

# Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

*JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT*  
30.01.2026

*MATTHIAS HANAUSKE*

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES  
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK  
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK  
D-60438 FRANKFURT AM MAIN  
GERMANY*

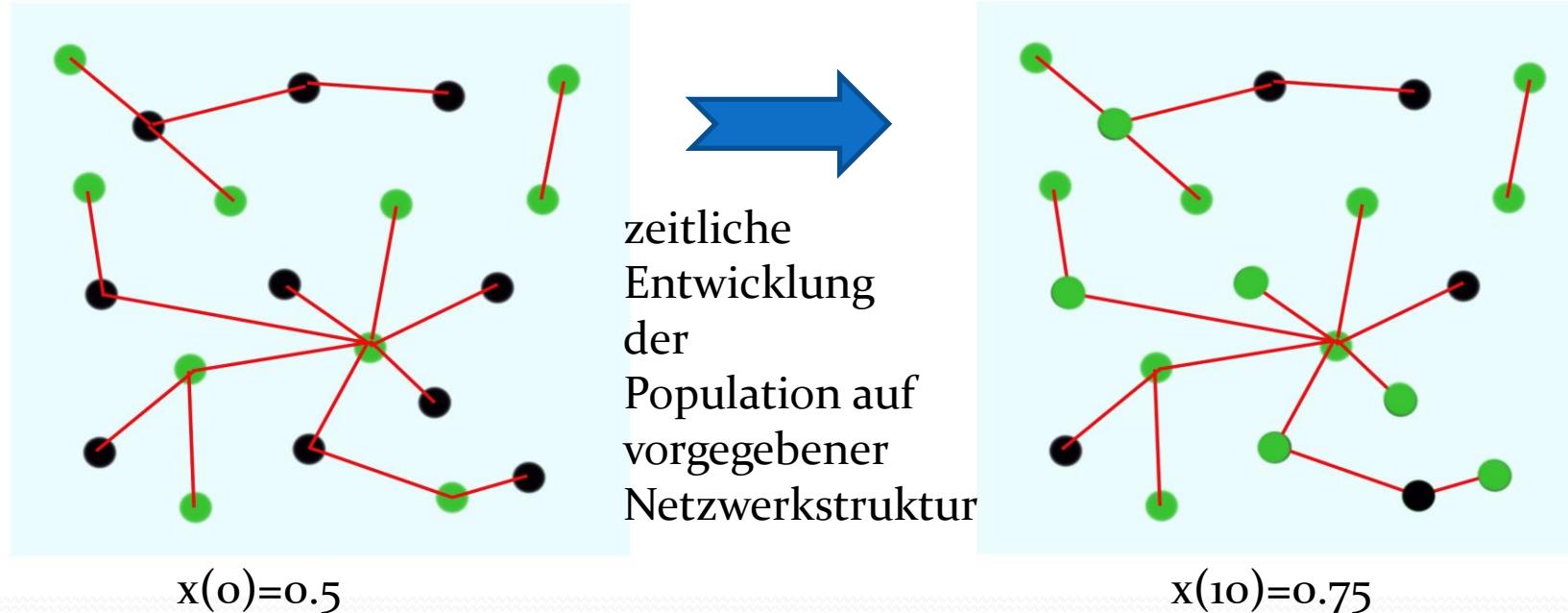
**11. Vorlesung**

# Plan für die heutige Vorlesung

- Kurze Wiederholung
  - Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken
    - Spiele auf einem räumlichen Netzwerk (Spatial Games)
      - Dominante  $(2 \times 2)$ -Spiele auf einem räumlichen Gitter
      - Räumliche Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele
    - Symmetrische  $(2 \times 3)$ -Spiele auf einem räumlichen Netzwerk
    - Spiele auf vollständig verbundenen Netzwerken
    - Spiele auf zufälligen, „kleine Welt“ und skalenfreien Netzwerken
  - Einführung in die Quanten Spieltheorie
  - Räumliche Quantenspiele (Spatial Quantum Games)

# Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

Viele in der Realität vorkommende evolutionäre Spiele werden auf einer definierten Netzwerkstruktur (Topologie) gespielt. Die Spieler der betrachteten Population sind hierbei nicht gleichwertig, sondern wählen als Spielpartner nur mit ihnen durch das Netzwerk verlinkte (verbundene) Partner aus.



Mögliche Strategien: (grün, schwarz), Parameter  $t$  stellt die „Zeit“ dar.  
 $x(t)$  : Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt  $t$  die Strategie „grün“ spielen.  
Die **roten** Verbindungslienien beschreiben die möglichen Spielpartner des Spielers

# Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

## (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2025/26)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 14.01.2026

Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre räumliche Spiele (spatial games)

Beispiel: Dominante Spiele

### Einführung

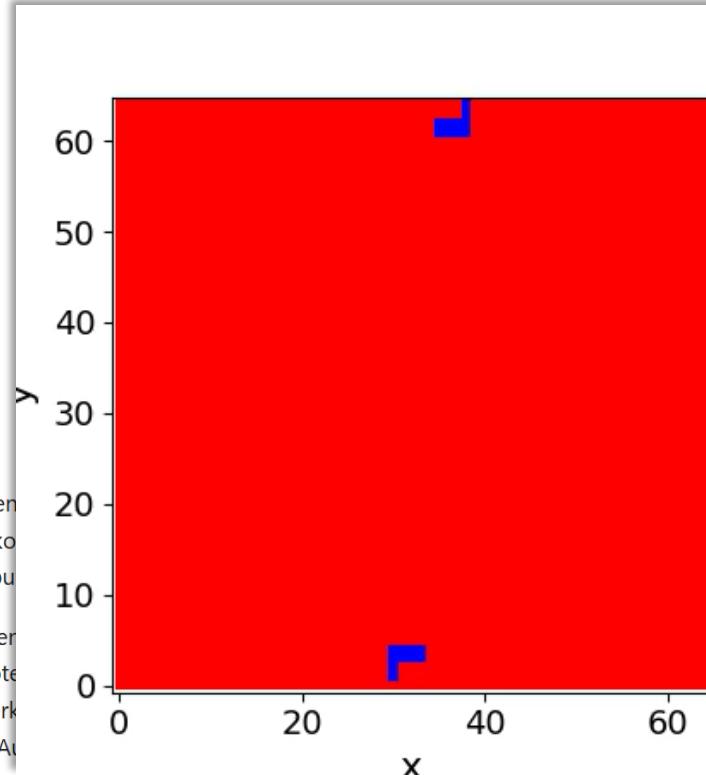
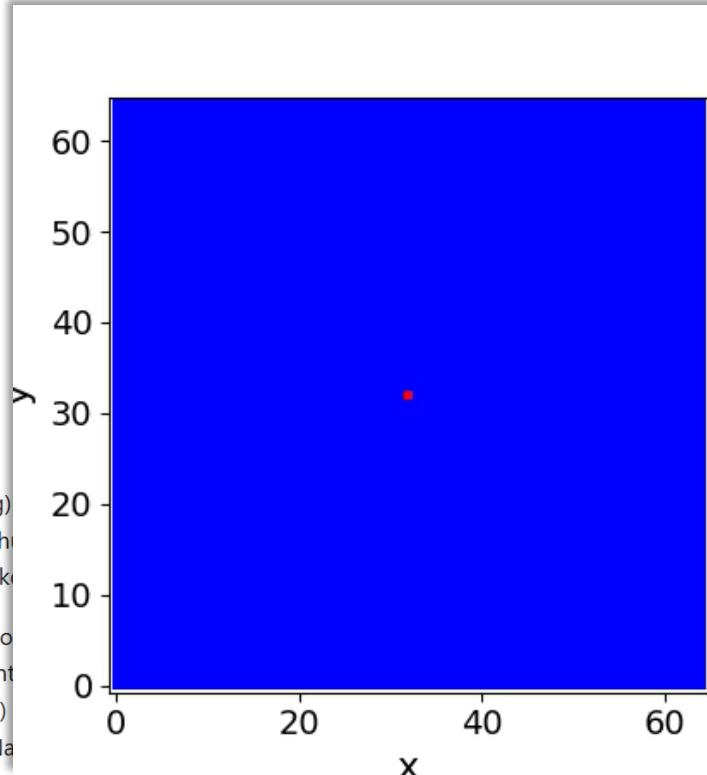
Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II der Vorlesung) mit der Grundlagenforschung, als auch der angewandten, empirischen Netzwerkforschung auf einem solchen komplexen Netzwerk ablaufenden Entscheidungsprozesse kann

In diesem Jupyter Notebook werden die Spieler einer endlich großen Population, die aus den Spielerknoten besteht, somit eine einfache reguläre Struktur und im betrachteten Spiel ein Gefangenendilemma auf einem räumlichen 2-dimensionalen Gitter ausgespielt. Die Spieler und benutzen den Ansatz eines allgemeinen (2 Personen)-(2 Strategien) Gitterspiels. In jedem Zeitschritt vergleichen die Spieler ihren summierten Gewinn/Verlust mit den Nachbarn. Wenn ein Spieler seine eigene Strategie gewählt hat und der Wert des eigenen Gewinns höher ist als der Wert des Nachbarn, bleibt er in der nächsten Iteration bei seiner gespielten Strategie. Wenn der Wert des Nachbarn höher ist, wechselt der Spieler seine Strategie.

Im Folgenden betrachten wir ein Beispiel, das an das 9. Kapitel des Buches [Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life, 2006](#) angelehnt ist und ein Gefangenendilemma auf einem räumlichen 2-dimensionalen Gitter beschreibt. In Abhängigkeit der Stärke der Dominanz der Strategie und der Anfangskonfiguration der Strategienwahl der Spieler sind unterschiedliche zeitlichen Entwicklungen der Population möglich. Wir nehmen im Folgenden ein dominantes, symmetrisches 2x2-Spiel mit folgender Auszahlungsmatrix an:

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0.01 \end{pmatrix}$$

Jupyter Notebook:  
Evolutionäre räumliche Spiele  
Klasse der dominanten Spiele



# Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2025/26)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanuske

Frankfurt am Main 14.01.2026

Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre räumliche Spiele (spatial games)

Beispiel: Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele

## Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II der Vorlesung) mit der evolutionären Spieltheorie (siehe Grundlagenforschung, als auch der angewandten, empirischen Netzwerkforschung dienen kann. In diesem Kapitel wird auf einem solchen komplexen Netzwerk ablaufenden Entscheidungsprozesse können in den meisten Fällen lediglich mit

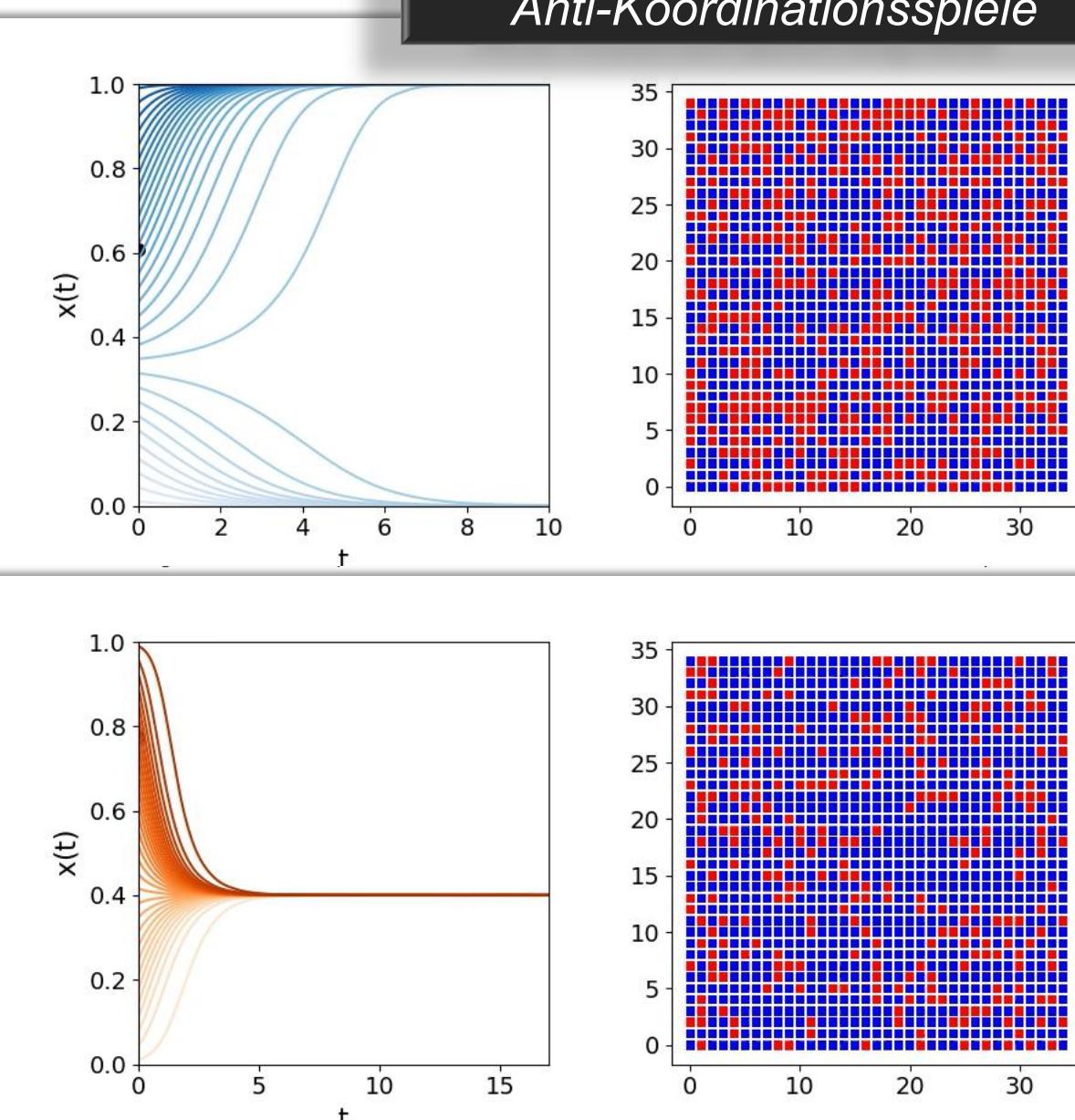
In diesem Jupyter Notebook werden die Spieler einer endlich großen Population auf einem räumlichen Gitter angeordnet. Der Spielerknoten besitzt somit eine einfache reguläre Struktur und im betrachteten 2-dimensionalen Fall spielt jeder Spieler Spiele und benutzen den Ansatz eines allgemeinen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels mit symmetrischer Auszahlungsmatrix. Zeitschritt vergleichen die Spieler ihren summierten Gewinn/Verlust mit den Nachbarspielern ihres Umfeldes. Ist die Auszahlung sein eigener Wert der höchste, so bleibt er auch in der nächsten Iteration bei seiner gespielten Strategie.

