boldsymbol{s}^{-\mu} := \left(s^1, s^2, .., s^{\mu-1}, s^{\mu+1}, .., s^N\right) \in \mathcal{S}^{-\mu}$ zusammen; also $\boldsymbol{s} = \left(s^\mu, \boldsymbol{s}^{-\mu}\right) \in \mathcal{S} = \mathcal{S}^\mu \times \mathcal{S}^{-\mu}$.

Eine Strategienkombination $\boldsymbol{s}^\dagger = \left(s^{1\dagger}, s^{2\dagger}, .., s^{N\dagger}\right)$ ist ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, wenn die folgenden Bedingung für alle $\mu \in \mathcal{I}$ erfüllt ist:

$$\text{Gleichgewicht in dominanten Strategien:}$$
$$\$^\mu\left(s^{\mu\dagger}, \boldsymbol{s}^{-\mu}\right) \;\geq\; \$^\mu\left(s^\mu, \boldsymbol{s}^{-\mu}\right) \quad \forall\;\; \mu \in \mathcal{I} \;\text{ und }\; \forall\;\; \boldsymbol{s} = \left(s^\mu, \boldsymbol{s}^{-\mu}\right) \in \mathcal{S}$$

Beispiel: Die dominante Strategie im Gefangenendilemma

	Spieler B Gestehe S_1	Spieler B Gestehe nicht S_2
Spieler A Gestehe S_1	$(-7\ ,\ -7)$	$(-1\ ,\ -9)$
Spieler A Gestehe nicht S_2	$(-9\ ,\ -1)$	$(-3\ ,\ -3)$

Spieler A: $\$^A\!: \ S^A \times S^B \rightarrow \mathfrak{R}$

$\$^A(S_1, S_1) = -7 \geq -9 = \$^A(S_2, S_1)$

$\$^A(S_1, S_2) = -1 \geq -3 = \$^A(S_2, S_2)$

Spieler B: $\$^B\!: \ S^A \times S^B \rightarrow \mathfrak{R}$

$\$^B(S_1, S_1) = -7 \geq -9 = \$^B(S_1, S_2)$

$\$^B(S_2, S_1) = -1 \geq -3 = \$^B(S_2, S_2)$

Das Nash-Gleichgewicht

Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategienkombination, von der aus kein Spieler einen Vorteil erhalten würde, wenn er von seiner Strategie abweicht. Die Spieler würden keine größere Auszahlung erhalten.

Jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien ist auch ein Nash Gleichgewicht

	Spieler B **Gestehe**	Spieler B **Gestehe nicht**
Spieler A **Gestehe**	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Spieler A **Gestehe nicht**	(-9 , -1)	(-3 , -3)

Definition: Nash-Gleichgewicht

Eine Strategienkombination $s^* = \left(s^{1*}, s^{2*}, .., s^{N*}\right)$ nennt man ein Nash-Gleichgewicht, falls die folgenden Bedingung für alle $\mu \in \mathcal{I}$ gilt:

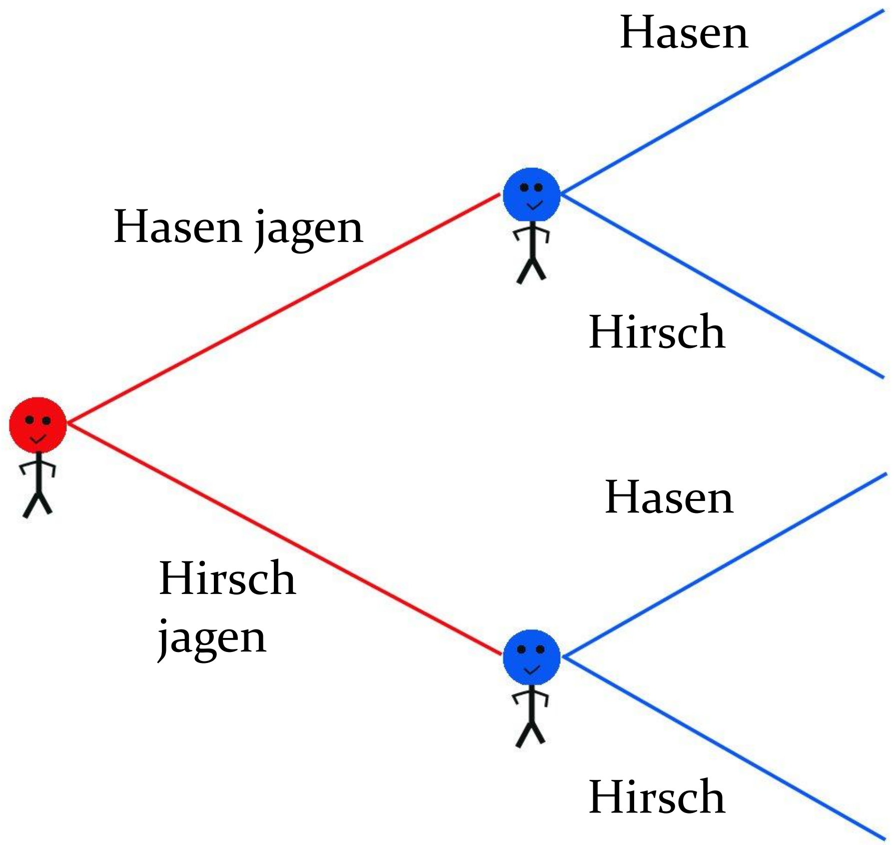
Nash-Gleichgewicht:

$$\$^\mu \left(s^{\mu *}, s^{-\mu *}\right) \;\geq\; \$^\mu \left(s^{\mu}, s^{-\mu *}\right) \quad \forall \;\mu \in \mathcal{I} \;\text{ und }\; \forall \;\; s^\mu \in \mathcal{S}^\mu$$

Ein Nash-Gleichgewicht ist demnach eine Strategienkombination, von der aus kein Spieler einen Vorteil erhalten würde, wenn er von seiner Strategie abweichen würde - er würde keine größere Auszahlung erhalten. Es gilt, dass jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien auch ein Nash-Gleichgewicht ist. Im folgenden werden die beiden definierten Gleichgewichtskonzepte am Beispiel zweier simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiele illustriert.

Rousseaus Hirschjagd - Spiel

	Hasen	Hirsch
Hasen	(2 , 2)	(4 , 0)
Hirsch	(0 , 4)	(5 , 5)



Zwei Jägern ist es im Laufe der Jagd gelungen einen Hirsch und vier Hasen einzukreisen. Die Jäger stehen nun vor der Entscheidung die Hasen entkommen zu lassen und gemeinsam den Hirsch zu erlegen oder sofort das Feuer auf die Hasen zu eröffnen. Entscheiden sich beide dafür den Hirsch zu erlegen, dann hat der Hirsch keine Chance. Einen Hirsch kann man für 10 Goldmünzen verkaufen. Entscheiden sich beide für die Hasenjagd, dann erschießt jeder Jäger zwei Hasen, für die man jeweils eine Goldmünze bekommt. Entscheidet sich jedoch nur einer für die Hirschjagd, so kann der Hirsch entkommen und derjenige der sich für die Hasenjagd entschieden hat kann alle vier Hasen erlegen.

Zwei Nash-Gleichgewichte im Hirschjagd-Spiel

	Spieler B **Hasen** jagen	Spieler B **Hirsch** jagen
Spieler A **Hasen** jagen	(2 , 2)	(4 , 0)
Spieler A **Hirsch** jagen	(0 , 4)	(5 , 5)

Beispiel: Nash-Gleichgewichte im Hirschjagd-Spiel

	Spieler B **Hasen** jagen S1	Spieler B **Hirsch** jagen S2
Spieler A **Hasen** jagen S1	(2 , 2)	(4 , 0)
Spieler A **Hirsch** jagen S2	(0 , 4)	(5 , 5)