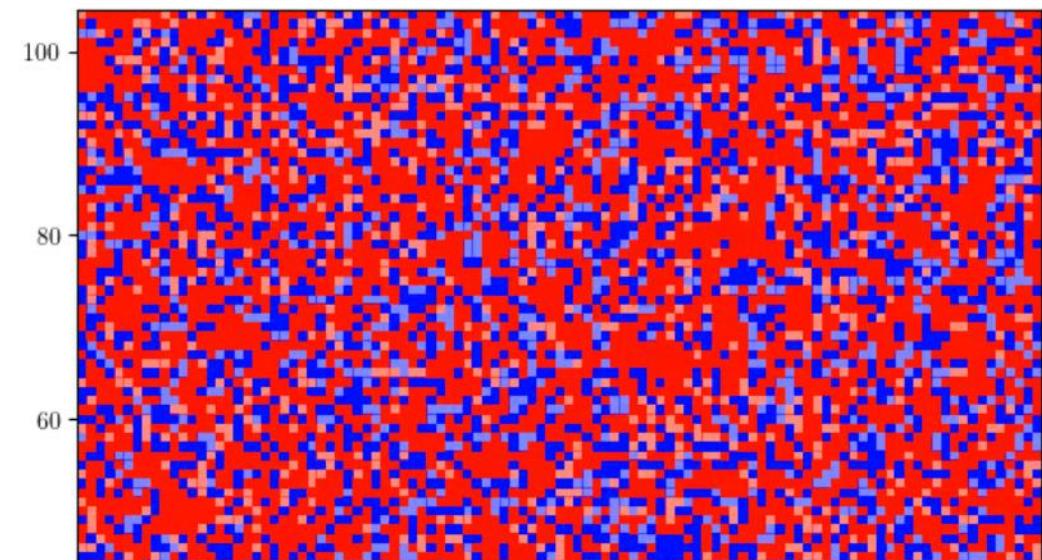
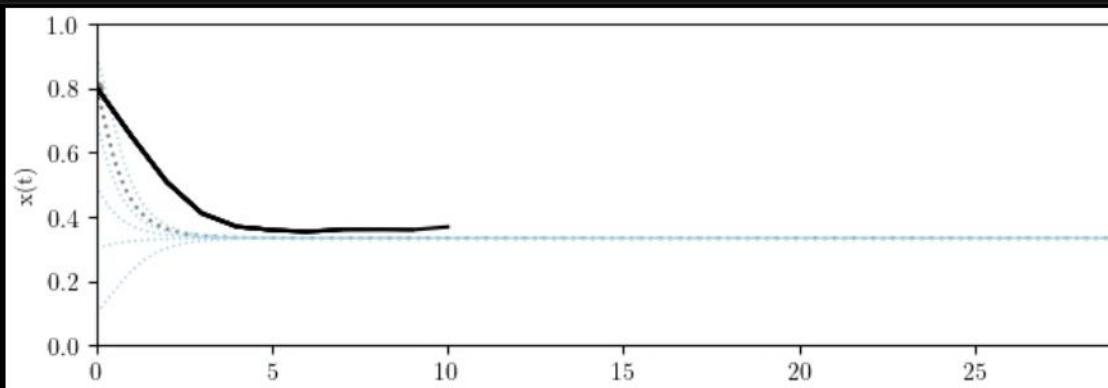
Im Folgenden betrachten wir Beispiele von Koordinations- und Anti-Koordinationsspielen und vergleichen die zeitliche Entwicklung des Populationsvektors  $x(t)$  mit der Theorie der evolutionären Spieltheorie (siehe Teil I der Vorlesung) betrachtete man eine unendlich große Population von Spielern, während in der Replikatordynamik konnten wir dann das zeitliche Verhalten des Populationsvektors  $x(t)$  (Anteil der Spieler, die die Strategie

Wir nehmen im Folgenden ein allgemeines symmetrisches (2x2)-Spiel mit folgender Auszahlungsmatrix an:

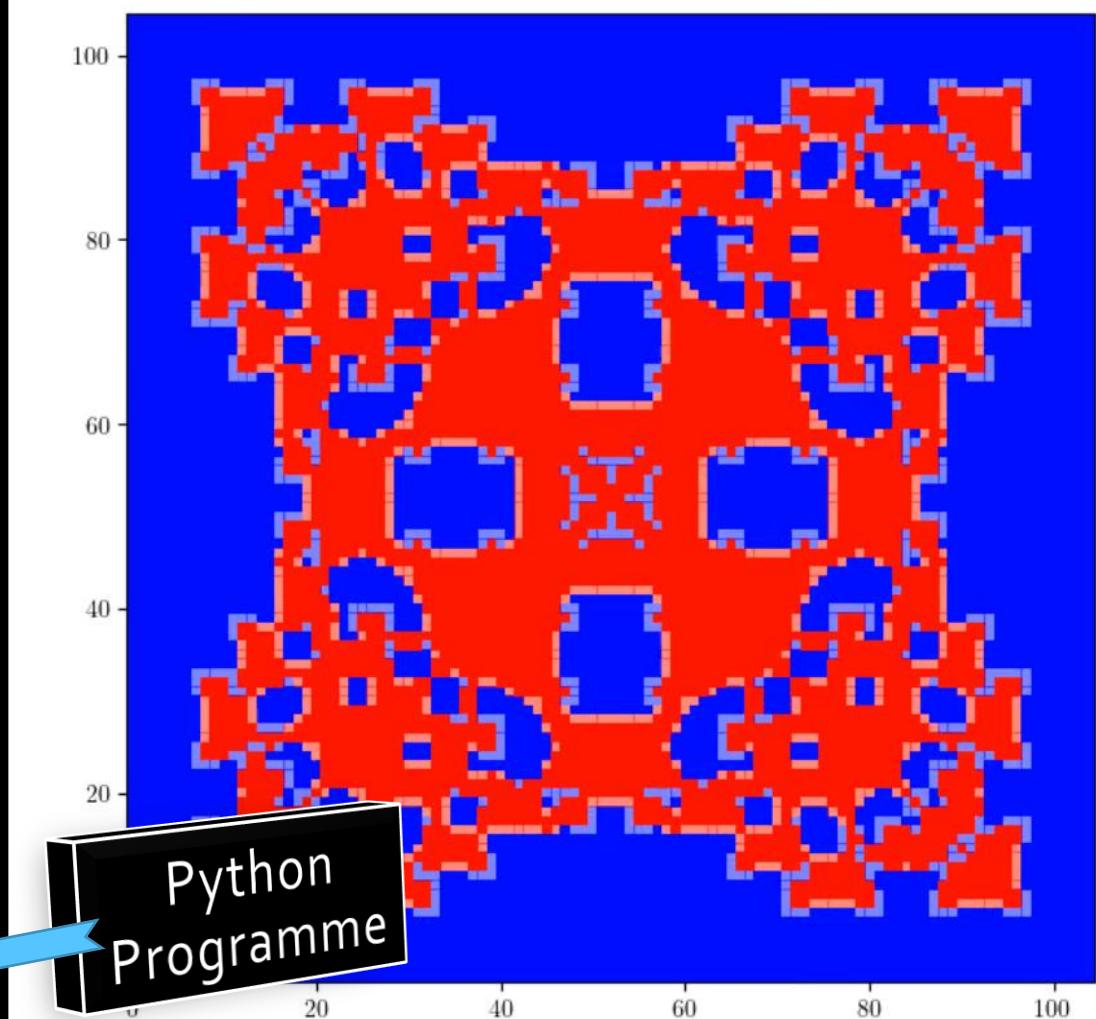
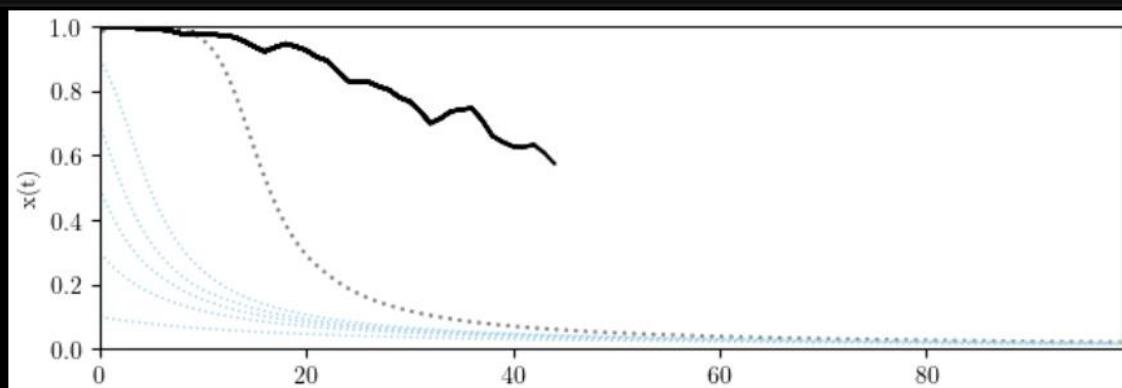
$$\hat{S} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Jupyter Notebook:  
Evolutionäre räumliche Spiele  
Klasse der Koordinations- und  
Anti-Koordinationsspiele





Weiterführende Links



Python  
Programme

### Folien der 9.Vorlesung

Vorlesungsaufzeichnung der 9.Vorlesung: [WS 2022/23](#) bzw. [WS 2021/22](#)

[View Jupyter Notebook: Evolutionäre dominante räumliche Spiele](#)

[Download Jupyter Notebook: Evolutionäre dominante räumliche Spiele](#)

[View Jupyter Notebook: Evolutionäre räumliche Spiele: Koordinations- und Anti-Koordinations Spiele](#)

[Download Jupyter Notebook: Evolutionäre räumliche Spiele: Koordinations- und Anti-Koordinations Spiele](#)

[Download Python Programm: Räumliches Spiel \(kleines Gitter mit Auszahlungen\)](#)

[Download Python Programm: Räumliches Spiel \(mittleres Gitter, Walker-Anfangskonfiguration\)](#)

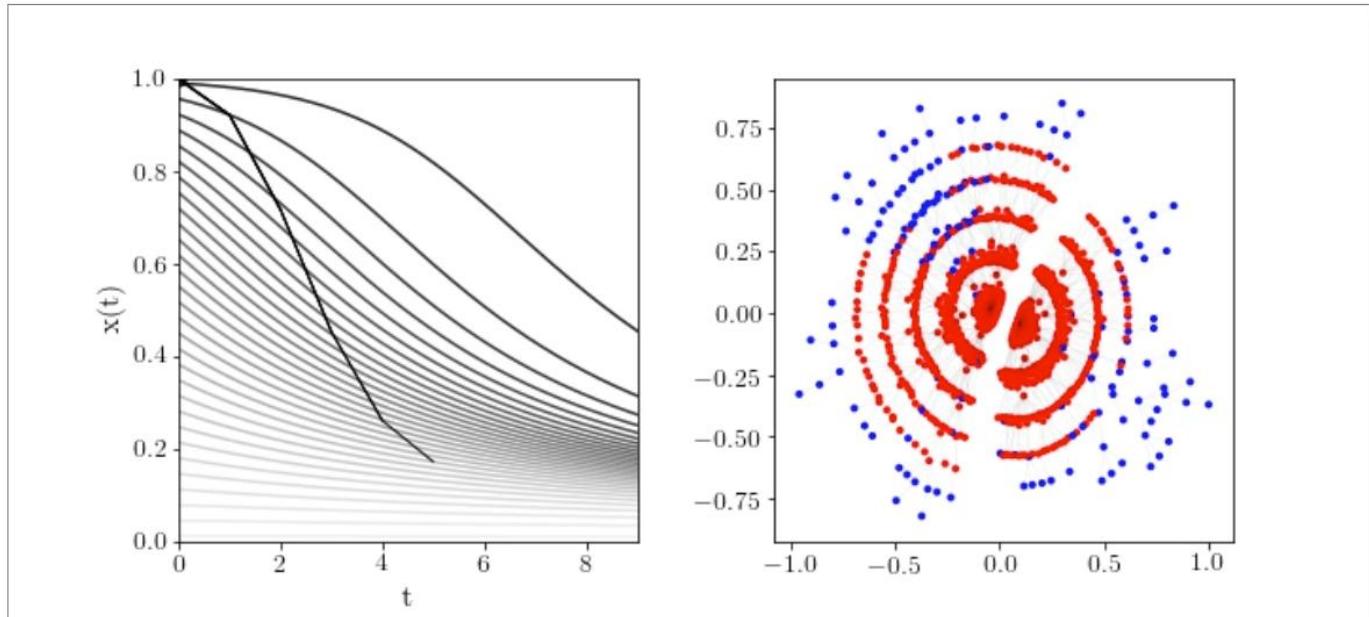
[Download Python Programm: Räumliches Spiel \(großes Gitter\): Version 1, Version 2](#)

## Vorlesung 10

In dieser Vorlesung wird nun die zeitliche Entwicklung der Strategienwahl der Population auf unterschiedlichen Netzwerktopologien analysiert und mit den Lösungen der deterministischen evolutionären Spieltheorie verglichen. Zunächst betrachten wir evolutionäre symmetrische  $(2 \times 2)$  Spiele und dann, im zweiten Unterpunkt, analysieren wir symmetrische  $(2 \times 3)$  Spiele auf räumlichen Gitterstrukturen und anderen Netzwerk-Topologien.

### Evolutionäre symmetrische $(2 \times 2)$ Spiele auf unterschiedlichen Netzwerk-Topologien

Im Jupyter Notebook [Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen Netzwerk-Topologien](#) werden evolutionäre, symmetrische  $(2 \times 2)$  Spiele auf unterschiedlichen Netzwerkklassen simuliert. Die evolutionäre Entwicklung der Strategienwahl der Spieler wird sowohl auf zufälligen, 'kleine Welt', skalenfreien, als auch auf vollständig verbundene Netzwerkstrukturen simuliert und mit den Resultaten der deterministischen evolutionären Spieltheorie verglichen. Es zeigt sich hierbei, dass die simulierten Spiele auf vollständig verbundene Netzwerken gut mit den Ergebnissen der Replikatordynamik übereinstimmen. Die unten dargestellte Animation zeigt die evolutionäre Entwicklung eines leicht dominanten Spiels ( $c = 1.66$ , siehe rechtes Panel der vorigen Vorlesung) auf einem skalenfreien Netzwerk. Bei den räumlichen Spielen entwickelte sich die Population zu einem Endzustand, bei dem alle Spieler die rote Strategie wählten. Die zeitliche Ausbreitung der roten Strategie auf einem skalenfreien Netzwerk hängt stark von der Anfangskonfiguration ab. In der unten dargestellten Animation wurde eine Anfangskonfiguration gewählt, bei der lediglich der Spieler mit dem größten Knotengrad (der Hub des skalenfreien Netzwerks) die rote Strategie wählt.

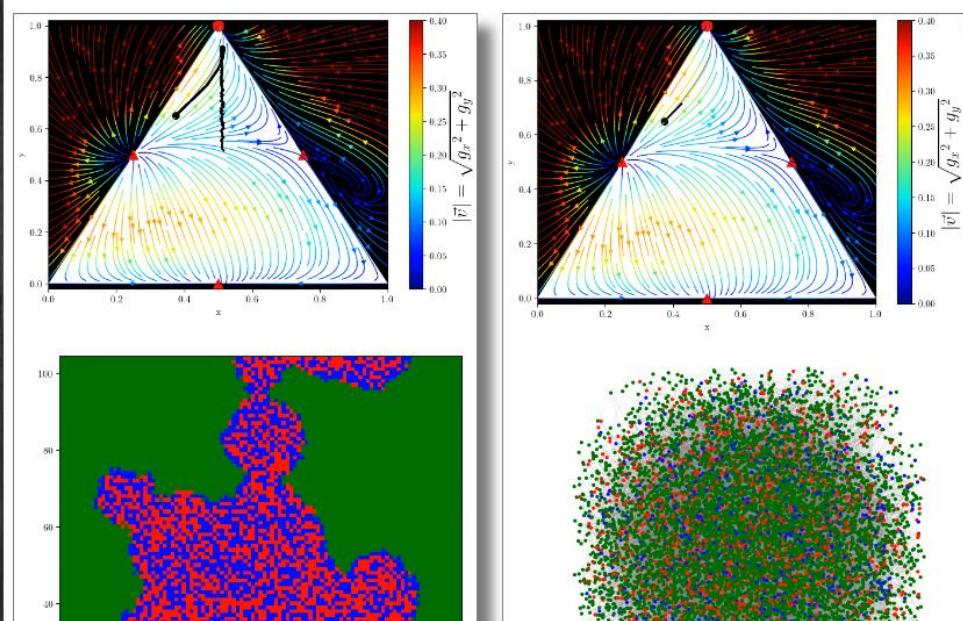


Man erkennt, im Gegensatz zu der zeitlichen Entwicklung im räumlichen Spiel, dass sich die rote Strategie nicht über die gesamte Population ausbreiten kann.

## Vorlesung 10

Die zeitliche Entwicklung der Strategienwahl einer Population mittels eines analytischen mathematischen Modells abzubilden, ist das Bestreben der evolutionären Spieltheorie und die numerischen Lösungen der Replikatordynamik stellen Vorhersagen innerhalb der Modellvorstellung dieses Modells dar. Die in der Vorlesung besprochenen Modelleinschränkungen des deterministischen analytischen Modells legten dann eine stochastische Agenten-basierte Simulation nahe und in dieser Vorlesung analysieren wir evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen Netzwerk-Topologien und vergleichen die simulierte Entwicklung der Population mit den Lösungen der deterministischen evolutionären Spieltheorie.

In dieser Vorlesung werden sowohl evolutionäre symmetrische  $(2 \times 2)$ , als auch  $(2 \times 3)$  Spiele auf unterschiedlichen Netzwerk-Topologien simuliert (siehe linkes Panel dieser Vorlesung). Dabei zeigen die räumlichen und Netzwerk-Simulationen oft eine qualitative Übereinstimmung mit den Vorhersagen der deterministischen evolutionären Spieltheorie, wobei bei einigen Systemkonstellationen jedoch auch Unterschiede auftreten. Die unten dargestellten Animationen stellen zwei Simulationen symmetrischer  $(2 \times 3)$  Spiele der Zeeman-Klasse 18 (siehe [Vorlesung 5](#)) dar, wobei bei der linken Abbildung eine räumliche Gitterstruktur zugrunde liegt und die rechte Simulation ein zufälliges Netzwerk verwenden.