Beweis: (S1, S1) ist ein Nash-Gleichgewicht des Spiels

Spieler A: $\$^A: \; S^A \times S^B \rightarrow \Re$

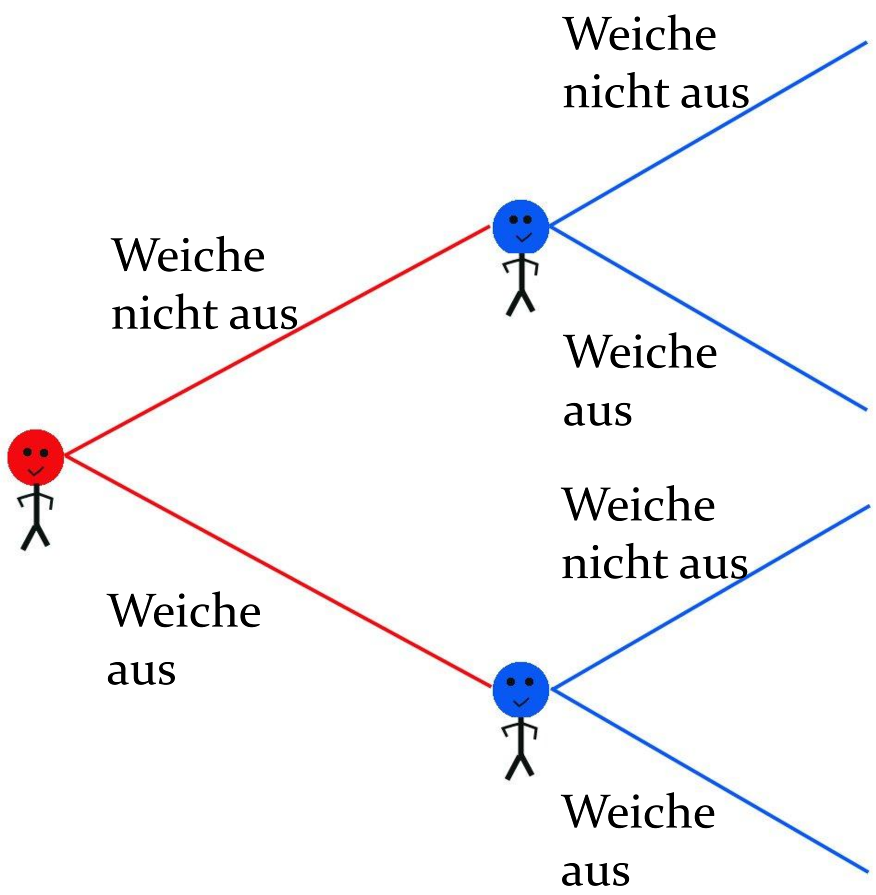
$\$^A(S1, S1) = 2 \geq 0 = \$^A(S2, S1)$

Spieler B: $\$^B: \; S^A \times S^B \rightarrow \Re$

$\$^B(S1, S1) = 2 \geq 0 = \$^B(S1, S2)$

Das Angsthasen-Spiel (Chicken Game)

	Weiche nicht aus	Weiche aus
Weiche nicht aus	(-10 , -10)	(2 , 0)
Weiche aus	(0 , 2)	(1 , 1)



Auf einer einsamen Landstraße in Indien, bei der es nur eine geteerte Fahrbahn gibt, kommen sich zwei Autos mit hoher Geschwindigkeit entgegen. Beide Fahrer stehen nun vor der Entscheidung ob sie dem Anderen die Fahrbahn überlassen und Ausweichen oder mit hoher Geschwindigkeit weiterfahren, um zu hoffen, dass der Andere ausweicht.

Eine weitere Deutung des *Angsthasen-Spiel* basiert auf dem Film von Nicholas Ray "Denn sie wissen nicht, was sie tun" aus dem Jahre 1955 (mit James Dean): "Jimbo und sein Erzfeind Buzz machen eine Mutprobe und rasen in ihren Autos auf eine Klippe zu. Derjenige ist der Angsthase, der als erster aus seinem Auto herausspringt."

Die obere Abbildung zeigt eine mögliche Tabelle der "Auszahlungen" für die Version der aufeinander zusteuernden Autos auf der Landstraße.

Zwei Nash Gleichgewichte in reinen Strategien im Angsthasen Spiel

	Spieler B Weiche nicht aus	Spieler B Weiche aus
Spieler A Weiche nicht aus	(-10 , -10)	(2 , 0)
Spieler A Weiche aus	(0 , 2)	(1 , 1)

Beispiel: Das Angsthasen-Spiel (Chicken Game)

Das *Angsthasen-Spiel* ist ein simultanes (2 Personen)-(2 Strategien) Spiel und kann z.B. mittels der folgenden Geschichte illustriert werden (siehe z.B. S.16 in [2]). "Auf einer einsamen Landstraße in Indien, bei der es nur eine geteerte Fahrbahn gibt, kommen sich zwei Autos mit hoher Geschwindigkeit entgegen. Beide Fahrer stehen nun vor der Entscheidung ob sie dem Anderen die Fahrbahn überlassen und Ausweichen oder mit hoher Geschwindigkeit weiterfahren um zu hoffen, dass der Andere ausweicht." Eine weitere Deutung des *Angsthasen-Spiel* basiert auf dem Film von Nicholas Ray "Denn sie wissen nicht was sie tun" aus dem Jahre 1955 (mit James Dean): "Jimbo und sein Erzfeind Buzz machen eine Mutprobe und rasen in ihren Autos auf eine Klippe zu. Derjenige ist der Angsthase, der als erster aus seinem Auto herrausspringt."

Ähnliche Spiele: Das Spiel mit dem Untergang, das Falke-Taube Spiel

Beispiel eines (2 Personen)-(3 Strategien) Spiels:

Schere-Stein-Papier

$(2-\mathit{Personen})-(3-\mathit{Strategien})-\mathit{Spiel} \quad \Gamma:$

$\Gamma := (\mathrm{A}, (\mathrm{S}^1, \mathrm{S}^2), (\$^1, \$^2))$

Menge der Spieler : $\mathrm{A} = \{1,2\} = \{\mathrm{Alice}, \mathrm{Bob}\}$

Strategienmenge des 1 - ten Spielers (Alice) :

$\mathrm{S}^1 = \{s_1^1, s_2^1, s_3^1\} = \{\mathit{Stein}, \mathit{Schere}, \mathit{Papier}\}$

Strategienmenge des 2 - ten Spielers :

$\mathrm{S}^2 = \{s_1^1, s_2^1, s_3^1\} = \{\mathit{Stein}, \mathit{Schere}, \mathit{Papier}\}$

Auszahlungsfunktion des 1. und 2. Spielers :

$\$^1 : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2 \rightarrow \Re$ und $\$^2 : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2 \rightarrow \Re$ mit

$\$^1(\mathit{Stein}, \mathit{Stein}) = 0$ und $\$^2(\mathit{Stein}, \mathit{Stein}) = 0$

$\$^1(\mathit{Stein}, \mathit{Schere}) = 1$ und $\$^2(\mathit{Stein}, \mathit{Schere}) = -1$

$\$^1(\mathit{Stein}, \mathit{Papier}) = -1$ und $\$^2(\mathit{Stein}, \mathit{Papier}) = 1$

...

	Stein	Schere	Papier
Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Beispiel: Zwei Spieler – drei Strategien

Gibt es eine dominante Strategie? Geben Sie die Nash-Gleichgewichte an.

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(1 , 3)	(2 , 7)	(3 , 9)
Strategie 2	(2 , 1)	(3 , 1)	(3 , 8)
Strategie 3	(3 , 1)	(2 , 1)	(5 , 3)

(Strategie 3 , Strategie 3) !

Die Strategienkombination (**Strategie 3** , **Strategie 3**) ist das einzige Nash-Gleichgewicht dieses unsymmetrischen Spiels. Es gibt keine dominante Strategie.

	Strategie 1	**Strategie 2**	**Strategie 3**
Strategie 1	(1 , 3)	(2 , 7)	(3 , 9)
Strategie 2	(2 , 1)	(3 , 1)	(3 , 8)
Strategie 3	(3 , 1)	(2 , 1)	(5 , 3)

Mathematische Überprüfung des Nash-Gleichgewichtes

Behauptung:
(S3,S3) ist Nash-Gleichgewicht.

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(1 , 3)	(2 , 7)	(3 , 9)
Strategie 2	(2 , 1)	(3 , 1)	(3 , 8)
Strategie 3	(3 , 1)	(2 , 1)	(5 , 3)

Beweis:

Spieler A: $\$^A\text{: } S^A \times S^B \to \Re$

$\$^A(S3, S3) = 5 \geq 3 = \$^A(S2, S3)$

$\$^A(S3, S3) = 5 \geq 3 = \$^1(S1, S3)$

Spieler B: $\$^B\text{: } S^A \times S^B \to \Re$

$\$^B(S3, S3) = 3 \geq 1 = \$^B(S3, S2)$

$\$^B(S3, S3) = 3 \geq 1 = \$^B(S3, S1)$

Schere-Stein-Papier

Kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien!