# Jupyter Notebook: Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen komplexen Netzwerken

## Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem C

### (Physics of Socio-Economic Systems with the Comp

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main  
(Wintersemester 2025/26)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 14.01.2026

#### Dritter Vorlesungsteil:

#### Evolutionäre Spiele auf komplexen Netzwerken

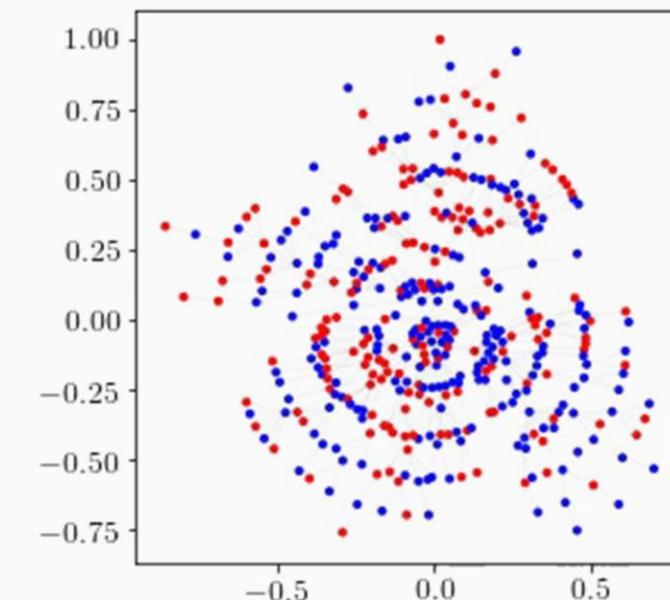
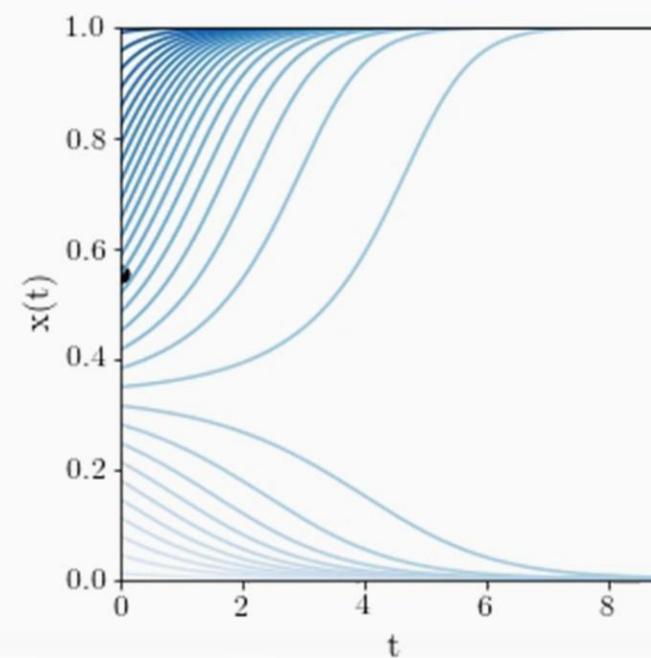
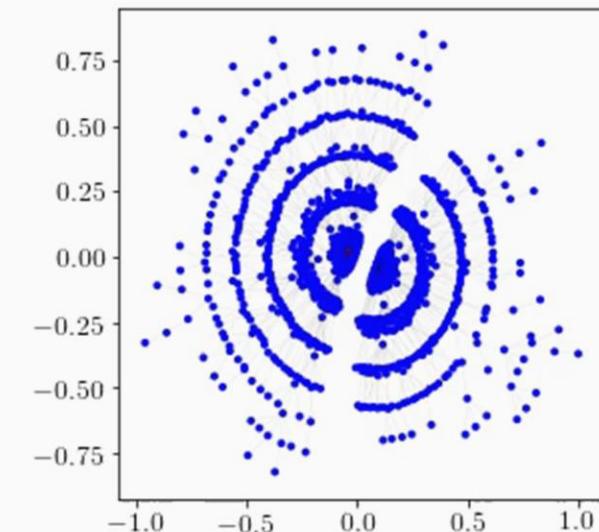
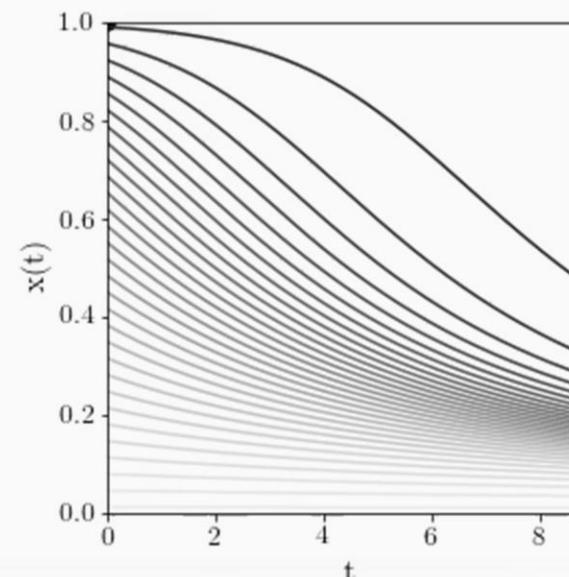
Beispiel: Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen Netzwerk-Topologien

#### Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II der Vorlesung) mit der Grundlagenforschung, als auch der angewandten, empirischen Netzwerkforschung auf einem solchen komplexen Netzwerk ablaufenden Entscheidungsprozesse können wir in diesem Teil der Vorlesung untersuchen.

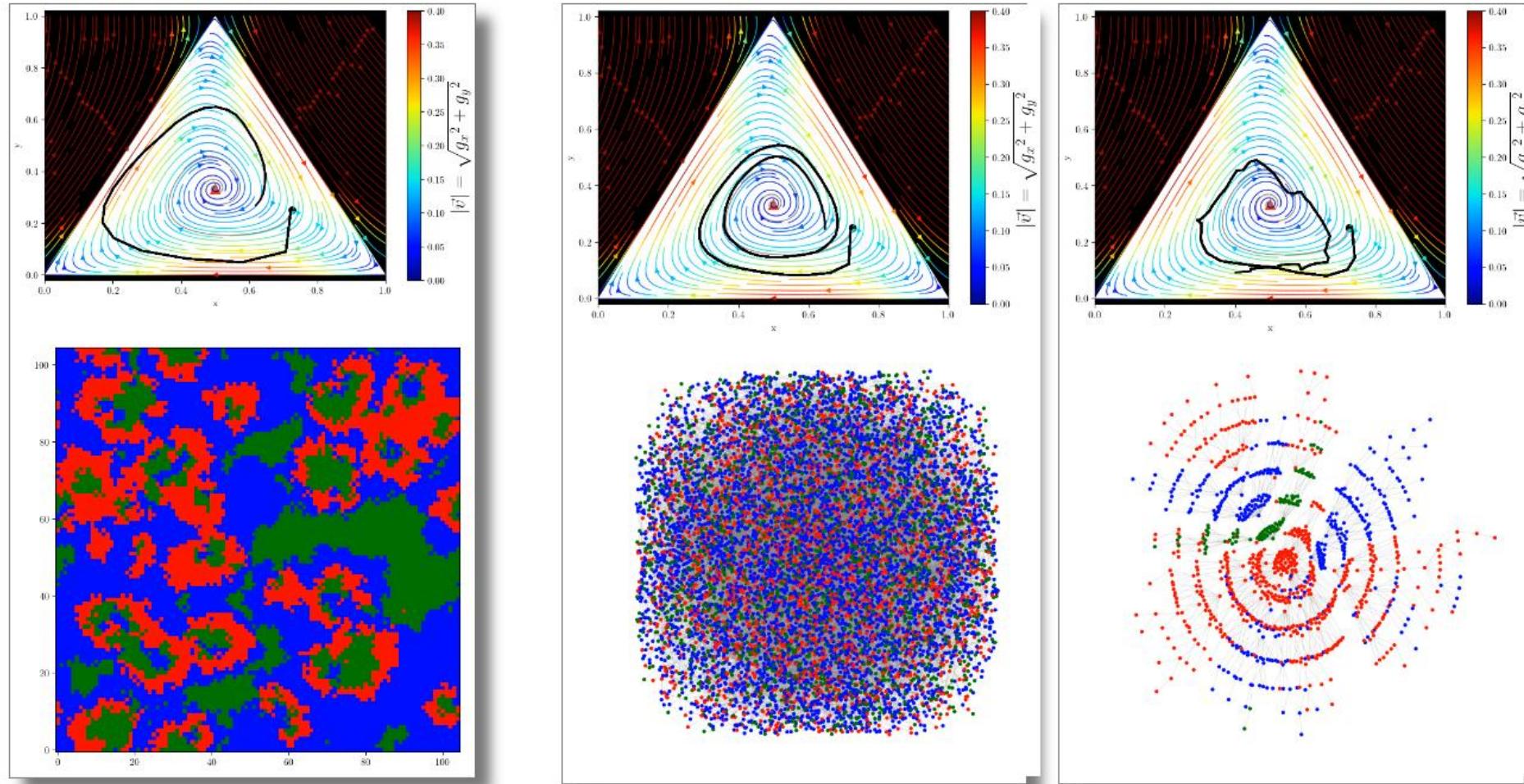
In den beiden letzten Jupyter Notebooks hatten wir die Spieler einer endlich großen Population auf einem einfachen Netzwerk der Spielerknoten untersucht. In diesem Notebook wollen wir das Spiel auf unterschiedlichen Netzwerken spielen.

Wir beschränken uns im folgenden wieder auf symmetrische (2x2)-Spiele und betrachten mit ihren  $k$ -nächsten direkten Nachbarn im Netzwerk und am Ende der Kette mit den eigenen Nachbarn.

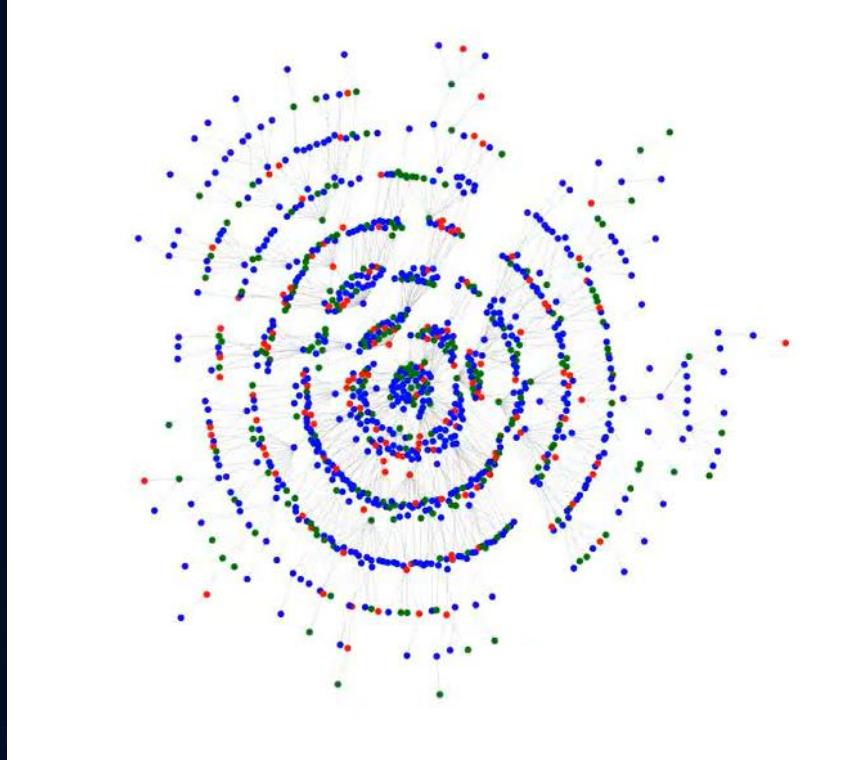
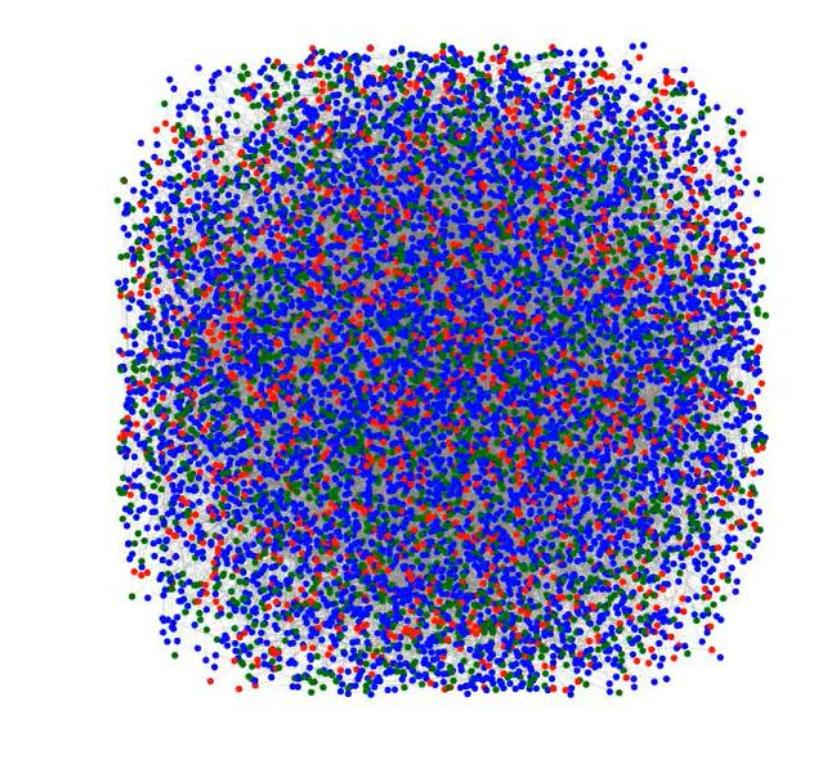
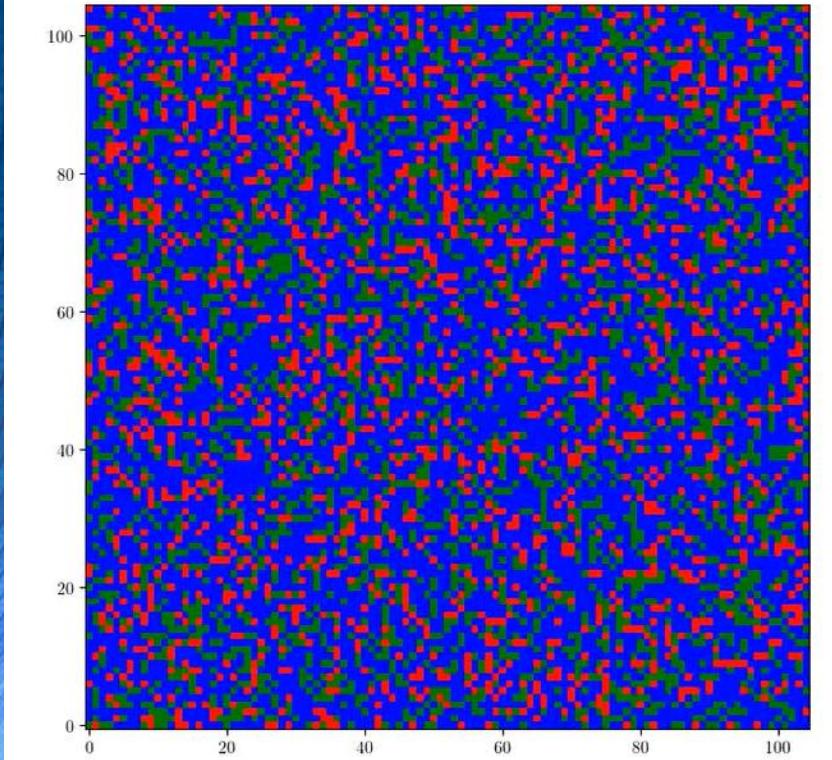
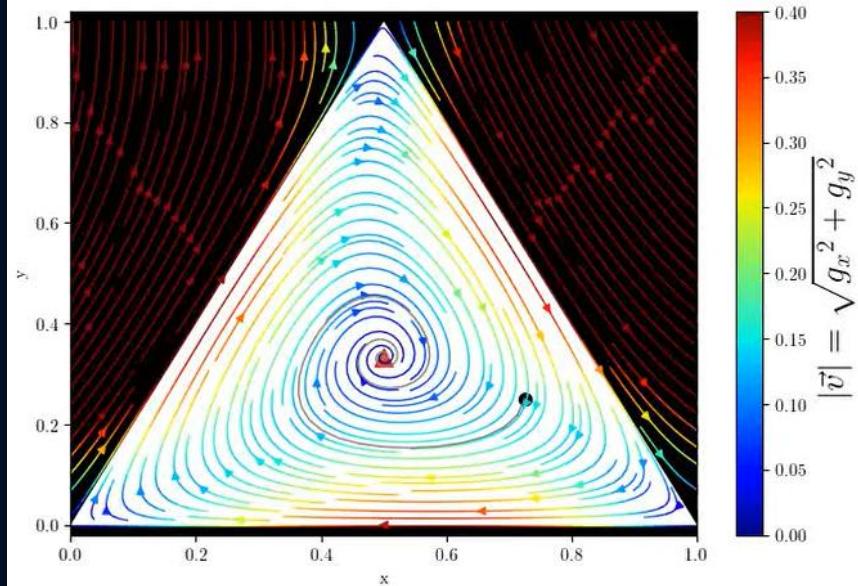
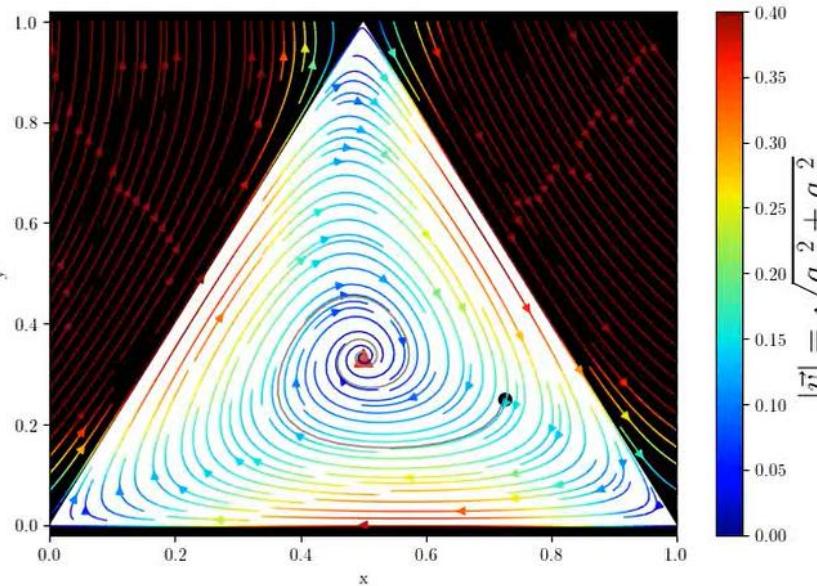
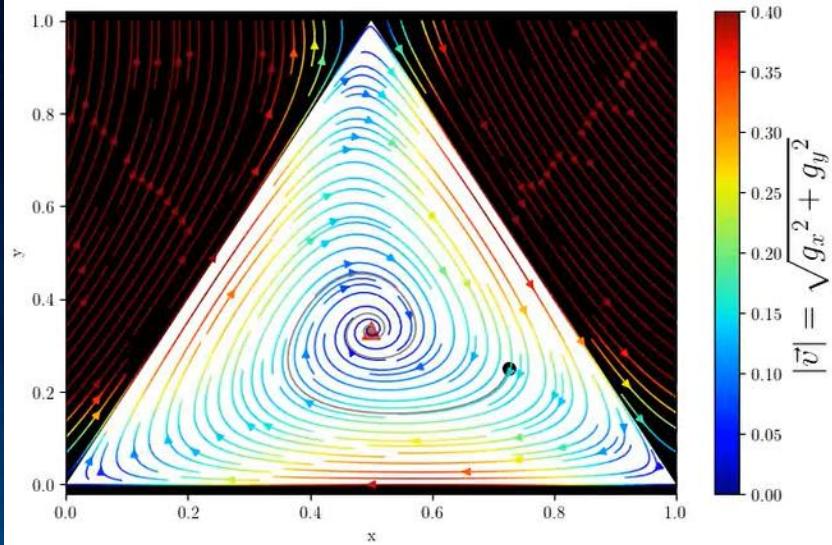