Es gibt keine dominante Strategie und auch keine Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien

	Stein	**Schere**	**Papier**
Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Gemischte Strategien

Die Menge der gemischten Strategien der Spieler $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}^1 \times \tilde{\mathcal{S}}^2 \times \ldots \times \tilde{\mathcal{S}}^N$ setzt sich aus den einzelnen Mengen der gemischten Strategien der Spieler zusammen. Die Menge der gemischten Strategien des Spielers $\mu \in \mathcal{I}$ ($\tilde{\mathcal{S}}^\mu$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien $\mathcal{S}^\mu$ verstanden werden, wobei die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien des Spielers μ aus m_μ reellwertigen Zahlen bestehen, die folgenden Normalisierungsbedingungen unterliegen:

$$\tilde{\mathcal{S}}^\mu = \left\{ (\tilde{s}_1^\mu, \tilde{s}_2^\mu, \ldots, \tilde{s}_{m_\mu}^\mu) \mid \sum_{i=1}^{m_\mu} \tilde{s}_i^\mu = 1, \tilde{s}_i^\mu \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m_\mu \right\}$$

Auszahlungsfunktion in gemischten Strategien

Die einzelnen Werte $\tilde{s}_i^\mu$ können als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie i interpretiert werden. Unter Verwendung der gemischten Strategien lässt sich eine gemischte Auszahlungsfunktion der Spieler wie folgt definieren:

$$\tilde{\$} = \left(\tilde{\$}^1, \tilde{\$}^2, \ldots, \tilde{\$}^N\right) : \tilde{\mathcal{S}} \to \mathbb{R}^N \,, \text{ wobei } \quad \tilde{\$}^\mu(\tilde{s}^1, \tilde{s}^2, \ldots, \tilde{s}^N) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \ldots \sum_{i_N=1}^{m_N} \$^\mu(s_{i_1}^1, s_{i_2}^2, \ldots, s_{i_N}^N) \prod_{\nu=1}^{N} \tilde{s}_{i_\nu}^\nu$$

Im folgenden wird das Konzept der gemischten Erweiterung für den Fall eines (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels illustrieren. Die Menge der gemischten Strategien des Spielers A ($\tilde{\mathcal{S}}^A$) und B ($\tilde{\mathcal{S}}^B$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien ($\mathcal{S}^A$ und $\mathcal{S}^B$) verstanden werden. Die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien eines Spielers $\mu = A, B$ ($\tilde{\mathbf{s}}^\mu = (\tilde{s}_1^\mu, \tilde{s}_2^\mu) \in \mathcal{S}^\mu$) besteht aus zwei reellwertigen Zahlen ($\tilde{s}_1^\mu \in [0,1]$ und $\tilde{s}_2^\mu \in [0,1]$) und kann als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie 1 ($\tilde{s}_1^\mu$) bzw. der Strategie 2 ($\tilde{s}_2^\mu$) interpretiert werden. Desweiteren gilt die folgende Normalisierungsbedingung: $\tilde{s}_1^\mu + \tilde{s}_2^\mu = 1 \; \forall \, \mu = A, B$. Unter Verwendung der Auszahlungsmatrizen des Spielers A ($\hat{\$}^A$) und B ($\hat{\$}^B$) schreibt sich die gemischte Auszahlungsfunktion des Spielers $\mu = A, B$ wie folgt:

$$\tilde{\$}^\mu : \left(\tilde{\mathcal{S}}^A \times \tilde{\mathcal{S}}^B\right) \to \mathbb{R}$$

$$\tilde{\$}^\mu((\tilde{s}_1^A, \tilde{s}_2^A), (\tilde{s}_1^B, \tilde{s}_2^B)) = \$_{11}^\mu \tilde{s}_1^A \tilde{s}_1^B + \$_{12}^\mu \tilde{s}_1^A \tilde{s}_2^B + \$_{21}^\mu \tilde{s}_2^A \tilde{s}_1^B + \$_{22}^\mu \tilde{s}_2^A \tilde{s}_2^B$$

Gemischte Auszahlungsfunktion im (2x2)-Spiel

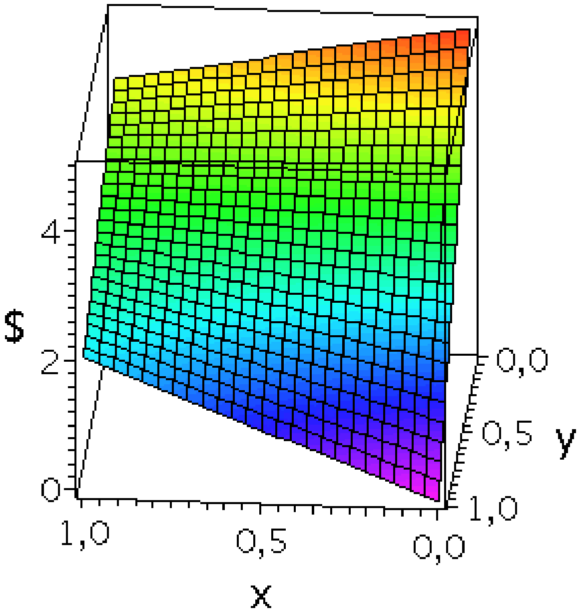
Aufgrund der Normalisierungsbedingung vereinfacht sich die gemischte Auszahlungsfunktion wie folgt:

$$\tilde{\$}^{\mu} : ([0,1] \times [0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{\$}^{\mu}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B}) = \$^{\mu}_{11}\tilde{s}^{A}\tilde{s}^{B} + \$^{\mu}_{12}\tilde{s}^{A}(1-\tilde{s}^{B}) + \$^{\mu}_{21}(1-\tilde{s}^{A})\tilde{s}^{B} + \$^{\mu}_{22}(1-\tilde{s}^{A})(1-\tilde{s}^{B})$$

, wobei $\tilde{s}^{A} := \tilde{s}^{A}_{1}$, $\tilde{s}^{B} := \tilde{s}^{B}_{1}$, $\tilde{s}^{A}_{2} = 1 - \tilde{s}^{A}_{1}$ und $\tilde{s}^{B}_{2} = 1 - \tilde{s}^{B}_{1}$.

Auszahlung an Spieler A



Auszahlungsfunktionen im Hirschjagt-Spiel

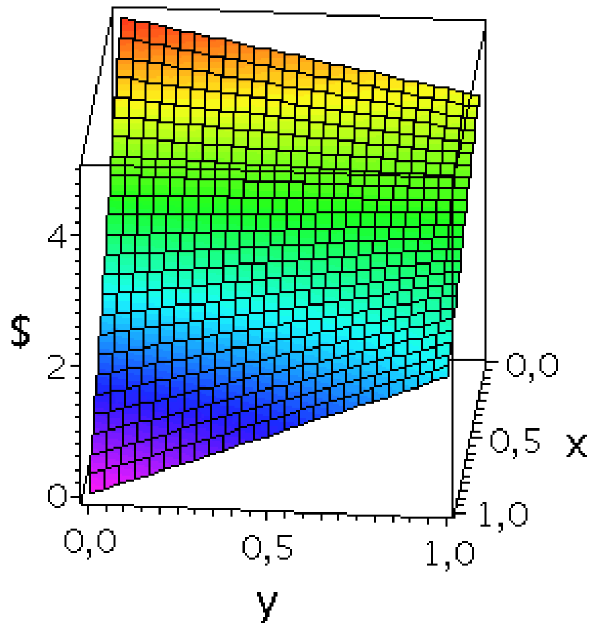
$$\tilde{\$}^{A}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B}) = \tilde{\$}^{A}(x, y)$$

$$\tilde{\$}^{B}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B}) = \tilde{\$}^{B}(x, y)$$

$$x, y \in [0,1]$$

	Spieler B **Hasen** jagen	Spieler B **Hirsch** jagen
Spieler A **Hasen** jagen	(2 , 2)	(4 , 0)
Spieler A **Hirsch** jagen	(0 , 4)	(5 , 5)