## Evolutionäre symmetrische $(2 \times 3)$ Spiele auf unterschiedlichen Netzwerk-Topologien

In den Python Programmen [SpatialGame\\_2x3.py](#) und [NetworkGame\\_2x3.py](#) werden evolutionäre, symmetrische  $(2 \times 3)$  Spiele auf räumlichen Gitterstrukturen und anderen Netzwerk-Topologien simuliert. Da die deterministische Replikatordynamik symmetrischer  $(2 \times 3)$  Spiele bereits 19 unterschiedliche Spielklassen erlaubt (siehe [Vorlesung 5](#)), gibt es, mittels der stochastischen Simulationen, eine große Zahl von möglichen zeitlichen Entwicklungen der Population. Die unten dargestellten Animationen stellen drei Simulationen der Zeeman-Klasse 1 dar, wobei bei der linken Abbildung eine räumliche Gitterstruktur zugrunde liegt, die mittlere Animation ein zufälliges Netzwerk und die rechte Simulation ein skalrenfreies Netzwerk verwenden.



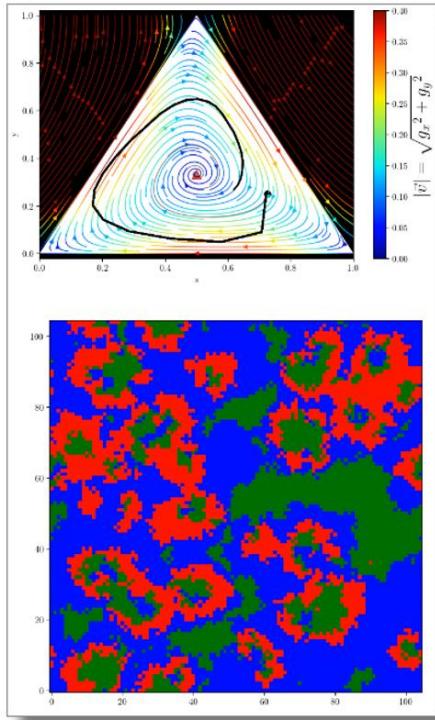
Sowohl bei den räumlichen als auch bei den Netzwerk-Simulationen zeigt sich oft eine qualitative Übereinstimmung mit den Vorhersagen der deterministischen evolutionären Spieltheorie.



räumliche Gitterstruktur

zufälliges Netzwerk

skalenfreies Netzwerk



```

< > SpatialGame_2x3.py x
home > hanauske > neu_2025 > VPSOC_2025 > Vorlesungen > 11 > SpatialGame_2x3.py
1 ######
2 # Python-Programm "Spatial (2x3)-Games"
3 #####
4
5 import networkx as nx
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 from random import randint, uniform
8 from math import isclose
9 import numpy as np
10 from matplotlib import rcParams
11 import matplotlib.gridspec as gridspec
12 from scipy.integrate import solve_ivp
13 import os
14 from sympy import symbols, Matrix, Eq, transpose, solve
15 import matplotlib.colors as colors|
16
17 # baryzentrisches Dreiecks-Koordinatensystem
18 def xy(vx):
19     return [vx[1]+vx[2]/2,vx[2]]
```

Python  
Programm

```

1 # Erstellen eines räumlichen 2D-Gittergraph (8 Nachbarn)
2 def create_grid(width, height):
3     g = nx.Graph()
4     nkn = width * height
5     for i in range(width):
6         for j in range(height):
7             k = i * height + j
8             g.add_node(k)
9     for i in range(width):
10        for j in range(height):
11            center = i * height + j
12            neighbors = [
13                ((i-1) % width * height + (j-1) % height, # 1
14                 (i % width) * height + (j-1) % height, # 2
15                 ((i+1) % width) * height + (j-1) % height, # 3
16                 ((i+1) % width) * height + (j % height), # 4
17                 ((i+1) % width) * height + (j+1) % height, # 5
18                 (i % width) * height + (j+1) % height, # 6
19                 ((i-1) % width) * height + (j+1) % height, # 7
20                 ((i-1) % width) * height + (j % height) # 8
21             ]
22             for neigh in neighbors:
23                 if neigh != center: # Vermeide Selbst-Edges
24                     g.add_edge(center, neigh)
25
26     return g
```

```

1 # Funktion zur Berechnung der Nashgleichgewichte
2 def find_nash_equilibria(D):
3     equilibria = []
4     # Berechnung der reinen Nash-Gleichgewichte
5     for i in range(D.shape[0]):
6         for j in range(D.shape[0]):
7             if D[i, j] == max(D[:, j]):
8                 if D[j, i] == max(D[:, i]):
9                     equilibria.append({'type': 'pure', 's': (i+1,j+1)})
10
11     # Berechnung der gemischten Nash-Gleichgewichte
12     Loes_GN = []
13     x1,x2,x3,y1,y2,y3 = symbols('x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3')
14     xs = Matrix([x1,x2,x3])
15     ys = Matrix([y1,y2,y3])
16     Dollar_A = transpose(xs)*D*ys
17     Dollar_As = Dollar_A.subs(x3,1-x1-x2).subs(y3,1-y1-y2)[0]
18     Dollar_As_1 = Dollar_A.subs(x1,0).subs(x3,1-x2).subs(y3,1-y1-y2)[0]
19     Dollar_As_2 = Dollar_A.subs(x2,0).subs(x3,1-x1).subs(y3,1-y1-y2)[0]
20     Dollar_As_3 = Dollar_A.subs(x3,0).subs(x2,1-x1).subs(y3,1-y1-y2)[0]
21     GemNash_Eq1 = Eq(Dollar_As.diff(x1),0)
22     GemNash_Eq2 = Eq(Dollar_As.diff(x2),0)
23     GemNash_Eq_1 = Eq(Dollar_As_1.diff(x2),0)
24     GemNash_Eq_2 = Eq(Dollar_As_2.diff(x1),0)
25     GemNash_Eq_3 = Eq(Dollar_As_3.diff(x1),0)
26     Bed=Eq(1,y1+y2+y3)
27     Loes_GN.append(solve([GemNash_Eq1,GemNash_Eq2,Bed]))
28     Bed_a=Eq(0,y1)
29     Bed_b=Eq(1,y2+y3)
30     Loes_GN.append(solve([GemNash_Eq_1,Bed_a,Bed_b]))
31     Bed_a=Eq(0,y2)
32     Bed_b=Eq(1,y1+y3)
33     Loes_GN.append(solve([GemNash_Eq_2,Bed_a,Bed_b]))
34     Bed_a=Eq(0,y3)
35     Bed_b=Eq(1,y1+y2)
36     Loes_GN.append(solve([GemNash_Eq_3,Bed_a,Bed_b]))
37
38     for l in Loes_GN:
39         if l and 0 <= l[y1] < 1 and 0 <= l[y2] < 1 and 0 <= l[y3] < 1 :
40             equilibria.append({'type': 'mixed', 's*': (l[y1],l[y2],l[y3])})
41
42     return equilibria
```

Da wir im Laufe der Vorlesungsreihe nun an einem Punkt angekommen sind, bei dem die verwendeten Programme sehr umfangreich und unübersichtlich geworden sind, ist es sinnvoll, am Ende einige Zeit mit der Strukturierung von Computerprogrammen zu verbringen. Das Paradigma der *Objekt-orientierten Programmierung* und das Konzept der *Klasse* wird in dieser Vorlesung behandelt. Danach befassen wir uns mit der *Quanten Spieltheorie*. Zunächst wird der mathematische Formalismus eines (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspiels vorgestellt. Dann wenden wir den quantenspieltheoretischen Formalismus auf dominante, Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele an. Wir werden sehen, dass wenn die Strategieverschränkung der Spieler nur groß genug ist, können zusätzliche Nash-Gleichgewichte entstehen und zuvor vorhandene Nash-Gleichgewichte verschwinden. Ungünstige, Dilemma-artige Situationen und nicht vorteilhafte evolutionär stabile Strategien können sich ab definierten Verschränkungsbarrieren auflösen.

## Einführung in die Objekt-orientierte Programmierung

Die meisten Programmietechniken, die wir bis jetzt kennengelernt haben, verwenden den Programmierungswurfstil der *prozeduralen Programmierung* und wir benutzten meist die Programmiersprache Python bzw. verwendeten Python Jupyter Notebooks. Wir werden nun den Fokus auf die Strukturierung von Programmen legen (das Programmierparadigma der *objektorientierten Programmierung*) und das Klassenkonzept kennenlernen. Das Konzept der objektorientierten Programmierung beruht auf der alltäglichen Erfahrung, dass man Objekte nach zwei Maßstäben beurteilt: Ein Objekt besitzt einerseits messbare Eigenschaften und ist aber auch andererseits über seine Verhaltensweisen definiert. Eine *Klasse* ist ein benutzerdefinierter neuer Datentyp, der durch das Schlüsselwort 'class' gekennzeichnet wird und die gesamte Idee der objektorientierten Programmierung beruht gänzlich auf diesem Konzept der *Klasse*. In einer Klasse werden die messbaren Eigenschaften des Objektes in Instanzvariablen (Daten-Member) gespeichert und durch Konstruktoren werden diese Daten-Member dann initialisiert. Die Verhaltensweisen des Objektes werden durch klasseninterne Funktionen, die sogenannten Member-Funktionen, beschrieben. In dem folgenden Link werden die Grundlagen der Objekt-orientierten Programmierung allgemein am Beispiel von *C++ Klassen* vorgestellt. Eine Anwendung der Objekt-orientierten Programmierung ist in dem Python Programm Räumliches symmetrisches (2 × 2)-Spiel mit Klassenstruktur (SpatialGame\_2x2\_Class.py) zu finden.

## Der mathematische Formalismus eines (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspiels

```
In [17]: TensorProduct(UA, UB)
Out[17]: 
[[e^{i\theta_A} e^{i\phi_A} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), e^{i\theta_A} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), e^{i\theta_A} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)],
 [e^{-i\theta_B} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), e^{i\theta_B} e^{i\phi_B} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), e^{-i\theta_B} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)],
 [-e^{i\theta_B} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), e^{-i\theta_B} e^{i\phi_B} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), e^{-i\theta_B} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)],
 [\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), -e^{-i\theta_B} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), -e^{-i\theta_B} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), e^{-i\theta_B} e^{i\phi_B} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)]]

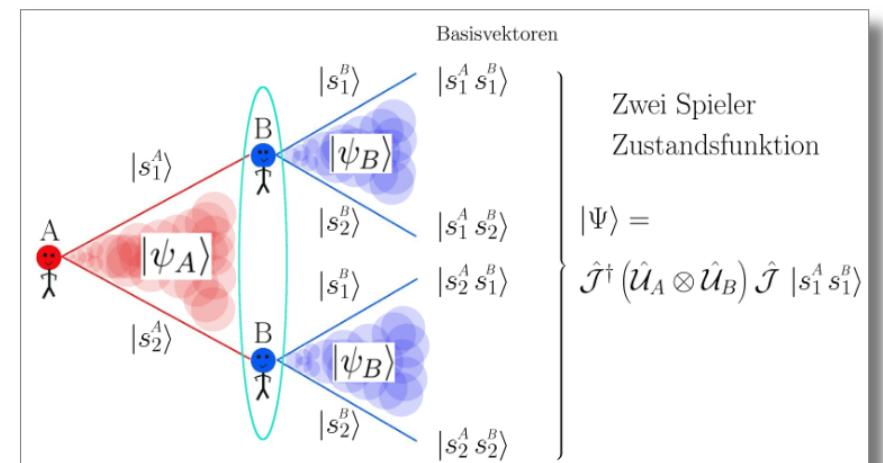
Die Verschränkungsoperator \hat{J} := e^{i\pi(\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B)} benennt sich zu:
```

```
In [18]: J = -Symbol('J', real=True)
J.simplify((TensorProduct(UA, UB).subs([(i,pi), (p,0), (p,pi)])) * (-1*gem/2)).expand()
```

Um die mathematische Beschreibung des quantenspieltheoretischen Modells (siehe rechtes Panel dieser Vorlesung) zu verdeutlichen, wird im Folgenden ein (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspiel betrachtet. In dem Jupyter Notebook Quanten Spieltheorie werden die Entscheidungsoperatoren der Spieler mittels der beiden Entscheidungswinkel  $\theta_\mu$  und  $\varphi_\mu$  ( $\mu = A, B$  für Spieler A und B) wie

Sowohl die deterministische evolutionäre Spieltheorie, als auch die Spieltheorie auf komplexen Netzwerken zeigt, dass die Strategientwicklung von Populationen sich zu Dilemma-artige Situationen entwickeln können. Die einzelnen Spieler der Population sehen sich (aufgrund der Dilemma-artigen Struktur der Auszahlungsmatrix) gezwungen eine Strategie zu wählen, in der jeder einzelne Spieler und somit die gesamte Population einen geringen Nutzen erhielt, obwohl ein vorteilhafterer Zustand möglich wäre. In dieser Vorlesung betrachten wir die *Quantenspieltheorie*, die einen speziellen mathematischen Formalismus bereitstellt, um kooperative Effekte in die Spieltheorie miteinzubeziehen.

Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden. Ist die Strategieverschränkung der Spieler im imaginären Raum der denkbaren Entscheidungswege nur genügend groß, so können zusätzliche Nash-Gleichgewichte auftreten und zuvor existente dominante Strategien sich auflösen.



Die obere Abbildung zeigt den Spielbaum eines (2 Personen)-(2 Strategien)

## Einführung in die Objekt-orientierte Programmierung

Die meisten Programmietechniken, die wir bis jetzt kennengelernt haben, verwendeten den Programmentwurfstil der *prozeduralen Programmierung* und wir benutzten meist die Programmiersprache Python bzw. verwendeten Python Jupyter Notebooks. Wir werden nun einerseits den Fokus immer mehr auf die Strukturierung von Programmen legen (das Programmierparadigma der objektorientierten Programmierung) und dies zunächst am Beispiel des in C++ integrierten Klassenkonzept beschreiben.

Das Konzept der objektorientierten Programmierung beruht auf der alltäglichen Erfahrung, dass man Objekte nach zwei Maßstäben beurteilt:

Ein Objekt besitzt einerseits messbare Eigenschaften und ist aber auch andererseits über seine Verhaltensweisen definiert. Eine *C++ Klasse* ist ein benutzerdefinierter neuer Datentyp, der durch das Schlüsselwort 'class'

gekennzeichnet wird und die gesamte Idee der objektorientierten Programmierung beruht gänzlich auf diesem Konzept der *Klasse*. In einer

C++ Klasse werden die messbaren Eigenschaften des Objektes in Instanzvariablen (Daten-Member) gespeichert und durch Konstruktoren werden diese Daten-Member dann initialisiert. Die Verhaltensweisen des

Objektes werden durch klasseninterne Funktionen, die sogenannten Member-Funktionen beschrieben. In dem folgenden Link werden die Grundlagen der Objekt-orientierten Programmierung und C++ Klassen allgemein vorgestellt und die dort besprochenen Konzepte werden in den nächsten Vorlesungen benutzt, um das Verhalten der Spieler auf einem komplexen Netzwerk in Objekt-orientierter Weise in den C++ und Python Programmen zu implementieren.

# Einführung in die Programmierung

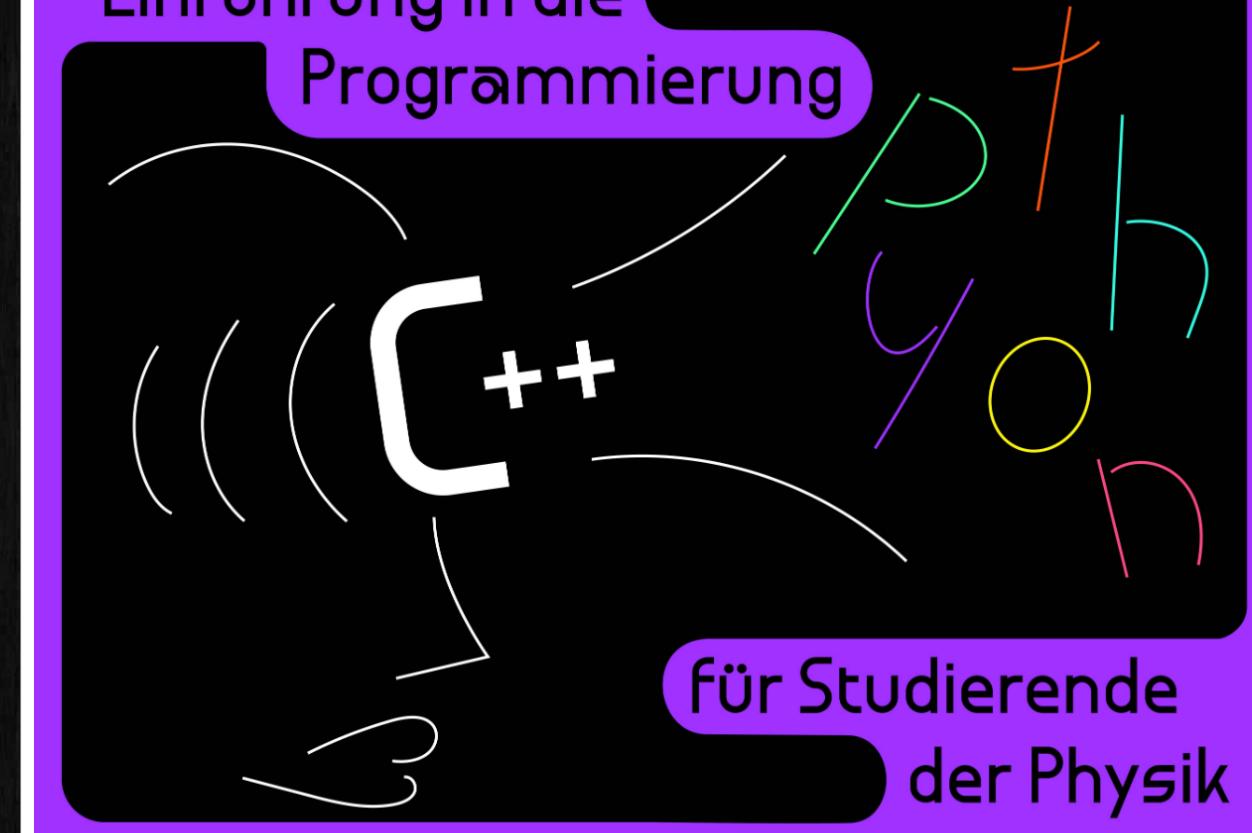


Illustration: Deborah Moldawski

Nächster Zoom Link am 14.07.2022, 14:00-16:00 Uhr; ID: 794 847 5614, PWD: 785453

Die Vorlesung *Einführung in die Programmierung für Studierende der Physik* stellt ein Pflichtmodul im Bachelor Studium Physik der Goethe-Universität Frankfurt dar. Bei regelmäßiger und erfolgreicher Teilnahme an den Übungen/Praktika erhalten Sie eine Zulassung zur Klausur. Den benötigten Schein und sechs Creditpoints erhält man schließlich bei bestandener Klausur. Falls Sie bereits in einem vergangenen Semester (nach der alten Studienordnung) die Zulassung zur Klausur erhalten haben, können Sie direkt an der abschließenden Klausur teilnehmen. Jedoch rate ich Ihnen, die Vorlesung und die Übungen/Praktika trotzdem nochmals zu belegen, da sich die Inhalte und Schwerpunkte zu den vergangenen Vorlesungen unterscheiden könnten.

# Objekt-orientierte Programmierung und C++ Klassen

## Einführung

Die C++ Typen, die wir bisher kennengelernt hatten (z.B. `int i, double a, int v[3], double A[4][5]`), die sogenannten *integrierten Typen*, werden wir nun mittels eines *Abstraktionsmechanismus* erweitern, um eigene, benutzerdefinierte Typen zu erstellen. Ein *benutzerdefinierter Typ*, wie z.B. die C++ Struktur `'struct'` oder die C++ Klasse `'class'`, ist ein Abstraktionskonzept, das den Quelltext eines C++ Programms übersichtlicher macht, indem es das Programm in voneinander separierbare Teilbereiche aufteilt. Große Programme bestehen oft aus einzelnen Teilaufgaben, die man mittels einer sinnvollen Klassenstruktur voneinander trennen und ordnen kann. Eine *C++ Klasse* ist ein benutzerdefinierter neuer Datentyp, der durch das Schlüsselwort `'class'` gekennzeichnet wird und die gesamte Idee der objektorientierten Programmierung beruht gänzlich auf diesem Konzept der *Klasse*.

### Benutzerdefinierte Typen und Abstraktionsmechanismen in C++

Das Konzept der *objektorientierten Programmierung* beruht auf der alltäglichen Erfahrung, dass man Objekte nach zwei Maßstäben beurteilt: Ein Objekt besitzt einerseits messbare Eigenschaften (z.B. Farbe, Gewicht, ...) und ist aber auch andererseits über seine Verhaltensweisen (z.B. zeitliches Verhalten, Interaktionsverhalten, Bewegungsverhalten, ...) definiert. Eine Klasse ist ein abstrakter Oberbegriff für die Beschreibung der gemeinsamen Struktur und des gemeinsamen Verhaltens von realen/fiktiven Objekten (Klassifizierung). Mittels des Konzeptes der Klasse lassen sich solche Objekte im Programm realisieren. Eine Klasse stellt dabei den Bauplan für das zu beschreibende Objekt bereit und die wirkliche

Realisierung des Objektes (die Instanzbildung) findet dann im Hauptprogramm zur Laufzeit statt. Die formale Beschreibung wie das Objekt beschaffen ist, d.h. welche Merkmale (Instanzvariablen bzw. Daten-Member der Klasse) und Verhaltensweisen (Methoden der Klasse bzw. Member-Funktionen) das zu beschreibende Objekt hat, werden innerhalb der Klasse definiert. Eine Klasse ist also eine Vorlage, eine abstrakte Idee, die ein Grundgerüst von Eigenschaften und Methoden vorgibt. Die Erzeugung eines Objektes dieser Klasse entspricht der Materialisierung dieser Idee im Programm. Bei der Erzeugung des Objektes wird der sogenannte *Konstruktor* der Klasse aufgerufen, und verlässt das Objekt den Gültigkeitsbereich seines Teilbereiches des Programms, wird es durch den sogenannten *Destruktor* wieder zerstört. Das Grundgerüst einer Klasse besitzt die folgende Form, wobei im Anweisungsblock der Klasse nicht alle der aufgezählten Größen definiert werden müssen.

```
class Klassenname { 'Anweisungsblock: Instanzvariablen (Daten-Member), Konstruktoren, Member-Funktionen, Destruktor' };
```

### C++ Klassen: Zugriffskontrolle und die öffentlich zugänglichen Bereichen eines Objektes

```
class Klassenname {  
    // Private Instanzvariablen (Daten-Member) der Klasse  
    ...  
  
    // Öffentliche Konstruktoren und Member-Funktionen der Klasse  
    public:  
        // Standard-Konstruktor und überladene Konstruktoren der Klasse  
        ...  
  
        // Member-Funktionen der Klasse  
        ...  
};
```

Eine weitere wichtige Klassen-Terminologie ist die Kennzeichnung von privaten und öffentlich zugänglichen Bereichen des Objektes. In einer Klasse werden die Daten-Member und Member-Funktionen nach außen gekapselt, sodass der Benutzer der Klasse sie nicht manipulieren kann (*private*-Bereiche der Klasse). Kennzeichnet man einen Bereich der Klasse jedoch als *public*, so kann man von außen auf die Daten und Methoden zugreifen und sie auch verändern. Neben diesen beiden Klassifizierungsbegriffen gibt es zusätzlich die Kennzeichnung *protected*, bei der man nur von Unterklassen heraus auf die Daten und Methoden zugreifen kann. Besitzt eine Klasse keine explizite Kennzeichnung von privaten und öffentlich zugänglichen Bereichen, so sind alle Merkmale der Klasse privat. Bei der Verwendung der C++ Struktur `'struct'` sind hingegen alle Merkmale öffentlich und man kann `'struct'` somit als eine öffentliche `'class'` ansehen. Die nebenstehende Abbildung veranschaulicht die Schreibweise einer C++ Klasse im Quellcode, wobei gewöhnlicherweise zunächst die privaten und dann die als öffentlich gekennzeichneten Definitionen und Anweisungen folgen.

### Merkmale von C++ Klassen: Daten-Member und Member-Funktionen

Daten und Funktionen, die in einer Klassendefinition deklariert werden, bezeichnet man als *Daten-Member* (Instanzvariablen) und *Member-Funktionen* (Klassen-interne Funktionen). Durch die Bezeichner *private*, *protected* und *public* findet eine Kapselung der Klassen-internen Merkmale von den anderen Bereichen des C++ Programmes statt. Der

# Objektorientiertes Programm: Die Klasse „Players“

Python  
Programm

```

1  import networkx as nx
2  import numpy as np
3  import matplotlib.pyplot as plt
4  from random import randint, uniform, random, choice
5  from math import isclose
6  import os
7  from matplotlib import rcParams
8  import matplotlib.gridspec as gridspec
9
10 # Klasse der relevanten Eigenschaften der Spieler
11 class Players:
12     # Konstruktor zur Initialisierung der Spielereigenschaften
13     def __init__(self, n_nodes, initial_coop_prob=0.3):
14         # Instanzvariablen (Daten-Member) der Klasse: [id, x, y, current_strat, payoff, next_strat, last_opponent_strat]
15         # data: [id, x, y, current_strat, payoff, next_strat, last_opponent_strat]
16         self.data = np.zeros((n_nodes, 7))
17         self.n_nodes = n_nodes
18
19         # Initialisierung
20         k = 0
21         for i in range(int(np.sqrt(n_nodes))):
22             for j in range(int(np.sqrt(n_nodes))):
23                 self.data[k, 0] = k
24                 self.data[k, 1] = i
25                 self.data[k, 2] = j
26                 self.data[k, 3] = 1 if uniform(0, 1) < initial_coop_prob else 0
27                 self.data[k, 5] = self.data[k, 3]
28                 self.data[k, 6] = 1 - self.data[k, 3] # dummy
29                 k += 1
30
31     # Öffentlichen Member-Funktionen der Klasse
32     def reset_payoffs(self):
33         self.data[:, 4] = 0.0
34
35     def set_next_strategy(self, node_idx, strategy):
36         self.data[node_idx, 5] = strategy
37
38     def apply_next_strategies(self):
39         self.data[:, 3] = self.data[:, 5]
40
41     def get_current_strategy(self, node_idx):
42         return self.data[node_idx, 3]
43
44     def get_last_opponent_strategy(self, node_idx):
45         return self.data[node_idx, 6]
46
47     def update_last_opponent(self, node_idx, opponent_strategy):
48         self.data[node_idx, 6] = opponent_strategy
49
50     def mean_strategy(self):
51         return np.mean(self.data[:, 3])

```

```

52     # Öffentliche Member-Funktion: Strategie-Update nach verschiedenen Regeln (rule)
53     def update_strategies(self, graph, rule):
54         for node in range(self.n_nodes):
55             neighbors = list(graph.neighbors(node))
56             if not neighbors:
57                 continue
58
59             my_payoff = self.data[node, 4]
60             my_current = self.get_current_strategy(node)
61             # Standardmäßig: next = current (falls keine Änderung)
62             self.set_next_strategy(node, my_current)
63
64             # Imitate the Best
65             if rule == 0:
66                 neigh_payoffs = self.data[neighbors, 4]
67                 max_p = np.max(neigh_payoffs)
68                 if max_p > my_payoff and not isclose(max_p, my_payoff):
69                     best_idx = neighbors[np.argmax(neigh_payoffs)]
70                     best_strategy = self.get_current_strategy(best_idx)
71                     self.set_next_strategy(node, best_strategy)
72
73             # Zufälliger besserer Nachbar
74             elif rule == 1:
75                 neigh = neighbors[randint(0, len(neighbors)-1)]
76                 if self.data[neigh, 4] > my_payoff and not isclose(self.data[neigh, 4], my_payoff):
77                     self.set_next_strategy(node, self.get_current_strategy(neigh))
78
79             # Tit-for-Tat (Mehrheitsentscheidung)
80             elif rule == 2:
81                 last_moves = [self.get_last_opponent_strategy(n) for n in neighbors]
82                 coop_count = sum(last_moves)
83                 new_strat = 1 if coop_count >= len(neighbors)/2 else 0
84                 self.set_next_strategy(node, new_strat)
85
86             # Fermi-Funktion
87             elif rule == 3:
88                 fermi_K = 0.5 # Temperatur für Fermi-Regel
89                 neigh = neighbors[randint(0, len(neighbors)-1)]
90                 neigh_payoff = self.data[neigh, 4]
91                 neigh_strat = self.get_current_strategy(neigh)
92                 if my_current != neigh_strat: # Nur wenn unterschiedlich
93                     delta = my_payoff - neigh_payoff
94                     prob = 1 / (1 + np.exp(delta / fermi_K))
95                     if random() < prob:
96                         self.set_next_strategy(node, neigh_strat)
97
98             # # Imitate the Best mit Fehlerrate μ
99             elif rule == 4:
100                 mu = 0.01 # Fehlerrate μ
101                 neigh_payoffs = self.data[neighbors, 4]
102                 max_p = np.max(neigh_payoffs)
103                 if max_p > my_payoff and not isclose(max_p, my_payoff):
104                     best_idx = neighbors[np.argmax(neigh_payoffs)]
105                     best_strategy = self.get_current_strategy(best_idx)
106                     self.set_next_strategy(node, best_strategy)
107                     if random() < mu:
108                         self.set_next_strategy(node, choice([0, 1]))
109
110             else:
111                 raise ValueError(f"Unbekannte Update-Regel: {rule}")

```

Weitere „update“-Regeln

Da wir im Laufe der Vorlesungsreihe nun an einem Punkt angekommen sind, bei dem die verwendeten Programme sehr umfangreich und unübersichtlich geworden sind, ist es sinnvoll, am Ende einige Zeit mit der Strukturierung von Computerprogrammen zu verbringen. Das Paradigma der *Objekt-orientierten Programmierung* und das Konzept der *Klasse* wird in dieser Vorlesung behandelt. Danach befassen wir uns mit der *Quantenspieltheorie*. Zunächst wird der mathematische Formalismus eines (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspiels vorgestellt. Dann wenden wir den quantenspieltheoretischen Formalismus auf dominante, Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele an. Wir werden sehen, dass wenn die Strategieverschränkung der Spieler nur groß genug ist, können zusätzliche Nash-Gleichgewichte entstehen und zuvor vorhanden Nash-Gleichgewichte verschwinden. Ungünstige, Dilemma-artige Situationen und nicht vorteilhafte evolutionär stabile Strategien können sich ab definierten Verschränkungsbarrieren auflösen.