Auszahlung an Spieler B



Gemischte Auszahlungsfunktion im (2x2)-Spiel
Beispiel Hirschjagd-Spiel

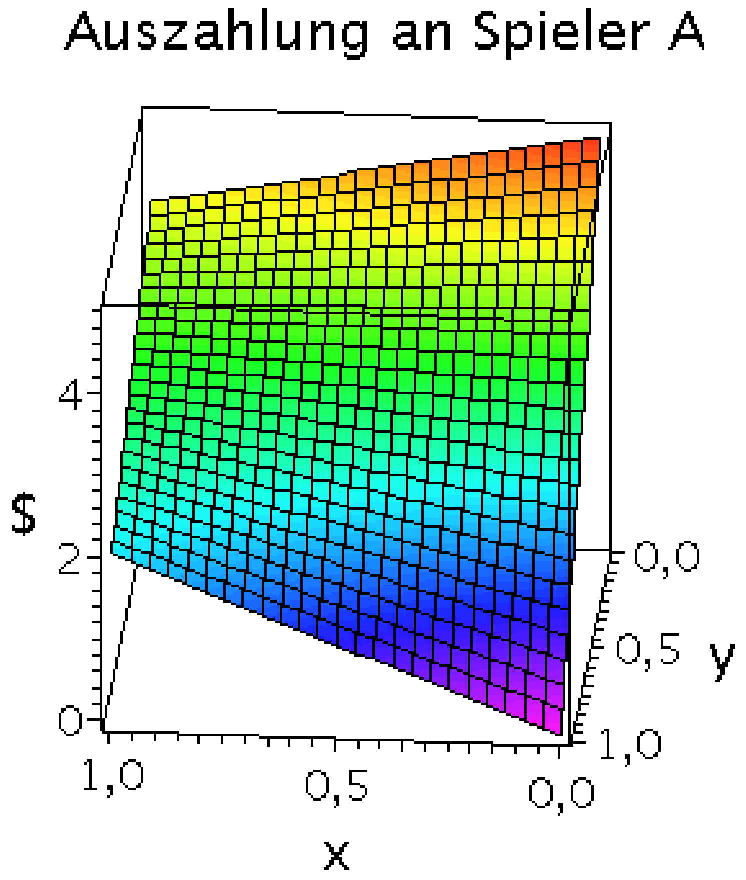
$$\widetilde{\$}^{A}(\widetilde{s}^{A},\widetilde{s}^{B}) = \widetilde{\$}^{A}(x,y) = \$^{A}_{11}\,xy + \$^{A}_{12}\,x(1-y) + \$^{A}_{21}(1-x)\,y + \$^{A}_{22}(1-x)(1-y)$$

$$= 2xy + 4x(1-y) + 0(1-x)\,y + 5(1-x)(1-y)$$

$$= 2xy + 4x - 4xy + 5 - 5x - 5y + 5xy$$

$$= 3xy - x - 5y + 5$$

	Spieler B **Hasen** jagen	Spieler B **Hirsch** jagen
Spieler A **Hasen** jagen	(2 , 2)	(4 , 0)
Spieler A **Hirsch** jagen	(0 , 4)	(5 , 5)



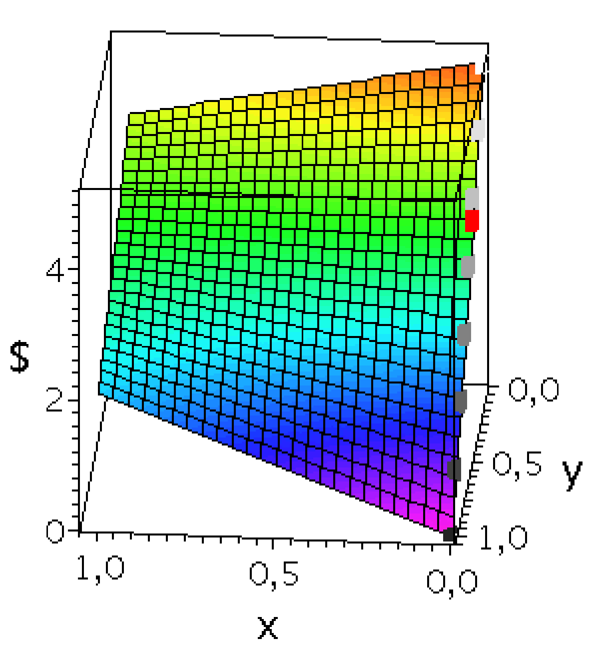
Dominante Strategien und Nash-Gleichgewicht
mit gemischter Auszahlungsfunktion

Eine Strategienkombination $(\tilde{s}^{A\dagger}, \tilde{s}^{B\dagger})$ ist ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Gleichgewicht in dominanten Strategien:

$$\tilde{\$}^{\mu}(\tilde{s}^{A\dagger}, \tilde{s}^{B}) \;\geq\; \tilde{\$}^{\mu}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B}) \quad \forall\; \mu = A, B \text{ und } \tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B} \in [0,1]$$

Eine Strategienkombination $(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*})$ nennt man ein Nash-Gleichgewicht, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:



Nash-Gleichgewicht:

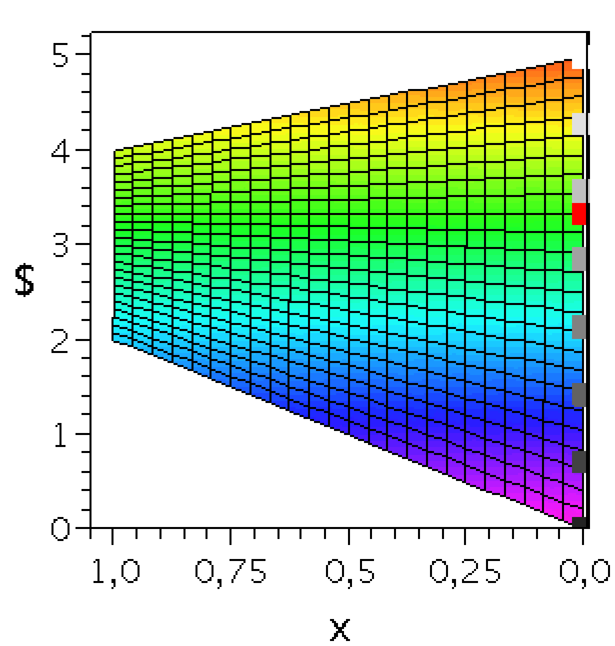
$$\tilde{\$}^{A}(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*}) \;\geq\; \tilde{\$}^{A}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B*}) \quad \forall\; \tilde{s}^{A} \in [0,1]$$

$$\tilde{\$}^{B}(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*}) \;\geq\; \tilde{\$}^{B}(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B}) \quad \forall\; \tilde{s}^{B} \in [0,1]$$

Auszahlungsfunktion des Spielers A im Hirschjagd-Spiel

$$\tilde{\$}^{A}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B}) = \tilde{\$}^{A}(x, y)$$

$$x, y \in [0,1]$$



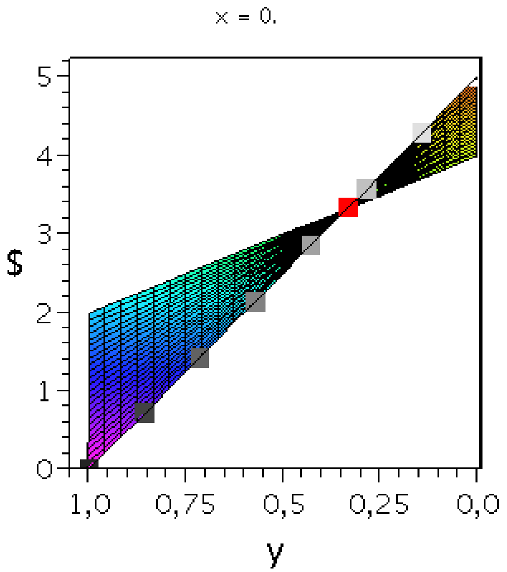
Das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

Ein Spezialfall des Nash-Gleichgewichts besteht, falls die partielle Ableitung der gemischten Auszahlungsfläche verschwindet. Man nennt dann ein solches Nash-Gleichgewicht $(\tilde{s}^{A\star}, \tilde{s}^{B\star})$ ein internes Nash-Gleichgewicht bzw. ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

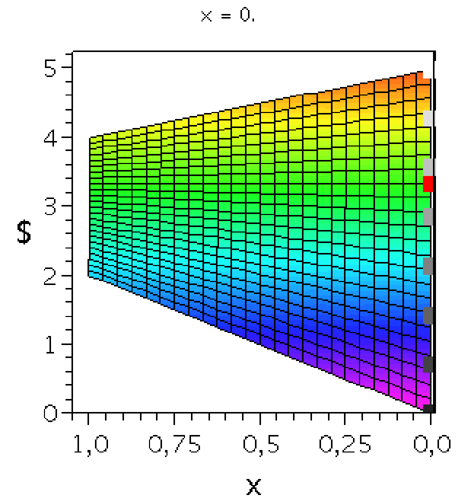
Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien:

$$\left.\frac{\partial \tilde{\$}^{A}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B})}{\partial \tilde{s}^{A}}\right|_{\tilde{s}^{B}=\tilde{s}^{B\star}} = 0 \quad \forall\ \tilde{s}^{A} \in [0,1] \ \ , \ \ \tilde{s}^{B\star} \in]0,1[$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{\$}^{B}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B})}{\partial \tilde{s}^{B}}\right|_{\tilde{s}^{A}=\tilde{s}^{A\star}} = 0 \quad \forall\ \tilde{s}^{B} \in [0,1] \ \ , \ \ \tilde{s}^{A\star} \in]0,1[$$



Das gemischte Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd-Spiel liegt bei der Strategien-kombination (x=1/3 , y=1/3) .