## Einführung in die Objekt-orientierte Programmierung

Die meisten Programmiertechniken, die wir bis jetzt kennengelernt haben, verwendeten den Programmierungswurfstil der *prozeduralen Programmierung* und wir benutzten meist die Programmiersprache Python bzw. verwendeten Python Jupyter Notebooks. Wir werden nun den Fokus auf die Strukturierung von Programmen legen (das Programmierparadigma der objektorientierten Programmierung) und das Klassenkonzept kennenlernen. Das Konzept der objektorientierten Programmierung beruht auf der alltäglichen Erfahrung, dass man Objekte nach zwei Maßstäben beurteilt: Ein Objekt besitzt einerseits messbare Eigenschaften und ist aber auch andererseits über seine Verhaltensweisen definiert. Eine *Klasse* ist ein benutzerdefinierter neuer Datentyp, der durch das Schlüsselwort 'class' gekennzeichnet wird und die gesamte Idee der objektorientierten Programmierung beruht gänzlich auf diesem Konzept der *Klasse*. In einer Klasse werden die messbaren Eigenschaften des Objektes in Instanzvariablen (Daten-Member) gespeichert und durch Konstruktoren werden diese Daten-Member dann initialisiert. Die Verhaltensweisen des Objektes werden durch klasseninterne Funktionen, die sogenannten Member-Funktionen, beschrieben. In dem folgenden Link werden die Grundlagen der *Objekt-orientierten Programmierung* allgemein am Beispiel von C++ Klassen vorgestellt. Eine Anwendung der Objekt-orientierten Programmierung ist in dem Python Programm [Räumliches symmetrisches \(2 × 2\)-Spiel mit Klassenstruktur \(SpatialGame\\_2x2\\_Class.py\)](#) zu finden.

## Der mathematische Formalismus eines (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspiels

Um die mathematische Beschreibung des quantenspieltheoretischen Modells (siehe rechtes Panel dieser Vorlesung) zu verdeutlichen, wird im Folgenden ein (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspiel betrachtet. In dem Jupyter Notebook [Quanten Spieltheorie](#) werden die Entscheidungsoptoren der Spieler mittels der beiden Entscheidungswinkel  $\theta_\mu$  und  $\varphi_\mu$  ( $\mu = A, B$  für Spieler A und B) wie folgt definiert:

$$\hat{U}_\mu(\theta_\mu, \varphi_\mu) := \begin{pmatrix} e^{i\varphi_\mu} \cos(\frac{\theta_\mu}{2}) & \sin(\frac{\theta_\mu}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta_\mu}{2}) & e^{-i\varphi_\mu} \cos(\frac{\theta_\mu}{2}) \end{pmatrix} \quad \forall \quad \theta_\mu \in [0, \pi] \wedge \varphi_\mu \in [0, \frac{\pi}{2}] .$$

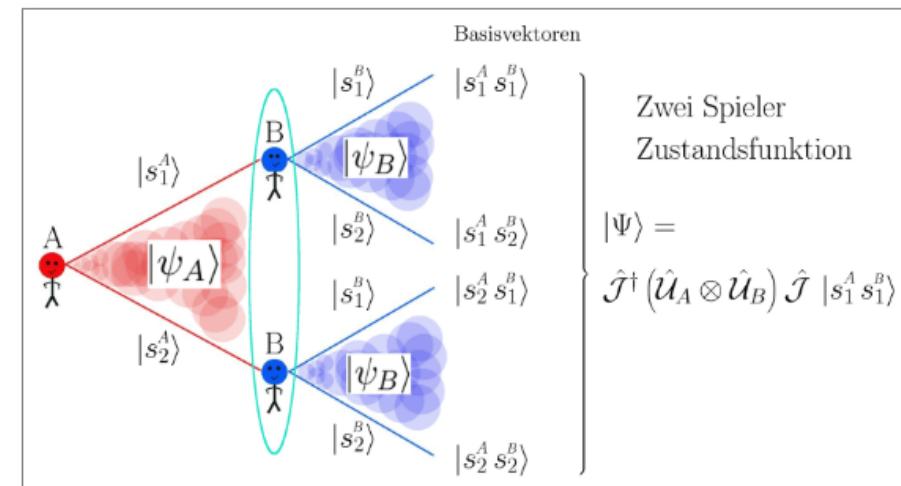
Der Zwei-Spielerzustand  $|\Psi\rangle = \hat{\mathcal{J}}^\dagger (\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B) \hat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle$  ist ein vier komponentiger Spinor, wobei die Basisvektoren dieses vierdimensionalen komplexwertigen Hilbertraumes  $\mathcal{H}$  durch die vier möglichen, klassischen Strategienkombinationen (messbaren Eigenzustände des

Am Anfang dieser Vorlesung gehen wir auf das Klassenkonzept der Objekt-orientierte Programmierung ein und wenden dieses auf die Spieltheorie an (siehe Python Programm [SpatialGame\\_2x2\\_Class.py](#)). Das Programm besteht aus zwei separaten Klassen, wobei die Klasse *Players* die relevanten Eigenschaften der Spieler beschreibt und die Klasse *SpatialGameSimulation* die eigentliche räumliche Simulation des Spiels darstellt.

Sowohl die deterministische evolutionäre Spieltheorie, als auch die Spieltheorie auf komplexen Netzwerken zeigt, dass die Strategienentwicklung von Populationen sich zu Dilemma-artige Situationen entwickeln können. Die einzelnen Spieler der Population sehen sich (aufgrund der Dilemma-artigen Struktur der Auszahlungsmatrix) gezwungen eine Strategie zu wählen, in der jeder einzelne Spieler und somit die gesamte Population einen geringen Nutzen erhielt, obwohl ein vorteilhafterer Zustand möglich wäre. In dieser Vorlesung betrachten wir die *Quantenspieltheorie*, die einen speziellen mathematischen Formalismus bereitstellt, um kooperative Effekte in die Spieltheorie miteinzubeziehen.

Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren

Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden. Ist die Strategienverschränkung der Spieler im imaginären Raum der denkbaren Entscheidungswege nur genügend groß, so können zusätzliche Nash-Gleichgewichte auftreten und zuvor existente dominante Strategien sich auflösen.



# Einführung in die Quanten Spieltheorie



## Complex numbers

G. W. Leibniz (1702)

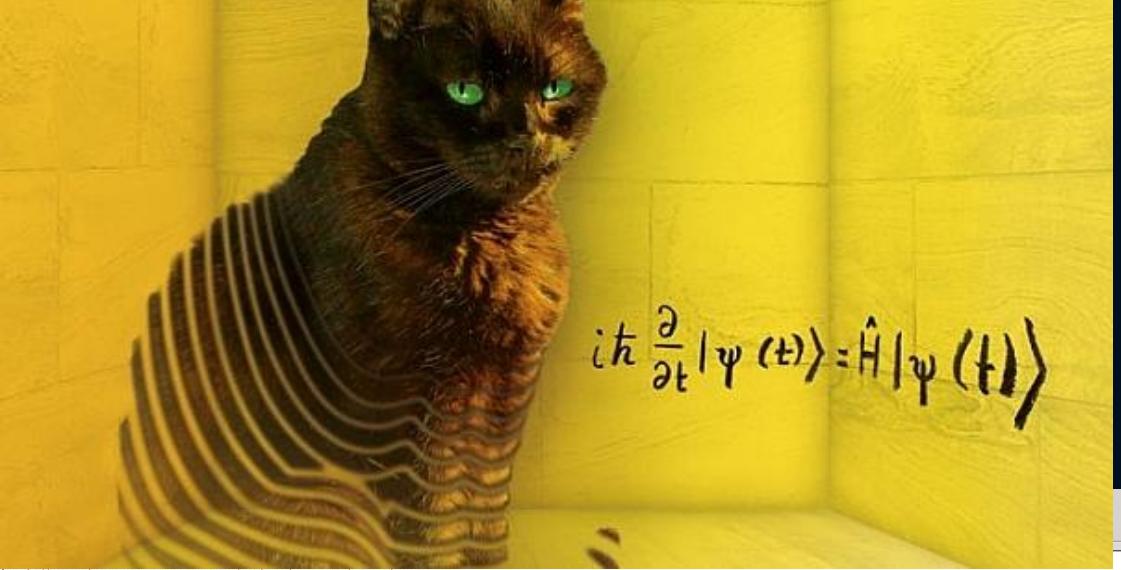
*“...are a subtle and wondrous refuge of the human spirit, almost a hybrid between being and non-being”*

*“...sind eine feine und wunderbare Zuflucht des menschlichen Geistes, beinahe ein Zwittrwesen zwischen Sein und Nichtsein”*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$



The Quantum Wave Function is defined on the space of complex numbers (real numbers and imaginary numbers) the so-called *Hilbertspace*



# Der Quantenzustand und die Schrödinger-Gleichung

## 2) Die Schrödinger-Gleichung

Wie in der Einleitung erläutert, wird in der quantenmechanischen Beschreibung ein apriorischer Zustand  $\Psi$  des Teilchens definiert. Wie beschreibt man nun diesen Zustand eines Quantenobjektes mathematisch? Einerseits soll die zeitliche Entwicklung dieses Zustandes keine wirkliche, reale Abfolge von Ereignissen darstellen - eher eine Tendenz der Entwicklung. Der Zustand soll einer Wahrscheinlichkeitsbeschreibung von meßbaren Ereignissen dienen aber paradoxeise selbst nicht real und empirisch fassbar sein. Die mathematische Beschreibung einer solchen Zustandsfunktion benutzt neben der realen Zahlenwelt auch die imaginären Zahlen und beschreibt den Zustand des Teilchens in einem komplexwertigen sog. Hilbertraum  $\Psi \in \mathcal{H}$ . Im Moment der

Messung kollabiert dieser Zustand zu einer beobachtbaren Eigenschaft des Teilchens und diese observable Größe des Zustandes wird real. In diesem Unterpunkt wird die wichtigste Gleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik (die sog. Schrödinger-Gleichung) vorgestellt und diversen Beispielen erläutert. Die Schrödinger-Gleichung beschreibt wie sich die Zustandsfunktion eines Quantenobjektes  $\Psi(\vec{r}, t)$  zeitlich verändert und bestimmt zusätzlich ihr räumliches Verhalten unter Einwirkung einer Kraft, die durch ein Potential  $V(\vec{r}, t)$  hervorgerufen wird. Sie besitzt das folgende Aussehen:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t) \quad \text{wobei: } \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t)$$

$\hat{H}$  ist der sog. Hamiltonoperator und  $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  der Laplace-Operator.

Unter der Annahme, dass das Potential nicht von der Zeit abhängt ( $V(\vec{r}, t) = V(\vec{r})$ ), lässt sich die Schrödinger-Gleichung mittels des Produktansatzes  $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot f(t)$  in die sog. stationäre (zeitunabhängige) Schrödinger-Gleichung umschreiben:

$$\hat{H} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad \text{mit:} \quad \Psi(\vec{r}, t) = \underbrace{\psi(\vec{r})}_{f(t)} e^{-\frac{i E}{\hbar} t} ,$$

wobei  $E$  die Energie des Zustandes darstellt.



Die Quantentheorie stellt eine gänzlich neue Formulierung der Physik dar. Bei der mathematischen Konstruktion dieser neuen Theorie stand man vor dem Dilemma, dass man einerseits daran gebunden ist, jedes physikalische Experiment in den Begriffen der klassischen Physik zu beschreiben, andererseits benötigte man neue, nicht klassische Elemente innerhalb der Theorie, um z.B. den Welle-Teilchen-Dualismus oder nichtlokale Eigenschaften von Teilchen äquivalent zu beschreiben. Am Ende dieser Entwicklung stand ein vollkommen neues Gerüst einer mathematischen Beschreibung, welches z.B. mittels der "Kopenhagener Deutung der Quantentheorie" interpretiert und verstanden wurde.

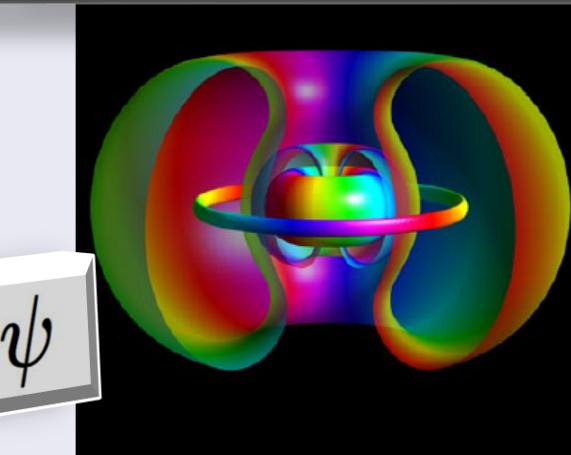
# Quantum Measurement and Reality

$$\langle \hat{M} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \hat{M} \psi^*(x, t) \, dx$$

At the moment of measurement, the complex-valued state of the quantum object collapses into an observable property:

*The observable property of the object becomes real*

*The decision state of a player collapses to one of the pure strategies*



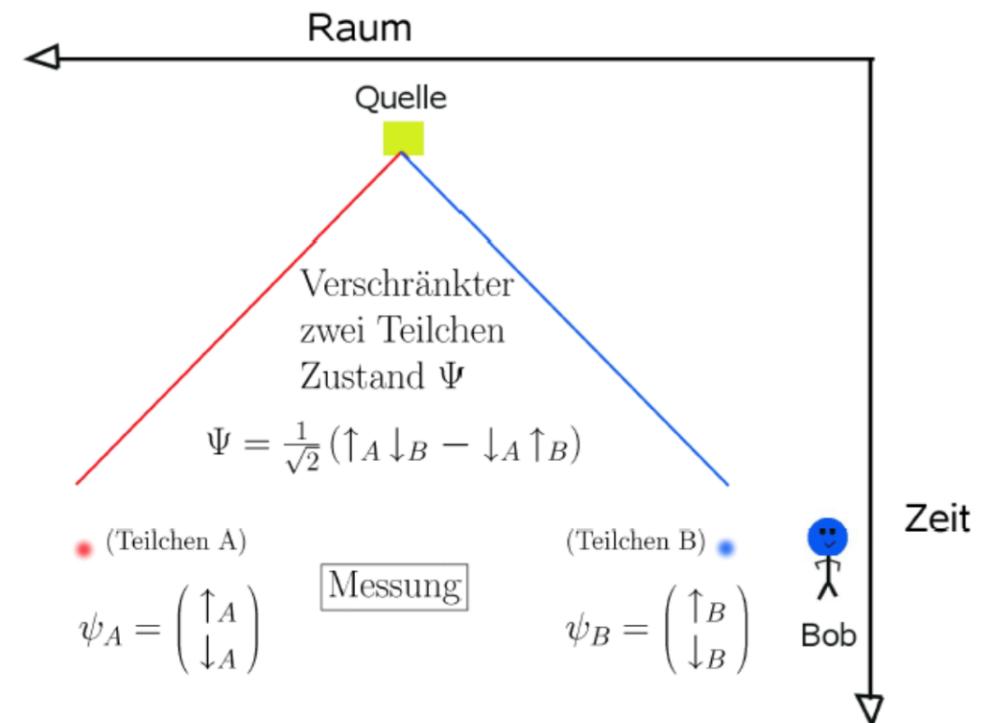
$\psi$

berechnet  
des Elek  
Quanten  
Messgrö  
nur disk  
allgemei  
durch Überlagerung (Superposition) der