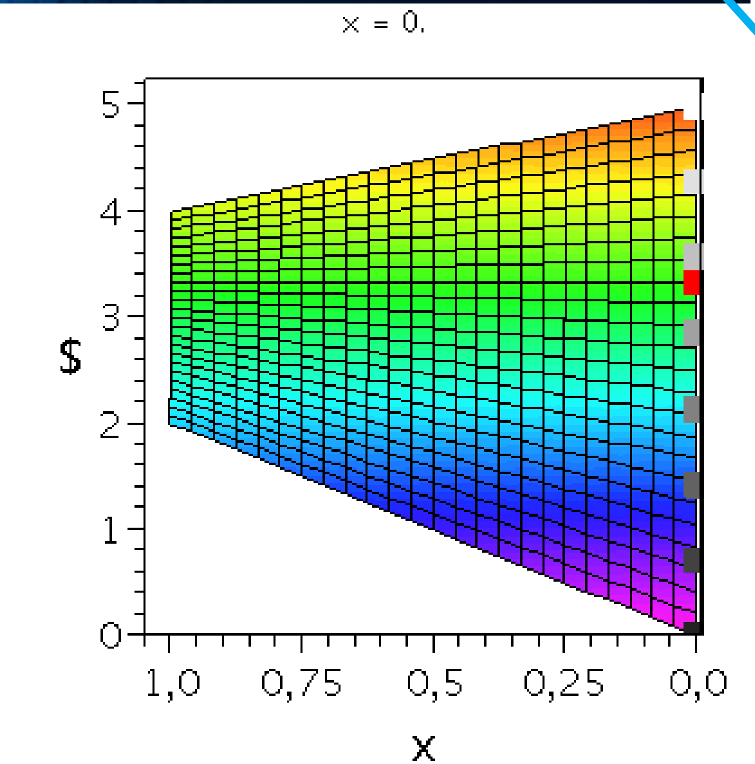


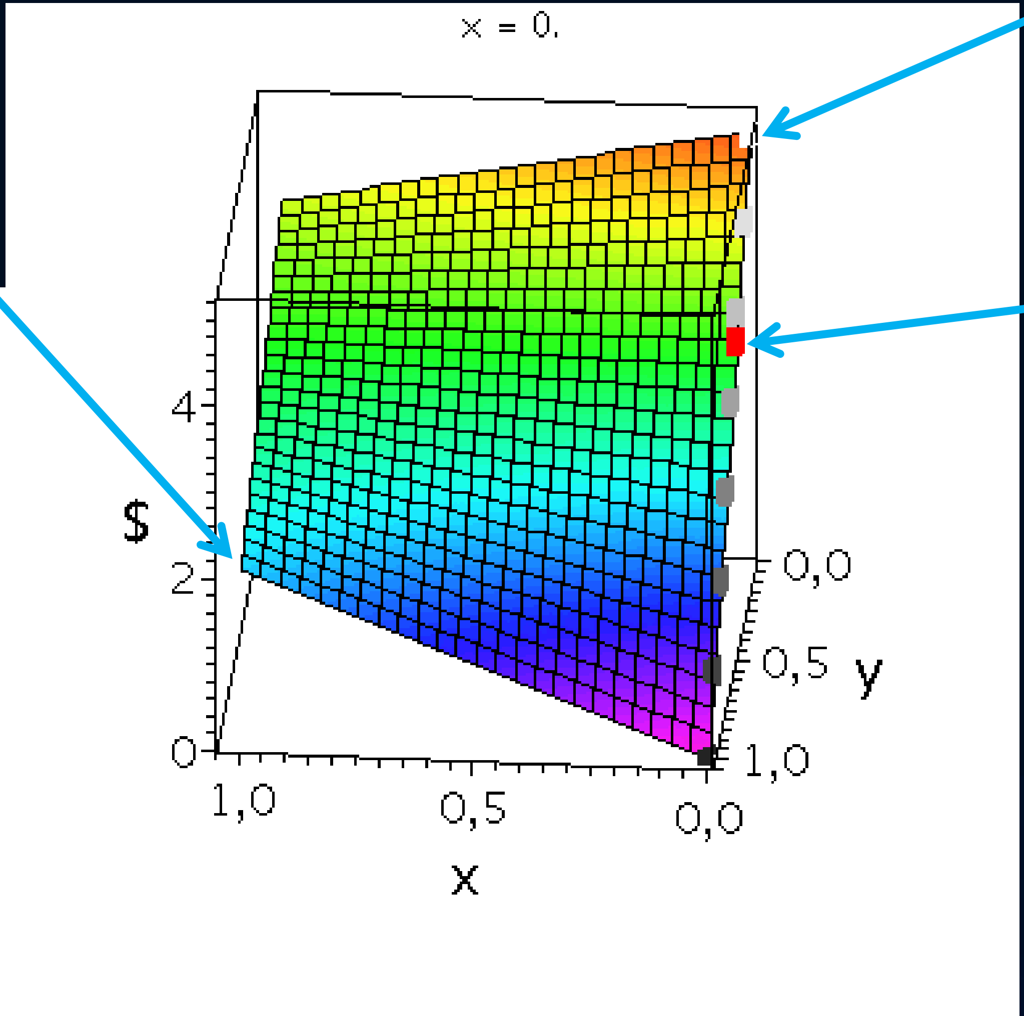
Das Nash-Gleichgewichte im Hirschjagd-Spiel

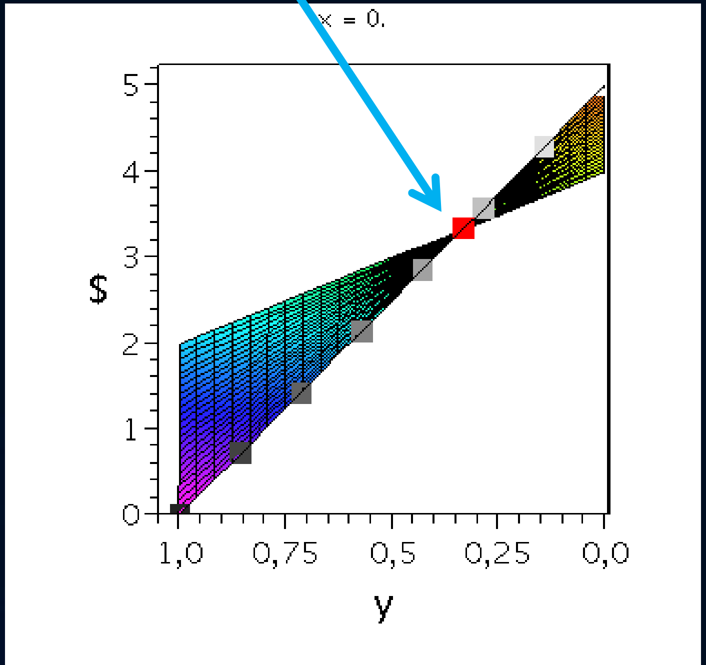
Reines Nash-Gleichgewicht
(x,y)=(1,1)=
(Hasen jagen,Hasen jagen)

Reines Nash-Gleichgewicht
(x,y)=(0,0)=(Hirsch jagen,Hirsch jagen)

Gemischtes Nash-Gleichgewicht
(x,y)=(1/3 , 1/3)







Zwei Nash Gleichgewichte in reinen Strategien im Angsthasen Spiel

	Spieler B Weiche nicht aus	Spieler B Weiche aus
Spieler A **Weiche nicht aus**	(-10 , -10)	(2 , 0)
Spieler A **Weiche aus**	(0 , 2)	(1 , 1)

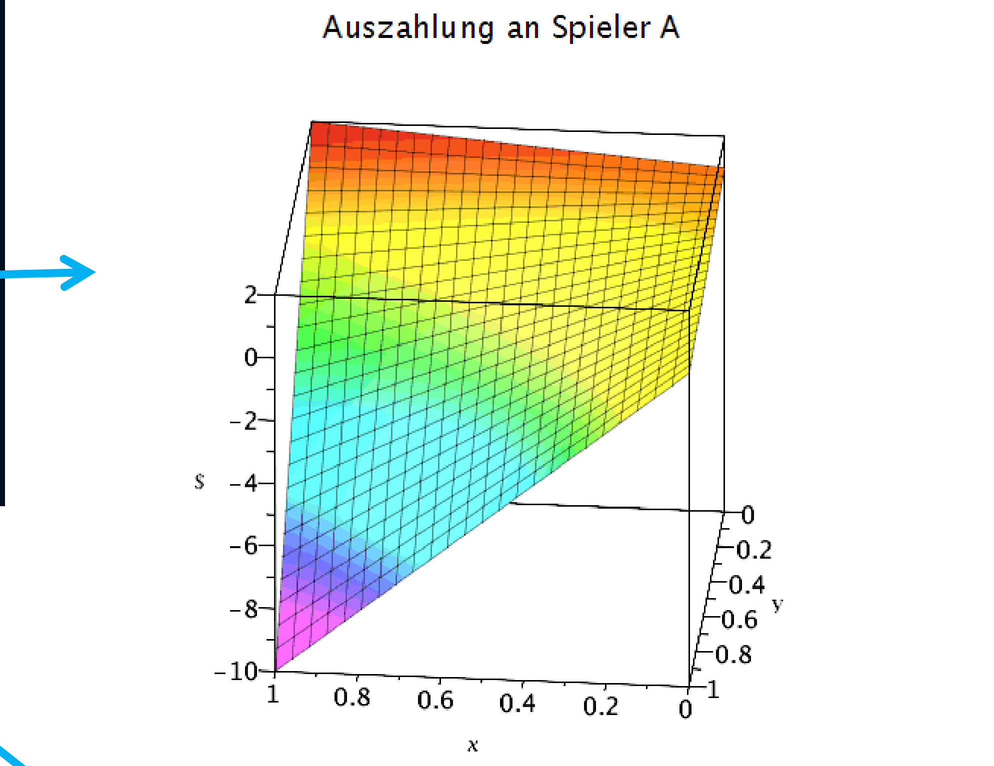
Beispiel: Das Angsthasen-Spiel (Chicken Game)

Das *Angsthasen-Spiel* ist ein simultanes (2 Personen)-(2 Strategien) Spiel und kann z.B. mittels der folgenden Geschichte illustriert werden (siehe z.B. S.16 in [2]).
"Auf einer einsamen Landstraße in Indien, bei der es nur eine geteerte Fahrbahn gibt, kommen sich zwei Autos mit hoher Geschwindigkeit entgegen. Beide Fahrer stehen nun vor der Entscheidung ob sie dem Anderen die Fahrbahn überlassen und Ausweichen oder mit hoher Geschwindigkeit weiterfahren um zu hoffen, dass der Andere ausweicht." Eine weitere Deutung des *Angsthasen-Spiel* basiert auf dem Film von Nicholas Ray "Denn sie wissen nicht was sie tun" aus dem Jahre 1955 (mit James Dean): "Jimbo und sein Erzfeind Buzz machen eine Mutprobe und rasen in ihren Autos auf eine Klippe zu. Derjenige ist der Angsthase, der als erster aus seinem Auto herrausspringt."

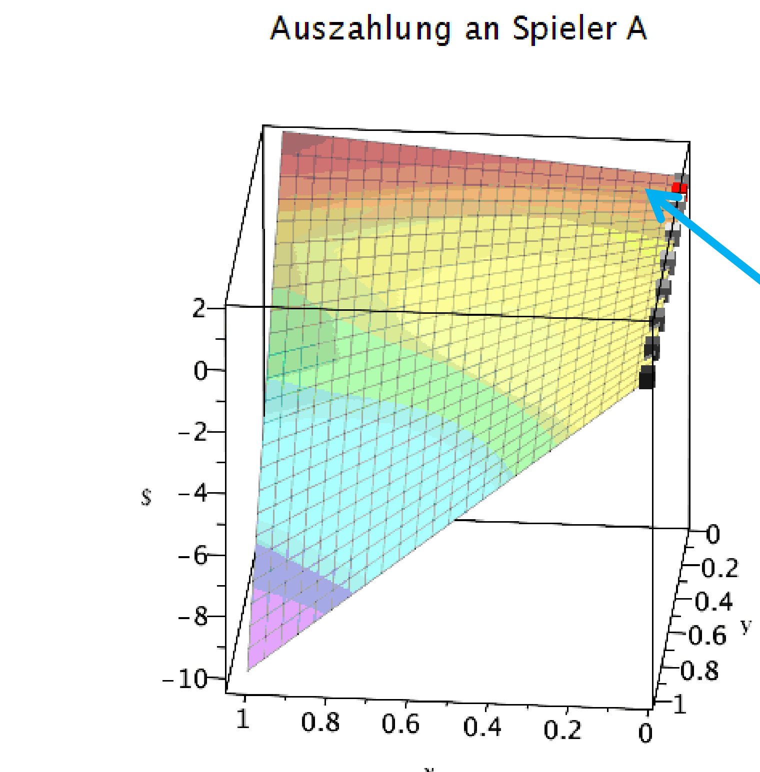
Ähnliche Spiele: Das Spiel mit dem Untergang, das Falke-Taube Spiel

Gemischtes Nash-Gleichgewicht im Angsthasen-Spiel

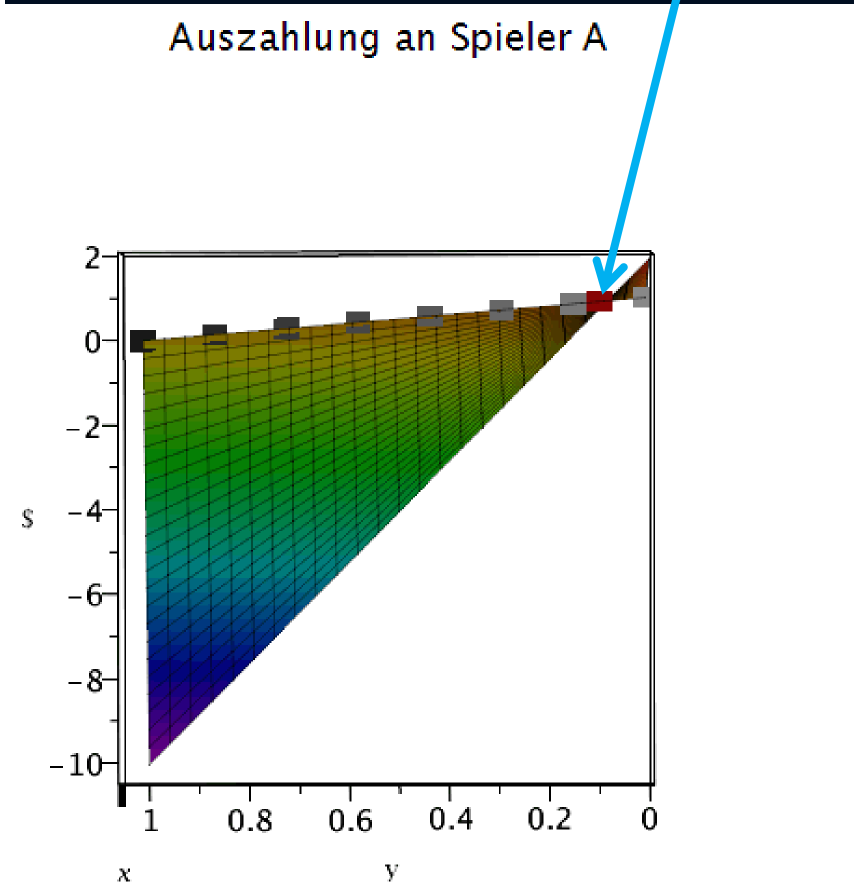
Gemischte Auszahlungsfunktion des Spielers A



Gemischtes Nash-Gleichgewicht (x,y)=(1/11 , 1/11)



Gemischtes Nash-Gleichgewicht (x,y)=(1/11 , 1/11)



Berechnung des Nash-Gleichgewichts in gemischten Strategien (I)

		y_1	y_2	$1-y_1-y_2$
		Stein	**Schere**	**Papier**
x_1	Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
x_2	Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
$1-x_1-x_2$	Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Auszahlungsfunktion des 1 - ter Spieler : $\$^1 : \widetilde{S}^1 \times \widetilde{S}^2 \to \Re$

$$\begin{aligned}\$^1(x_1,x_2,y_1,y_2) &= 0\cdot x_1\cdot y_1 + 1\cdot x_1\cdot y_2 + (-1)\cdot x_1\cdot(1-y_1-y_2) + \\ &\quad + (-1)\cdot x_2\cdot y_1 + 0\cdot x_2\cdot y_2 + 1\cdot x_2\cdot(1-y_1-y_2) + \\ &\quad + 1\cdot(1-x_1-x_2)\cdot y_1 + (-1)\cdot(1-x_1-x_2)\cdot y_2 + 0\cdot(1-x_1-x_2)\cdot(1-y_1-y_2) \\ &= x_1\cdot(1-3\cdot y_2) + x_2\cdot(3\cdot y_1 - 1) - y_1 + y_2\end{aligned}$$