# Quantum Entanglement

## Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon

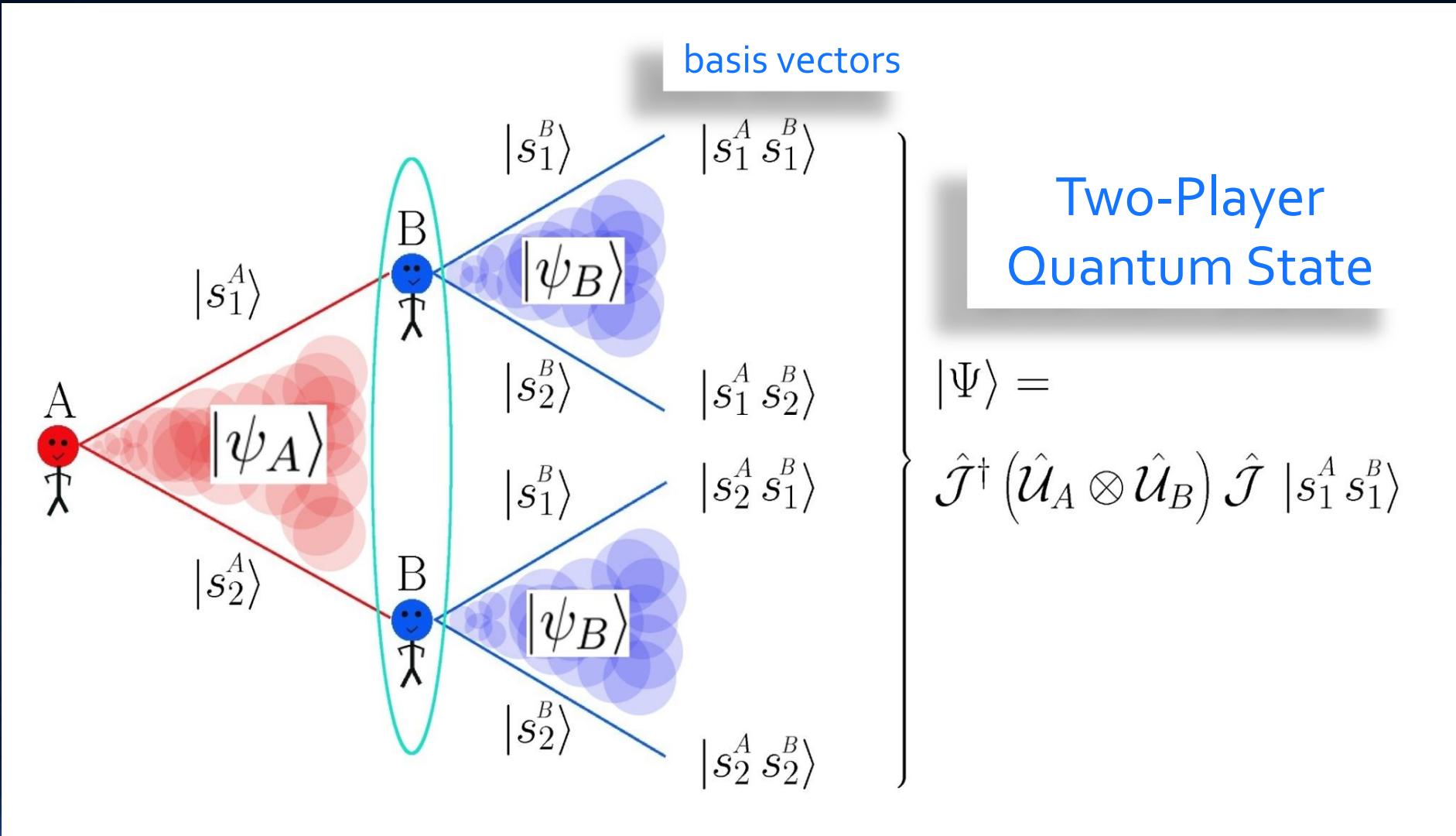
A.Einstein: „Spooky long-distance effect“



*Richard Feynman:*  
*“I think I can safely say that  
nobody understands quantum mechanics.”*

# Quantum Games

The entangled Two-Player Quantum-Spinor



Through a quantum-theoretical entanglement of the imaginary decision-making paths within an actor network, a population can succeed in escaping a dilemma-like situation if the value of the entanglement exceeds a certain threshold value.

# Spielbaum eines simultanen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels

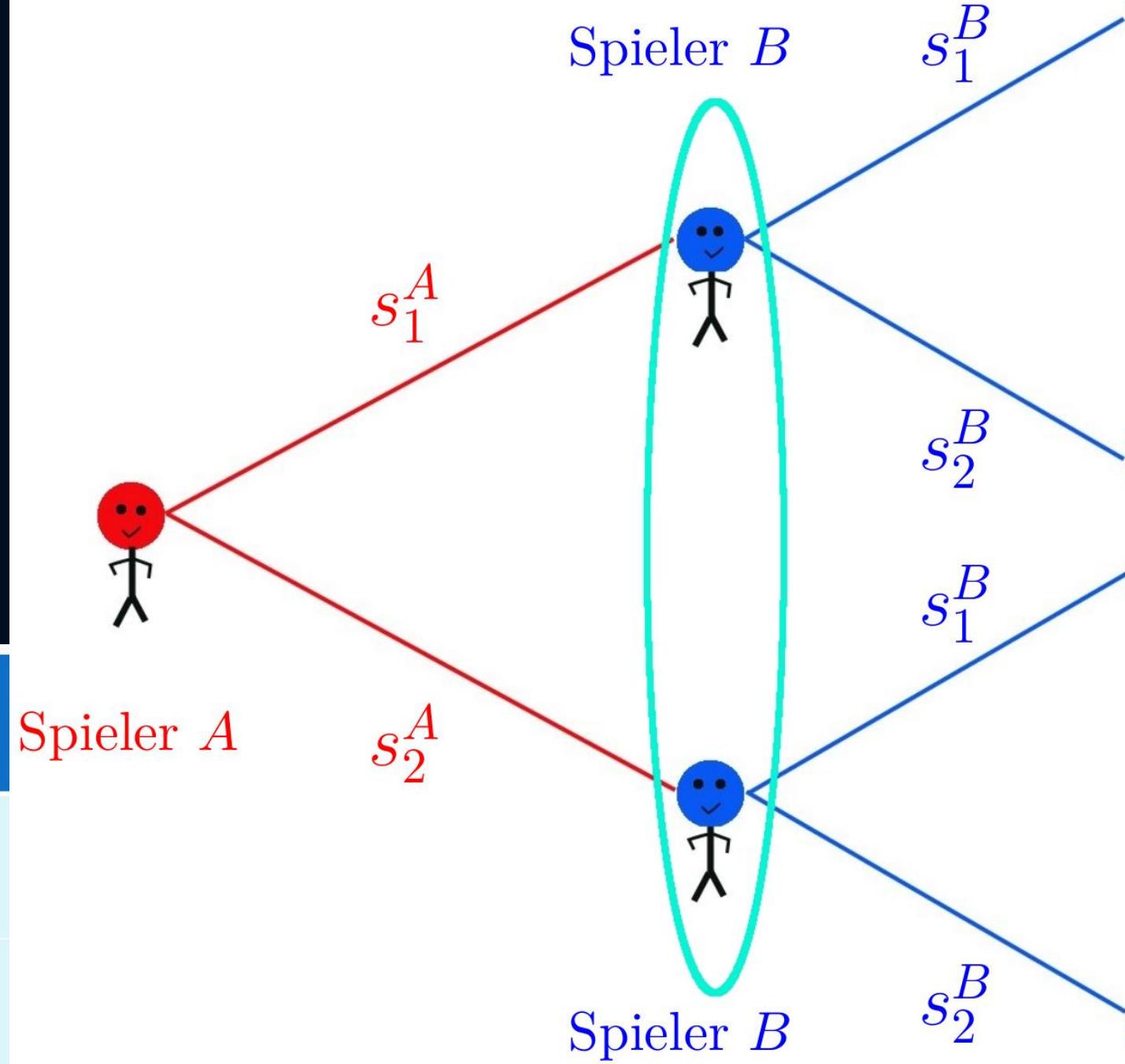
## Definition des Spiels:

Menge der Spieler: A und B

Menge der Strategien: 1 und 2

Auszahlungstabelle:

		Spieler B wählt Strategie 1	Spieler B wählt Strategie 2
Spieler A wählt Strategie 1	(\$ <sup>A</sup> <sub>11</sub> , \$ <sup>B</sup> <sub>11</sub> )	(\$ <sup>A</sup> <sub>12</sub> , \$ <sup>B</sup> <sub>12</sub> )	
	(\$ <sup>A</sup> <sub>21</sub> , \$ <sup>B</sup> <sub>21</sub> )	(\$ <sup>A</sup> <sub>22</sub> , \$ <sup>B</sup> <sub>22</sub> )	





Elinor Ostrom (Nobel Prize 2009), "Collective Action and the Evolution of Social Norms", The Journal of Economic Perspectives, Vol. 14, No. 3 (2000), pp. 137-158

"Face-to-face communication in a public good game-as well as in other types of social dilemmas-produces substantial increases in cooperation that are sustained across all periods including the last period ...Thus, recent developments in evolutionary theory and supporting empirical research provide strong support for the assumption that modern humans have inherited a propensity to learn social norms, similar to our inherited propensity to learn grammatical rules. Social norms are shared understandings about actions that are obligatory, permitted, or forbidden ..."

Ernst Strüngmann Forum (FIAS, May 27–June 1, 2012):  
The Cultural Evolution of the Structure of Human Groups

How important are collective decision-making mechanisms compared to individual ones in the evolution of social systems? ...

# Formation von „Communities“

<http://networksciencebook.com/chapter/9>

## Defining Communities

Our sense of communities rests on a second hypothesis (Image 9.4):

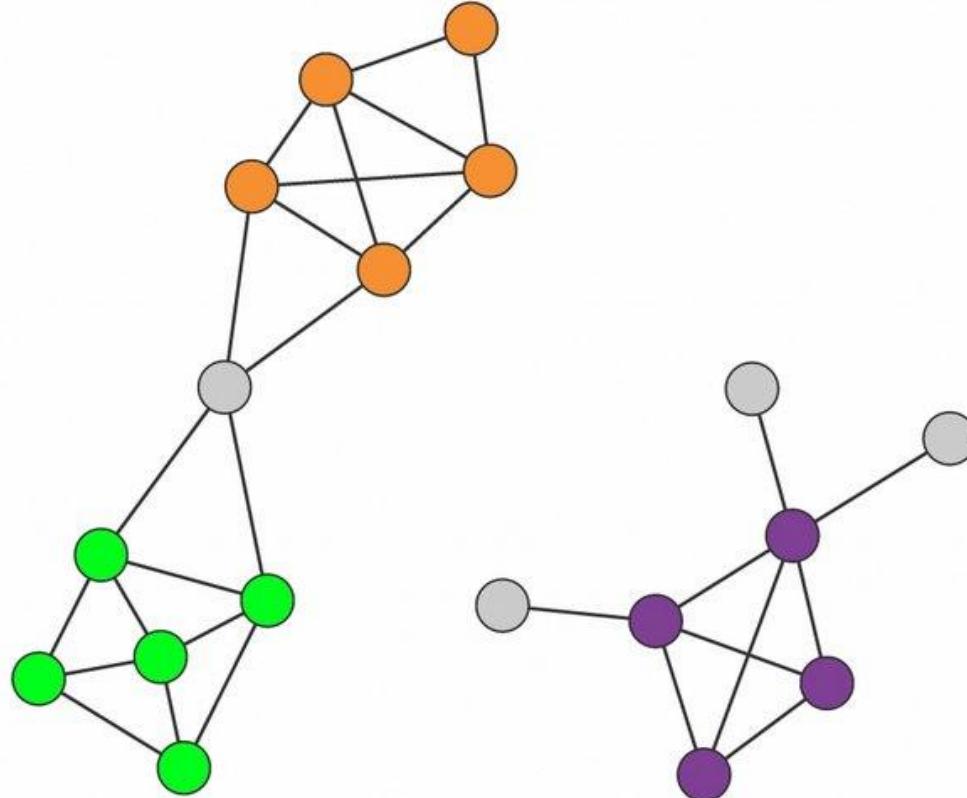


Image 9.4

### Connectedness and Density Hypothesis

Communities are locally dense connected subgraphs in a network. This expectation relies on two distinct hypotheses:

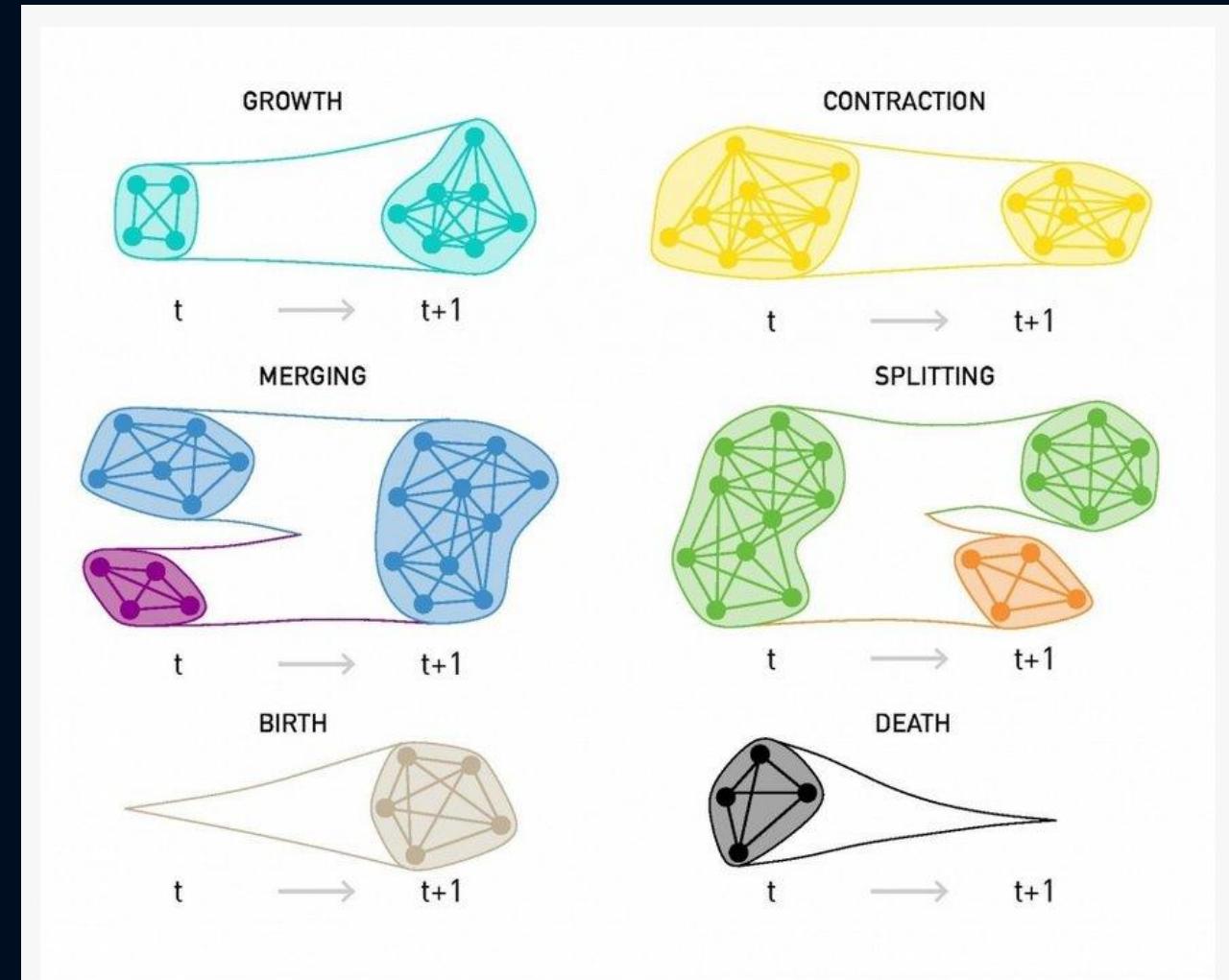


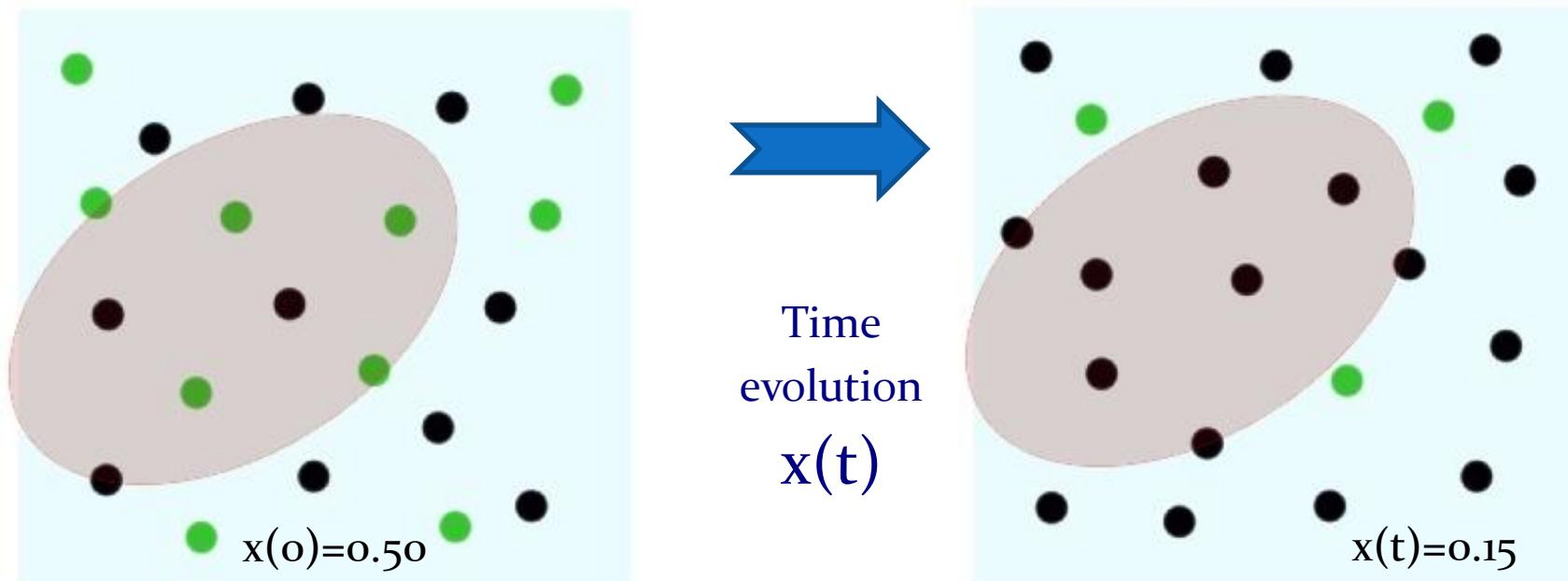
Image 9.31

### Evolving Communities

When networks evolve in time, so does the underlying community structure. All changes in community structure are the result of six elementary events in the life of a community, illustrated in the figure: a community can grow or contract; communities can merge or may split; new communities are born while others may disappear. After [50].