Möglichkeit zur Berechnung eines inneren Nash-Gleichgewichts

$$\left.\frac{\partial \$^1(x_1,x_2,y_1,y_2)}{\partial x_1}\right|_{y_1=y_1^*,y_2=y_2^*} = \left(1-3\cdot y_2^*\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_2^* = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\%$$

$$\left.\frac{\partial \$^1(x_1,x_2,y_1,y_2)}{\partial x_2}\right|_{y_1=y_1^*,y_2=y_2^*} = \left(3\cdot y_1^* - 1\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_1^* = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\%$$

Auszahlungsfunktion des 1 - ten Spielers :

$$\$^1(x_1,x_2,y_1,y_2) = x_1\cdot(1-3\cdot y_2) + x_2\cdot(3\cdot y_1 - 1) - y_1 + y_2$$

Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei

$$\left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Genauso für 2-ten Spieler

	Stein	Schere	Papier
Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Überprüfung des gemischten, inneren Nash-Gleichgewichts (I)

Behauptung:
Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei folgender Strategienkombination

$$\left((x_1^*, x_2^*, x_3^*), (y_1^*, y_2^*, y_3^*)\right) = \left((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\right)$$

Beweis für den 1. Spieler:

Auszahlungsfunktion des 1 - ten Spielers :

$$\$^1(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 \cdot \left(1 - 3 \cdot y_2\right) + x_2 \cdot \left(3 \cdot y_1 - 1\right) - y_1 + y_2$$

Überprüfung des Nash - Gleichgewichts :

$$\$^1(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \geq \$^1(x_1, x_2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) =$$

$$\$^1(x_1, x_2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = x_1 \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + x_2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \qquad \forall\, x_1, x_2 \in [0,1]$$

Überprüfung des gemischten, inneren Nash-Gleichgewichts (II)

Behauptung:
Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei folgender Strategienkombination

$$\left((x_1^*, x_2^*, x_3^*), (y_1^*, y_2^*, y_3^*)\right) = \left((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \right)$$

Beweis für den 2. Spieler:

Auszahlungsfunktion des 2 - ten Spielers :

$$\$^2(x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1 \cdot (3 \cdot x_2 - 1) + y_2 \cdot (1 - 3 \cdot x_1) + x_1 - x_2$$

Überprüfung des Nash - Gleichgewichts :

$$\$^2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \geq \$^2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, y_1, y_2) =$$

$$\$^2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, y_1, y_2) = y_1 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) + y_2 \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \qquad \forall\, y_1, y_2 \in [0,1]$$

Vorlesung 2

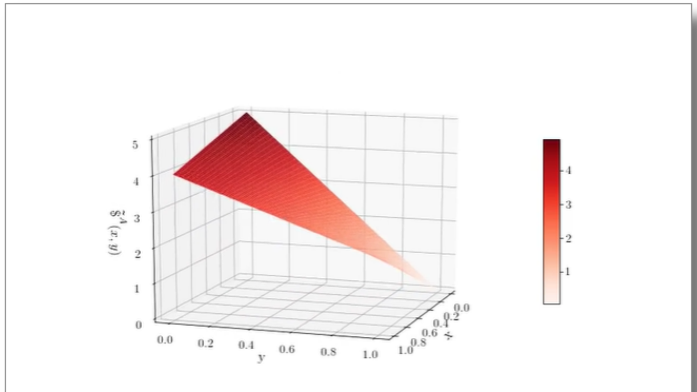
Wir betrachten im Folgenden die gemischte Erweiterung eines simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels in strategischer Form mit Auszahlung. Die Menge der gemischten Strategien des Spielers A ($\tilde{\mathcal{S}}^A$) und B ($\tilde{\mathcal{S}}^B$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien ($\mathcal{S}^A$ und $\mathcal{S}^B$) verstanden werden. Die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien eines Spielers $\mu = A, B$ ($\tilde{\mathbf{s}}^\mu = (\tilde{s}_1^\mu, \tilde{s}_2^\mu) \in \tilde{\mathcal{S}}^\mu$) bestehen aus zwei reellwertigen Zahlen ($\tilde{s}_1^\mu \in [0,1]$ und $\tilde{s}_2^\mu \in [0,1]$) und können als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie 1 ($\tilde{s}_1^\mu$) bzw. der Strategie 2 ($\tilde{s}_2^\mu$) interpretiert werden. Aufgrund der Normalisierungsbedingung (siehe Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien) $\tilde{s}_1^\mu + \tilde{s}_2^\mu = 1 \;\forall \mu = A, B$ setzen wir $x := \tilde{s}_1^A$ und $y := \tilde{s}_1^B$, und somit $\tilde{s}_2^A = 1 - x$ und $\tilde{s}_2^B = 1 - y$.
Die gemischte Auszahlungsfunktion $\tilde{\$}^\mu(x,y)$ schreibt sich dann wie folgt

$$\tilde{\$}^\mu : ([0,1] \times [0,1]) \to \mathbb{R}$$
$$\tilde{\$}^\mu(x,y) = \$_{11}^\mu \, xy + \$_{12}^\mu \, x(1-y) + \$_{21}^\mu (1-x)y + \$_{22}^\mu (1-x)(1-y) \quad .$$

Ein Spezialfall des Nash-Gleichgewichtes besteht, falls die partielle Ableitung der gemischten Auszahlungsfunktion verschwindet. Man nennt dann ein solches Nash-Gleichgewicht $(x^\star, y^\star)$ ein internes Nash-Gleichgewicht bzw. ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

$$\left.\frac{\partial \tilde{\$}^A(x,y)}{\partial x}\right|_{y=y^\star} = 0 \quad \forall \; x \in [0,1] \;\;,\;\; y^\star \in]0,1[$$
$$\left.\frac{\partial \tilde{\$}^B(x,y)}{\partial y}\right|_{x=x^\star} = 0 \quad \forall \; y \in [0,1] \;\;,\;\; x^\star \in]0,1[$$

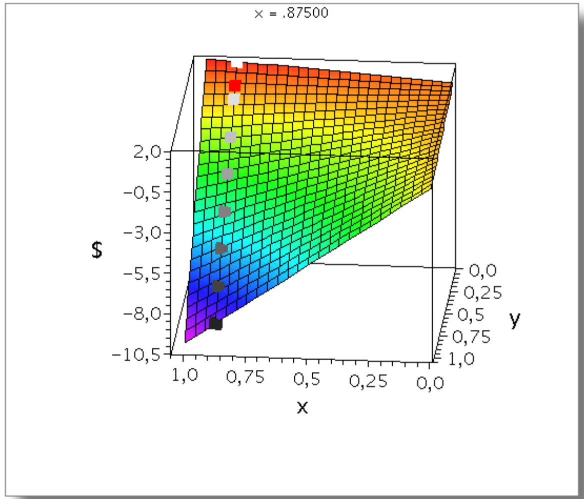
Beispiel: Das gemischte Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd Spiel



Wir wollen nun die oben beschriebene gemischte Erweiterung eines simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels am Beispiel des Hirschjagd-Spiels verdeutlichen. Aufgrund der dem Spiel zugrundeliegenden Auszahlungsmatrix gilt für den Spieler A $\$_{11}^A = 2$, $\$_{12}^A = 4$, $\$_{21}^A = 0$ und $\$_{22}^A = 5$ und die gemischte Auszahlungsfunktion vereinfacht sich zu: $\tilde{\$}^A(x,y) = 3\,xy - x - 5\,y + 5$. Den Wert des gemischten Nash-Gleichgewichtes erhält man durch die Nullstelle der partiellen Ableitung dieser Funktion: $\frac{\partial \tilde{\$}^A(x,y)}{\partial x} = 3\,y - 1 = 0$; man erhält: $y^\star = 1/3$. Da es sich um ein symmetrisches Spiel handelt gilt auch $x^\star = 1/3$. Die nebenstehende Animation zeigt die Auszahlungsfläche des Spielers A im Hirschjagd

Vorlesung 2

Das Konzept des Nash-Gleichgewichtes wurde in der letzten Vorlesung mittels der *Bestantwort-Pfeile* an mehreren klassischen Spielen illustriert. In dieser Vorlesung werden die beiden fundamentalen Gleichgewichtskonzepte der Spieltheorie, die dominante Strategien und die Nash-Gleichgewichte, formal mathematisch definiert. Die bisher dargestellten spieltheoretischen Konzepte basierten auf einer diskreten Strategiemenge der Spieler, die sogenannte Menge der reinen Strategien $\mathcal{S}$. Wir erweitern nun die Menge der reinen Strategien $\mathcal{S}$ zur Menge der gemischten Strategien $\tilde{\mathcal{S}}$. Ein solches Spiel bezeichnet man als die *gemischte Erweiterung eines simultanen (N Spieler)-(m Strategien) Spiels in strategischer Form mit Auszahlung*. Gemischte Strategien können als die Wahrscheinlichkeit des Spielers zur Wahl einer reinen Strategie verstanden werden. Es wird eine gemischte Auszahlungsfunktion der Spieler $\tilde{\$}$ formuliert und die beiden fundamentalen Gleichgewichtskonzepte der Spieltheorie in der gemischten Erweiterung definiert (siehe Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien). Das Konzept des Nash-Gleichgewichtes in gemischten Strategien (internes Nash-Gleichgewicht) wird am Beispiel des Hirschjagd- und Angsthasen-Spiels diskutiert.



Das neben stehende Bild stellt die gemischte Auszahlungsfunktion $\tilde{\$}^A$ des Spielers A im Angsthasen-Spiel dar. Die animierten Rechtecke zeigen die Veränderung der Auszahlung bei festgehaltener gemischter Strategie y des Spielers B und Variation der Strategie x des Spielers A. Das rote Rechteck veranschaulicht das interne, gemischte Nash-Gleichgewicht.

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Sommersemester 2024)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 13.01.2024

Erster Vorlesungsteil:

Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte am Beispiel der folgenden Spiele:

Gefangenendilemma, Hirschjagt- und Angsthasen-Spiel

Das Jupyter Notebook findet man auf der Internetseite der Vorlesung

Weiterführende Links

Folien der 2.Vorlesung
Vorlesungsaufzeichnung der 2.Vorlesung: WS 2022/23 bzw. WS 2021/22
View Jupyter Notebook: Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte
Download Jupyter Notebook: Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte

Einführung

In diesem Python Notebook werden die in der Vorlesung definierten Gleichgewichtskonzepte (dominante Strategie, reine und gemischte Nash-Gleichgewichte) am Beispiel dreier simultaner, symmetrischer (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiele illustriert. Zunächst wird das Python-Modul "sympy" eingebunden, das ein Computer-Algebra-System für Python bereitstellt und symbolische Berechnungen und im speziellen Matrix-Berechnungen relativ einfach möglich macht.

```
from sympy import *
init_printing()
```

Das Gefangenendilemma

Definition der Auszahlunsmatrix für Spieler A ($\hat{\$}^A$):

```
D_A=Matrix([[-7,-1],[-9,-3]])
D_A
```

$$\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$$

Da es sich bei dem Spiel um ein symmetrisches (2 Personen)-(2 Strategien) Spiel handelt, erhält man die Auszahlungsmatrix für Spieler B durch die transponierte Matrix des Spielers A ($\hat{\$}^B = (\hat{\$}^A)^T$):

```
D_B=transpose(D_A)
D_B
```

E-Learning und interaktive Übungsaufgaben

Zusäzlich zu den Informationen aus dieser Internetseite finden Sie in diesem Unterpunkt diverse interaktive Übungsaufgaben zu den folgenden Themen:

Aufgabe 1

Reine Nash-Gleichgewichte in einem simultanen (2x2)-Spiel in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungmatrix

Aufgabe 2

Gemischtes Nash-Gleichgewicht in einem simultanen (2x2)-Spiel in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungmatrix

Aufgabe 3

Das gemischtes Nash-Gleichgewicht im Hirschjagt-Spiel

Aufgabe 4

Spielklassen von simultanen (2x2)-Spielen in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungmatrix

Aufgabe 5

Zeitliche Entwicklung des Populationsvektors im evolutionären Spiel

Aufgabe 6

Evolutionär stabile Strategien

Aufgabe 7

Zeitliche Entwicklung des Populationsvektors im evolutionären Bi-Matrix Spiel

Aufgabe 8

Gemischtes Nash-Gleichgewicht in einem simultanen (2x2)-Spiel in strategischer Form mit unsymmetrischer Auszahlungmatrix

Aufgabe 9

Gemischtes Nash-Gleichgewicht und zeitliche Entwicklung des Populationsvektors in Zentrumsspielen

Aufgabe 10

Zeitliche Entwicklung des Populationsvektors im evolutionären (2x3)-Spiel

Aufgabe 11

Gemischtes Nash-Gleichgewicht im evolutionären (2x3)-Spiel

Aufgabe 12

Mittlere Distanz zwischen zwei Knoten in einem zufälligen Netzwerk

Aufgabe:
Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien

Aufgabe 1

A/B	s_1	s_2
s_1	(129 , 129)	(86 , 149)
s_2	(149 , 86)	(151 , 151)

Betrachten Sie ein simultanes (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiel in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungmatrix. Die Menge der Spieler sei $\mathcal{I} = \{A, B\}$, die Menge der reinen Strategien sei $\mathcal{S}^A = \mathcal{S}^B = \{s_1, s_2\}$ und die Präferenzordnungen der Spieler sei durch die neben stehende Auszahlungstabelle quantifiziert.
Welche der folgenden Strategienkombinationen sind reine Nash-Gleichgewichte des Spiels? Kreuzen Sie die zutreffenden Aussagen in der unteren *Checkbox* an

- ☐ (s_1 , s_1) ist ein Nash-Gleichgewicht
- ☐ (s_1 , s_2) ist ein Nash-Gleichgewicht
- ☐ (s_2 , s_1) ist ein Nash-Gleichgewicht
- ☐ (s_2 , s_2) ist ein Nash-Gleichgewicht

und vergleichen Sie indem Sie den folgenden *Button* drücken.

Lösung anzeigen

Ist (s_1 , s_1) ist ein Nash-Gleichgewicht?
Ist (s_1 , s_2) ist ein Nash-Gleichgewicht?
Ist (s_2 , s_1) ist ein Nash-Gleichgewicht?
Ist (s_2 , s_2) ist ein Nash-Gleichgewicht?

Aufgabe: Gemischtes Nash-Gleichgewicht

Aufgabe 2

A/B	s_1	s_2
s_1	(269 , 269)	(177 , 5)
s_2	(5 , 177)	(267 , 267)

Betrachten Sie die gemischte Erweiterung eines simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungmatrix. Die Menge der Spieler sei $\mathcal{I} = \{A, B\}$, die Menge der reinen Strategien sei $\mathcal{S}^A = \mathcal{S}^B = \{s_1, s_2\}$ und die Präferenzordnungen der Spieler sei durch die unten stehende Auszahlungstabelle quantifiziert. Die reinen Strategien entsprechen den folgenden gemischten Strategien: $s_1 \hat{=} \tilde{s}^B = \tilde{s}^B = 1$ und $s_2 \hat{=} \tilde{s}^A = \tilde{s}^B = 0$. Bei welcher gemischten Strategienkombination $(\tilde{s}^{A\star}, \tilde{s}^{B\star})$ befindet sich das gemischte Nash-Gleichgewicht? Tragen Sie bitte Ihren Wert in das untere Eingabenfeld ein

$\tilde{s}^{A\star} = \tilde{s}^{B\star} =$ 0,000

und vergleichen Sie indem Sie den folgenden *Button* drücken.

Lösung anzeigen

Lösung

$\tilde{s}^{A\star} = \tilde{s}^{B\star} =$

Das gemischte Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd Spiel

Aufgabe 3

A/B	Hasen jagen	Hirsch jagen
Hasen jagen	(61 , 61)	(122 , 0)
Hirsch jagen	(0 , 122)	(d , d)

Betrachten Sie die neben stehende Version eines Hirschjagt-Spiels. Das gemischte Nash-Gleichgewicht des Spiels befindet sich bei der folgenden gemischten Strategienkombination $(\tilde{s}^{A\star} = 0.5, \tilde{s}^{B\star} = 0.5)$. Wie gross ist der Wert d der Auszahlung an die Spieler wenn beide auf Hirschjagt gehen? Tragen Sie bitte Ihren Wert in das untere Eingabenfeld ein

d = 0,000

und vergleichen Sie indem Sie den folgenden *Button* drücken.

Lösung anzeigen

Lösung

Der Wert d der Auszahlung wenn beide Spieler auf Hirschjagd gehen ist d = .