## Introduction

Die Quanten-Spieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Akteure wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden.



Strategies of each node (of each player): (green, black),  $x(t)$  : Fraction of player with strategy „green“ as a function of time t  
Grey region: Group dependent collective cultural or moral standard

# Denkwege im Gefangenendilemma

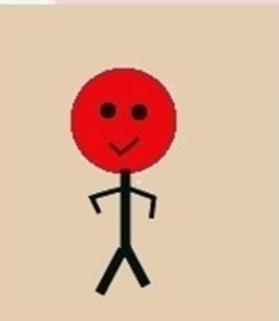
If A betrays me it is better  
if I also betray A.

If A is silent, it is better  
if I betray A

Complex space  
of all possible ways of thinking

If B betrays me it is better  
if I also betray B

If B is silent, it is better  
if I betray B



be silent  
betray B



be silent      betray A

A \ B	C	D
C	(-1, -1)	(-5, 0)
D	(0, -5)	(-4, -4)

# Superpositionen von Eigenzuständen

## Schrödingers Katze



Figure: Theoretische Versuchsanordnung des Gedankenexperiments.

In einem geschlossenen Kiste befindet sich ein instabiler Atomkern, der innerhalb einer bestimmten Zeitspanne mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zerfällt. Im Falle eines Zerfalls werde Giftgas freigesetzt, was eine im Raum befindliche Katze tötet. Bevor ein Beobachter die Kiste öffnet, schwebt der Zustand  $\psi$  der Katze zwischen den Eigenzuständen ' $\psi_1 :=$  Lebend' und ' $\psi_2 :=$  Tot'.

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \psi_2)$$

# Superpositionen von Eigenzuständen

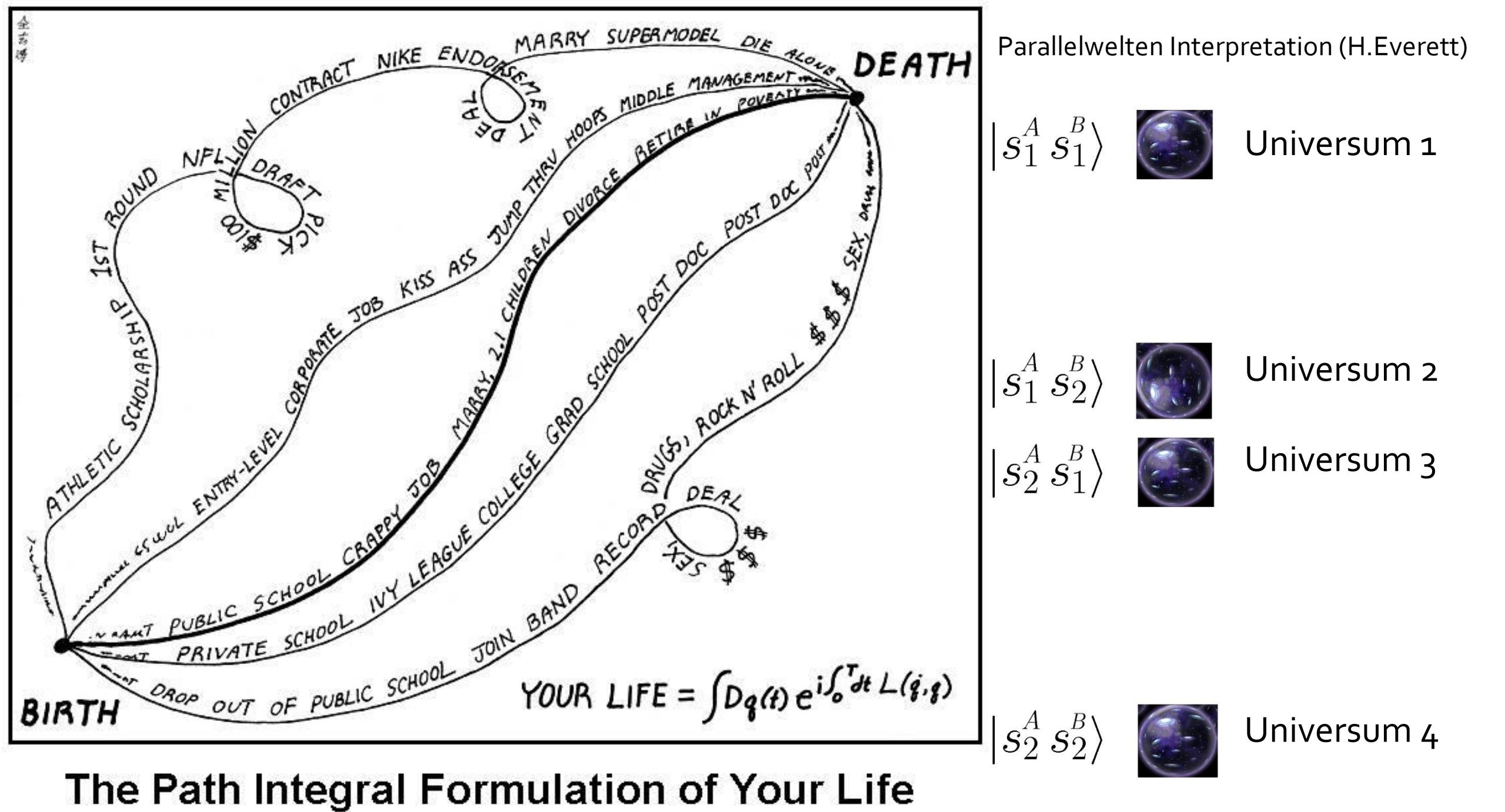
## Schrödingers Katze



Figure: Theoretische Versuchsanordnung des Gedankenexperiments.



The quantum-mechanical "Schrödinger's cat" paradox according to the Many-Worlds interpretation. In this interpretation, every quantum event is a branch point; the cat is both alive and dead, even before the box is opened, but the "alive" and "dead" cats are in different branches of the universe, both of which are equally real, but which do not interact with each other.<sup>[a]</sup>



## Beispiel: Das Wasserstoffatom

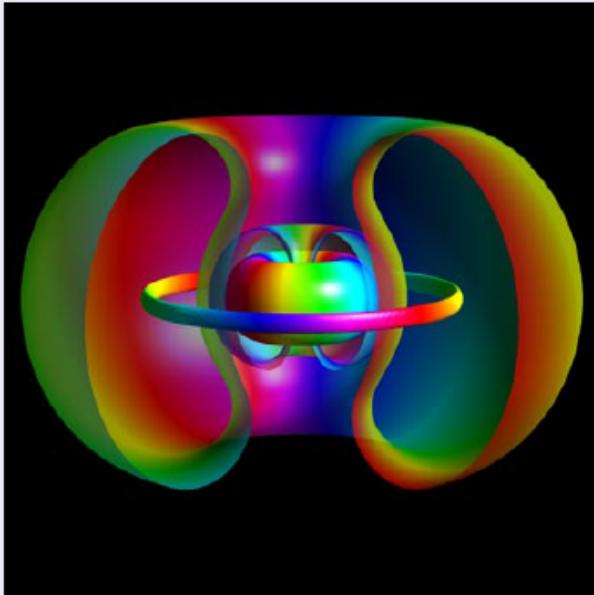


Figure:

Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im Wasserstoffatom ( $n=4, l=2, m=2$ ). Quelle: Bernd Thaller,

Visual Quantum Mechanics

Der Zustand eines Elektrons im Wasserstoffatom wird mit Hilfe der stationären Schrödinger-Gleichung berechnet. Die messbaren Eigenzustände des Elektrons ( $\psi_{nlm}(\vec{r})$ ) sind durch ihre Quantenzahlen ( $n, l, m$ ) quantisiert, d.h. Messgrößen wie z.B. die Energie können nur diskrete Werte annehmen. Der allgemeine Elektronenzustand ergibt sich durch Überlagerung (Superposition) der Eigenzustände ( $a_{nlm} \in \mathbb{C}$ ).

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l a_{nlm} \psi_{nlm}$$

# Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon

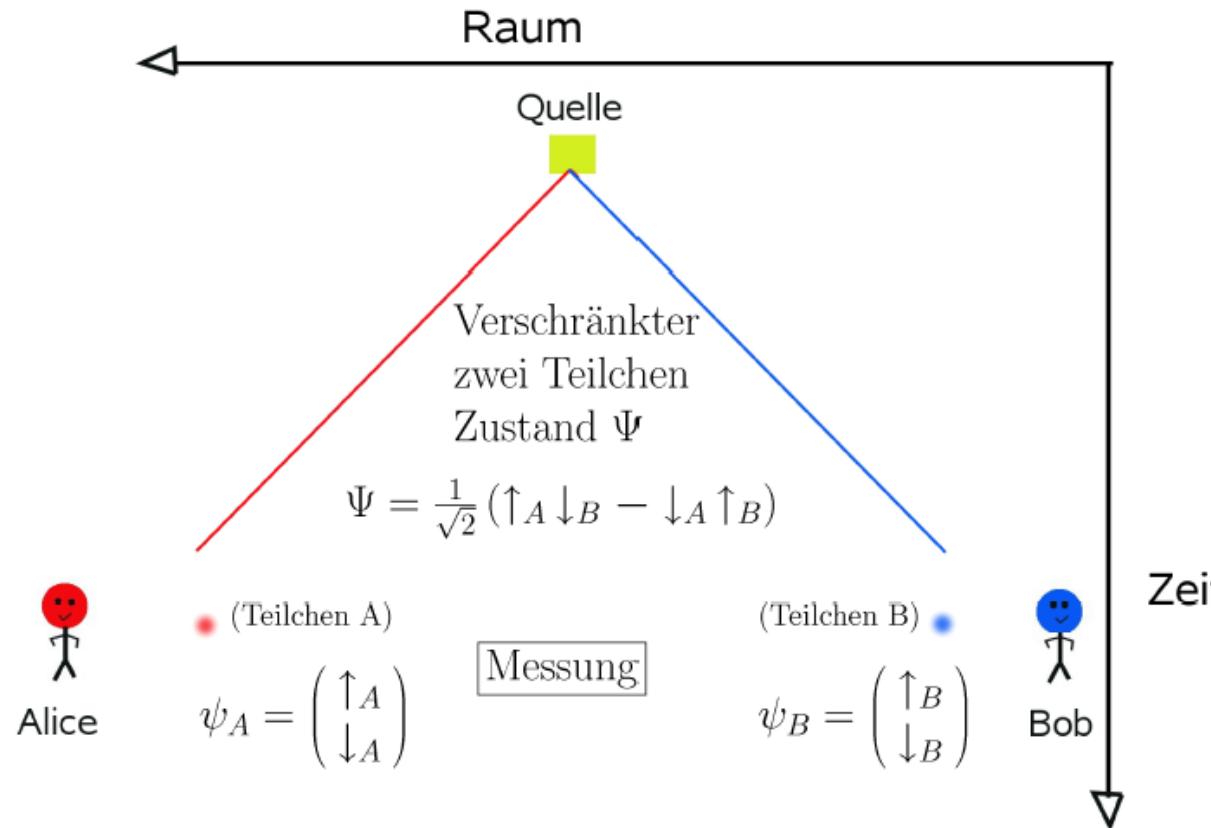


Figure: EPR Gedankenexperiment: Obwohl es keine messbare Wechselwirkung zwischen den Teilchen A und B gibt, sind diese dennoch mittel einer Quantenverschänkung verbunden.

## Verschränkte 2-Niveau-Quantensysteme

Zwei Teilchen (A,B) haben die Möglichkeit zwischen zwei Zuständen ( $\uparrow$ ,  $\downarrow$ ) zu wählen. Die Basisvektoren der jeweiligen Hilberträume der Teilchen seien wie folgt definiert:

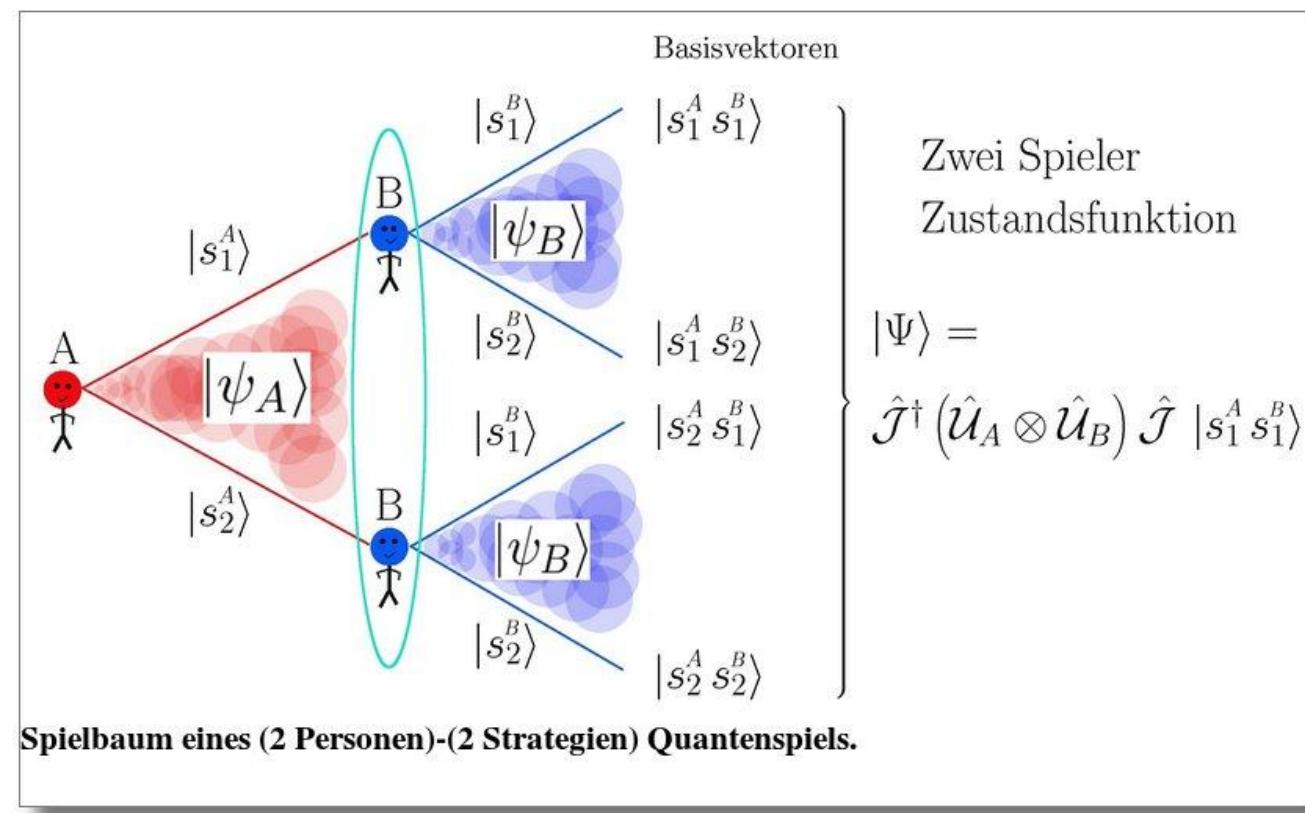
Zustand des Teilchens A:  $\psi_A \in \mathcal{H}_A \equiv \mathbb{C}^2$ , Basis:  $\{\uparrow_A, \downarrow_A\}$

Zustand des Teilchens B:  $\psi_B \in \mathcal{H}_B \equiv \mathbb{C}^2$ , Basis:  $\{\uparrow_B, \downarrow_B\}$

Der Hilbertraum des zusammengesetzten Systems ist ein komplexer vierdimensionaler Raum ( $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ). Der Gesamtzustand des 2-Teilchen Systems  $\Psi$  kann unter Umständen nicht in die jeweiligen Einzelzustände separiert werden.

Verschränkter Zustand (z.B.):  $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow_A \downarrow_B - \downarrow_A \uparrow_B)$

## III.2 Quanten Spieltheorie



Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden. Ist die Strategienverschränkung der Spieler im imaginären Raum der denkbaren Entscheidungswege nur genügend groß, so können zusätzliche Nash-Gleichgewichte auftreten und zuvor existente dominante Strategien sich auflösen.

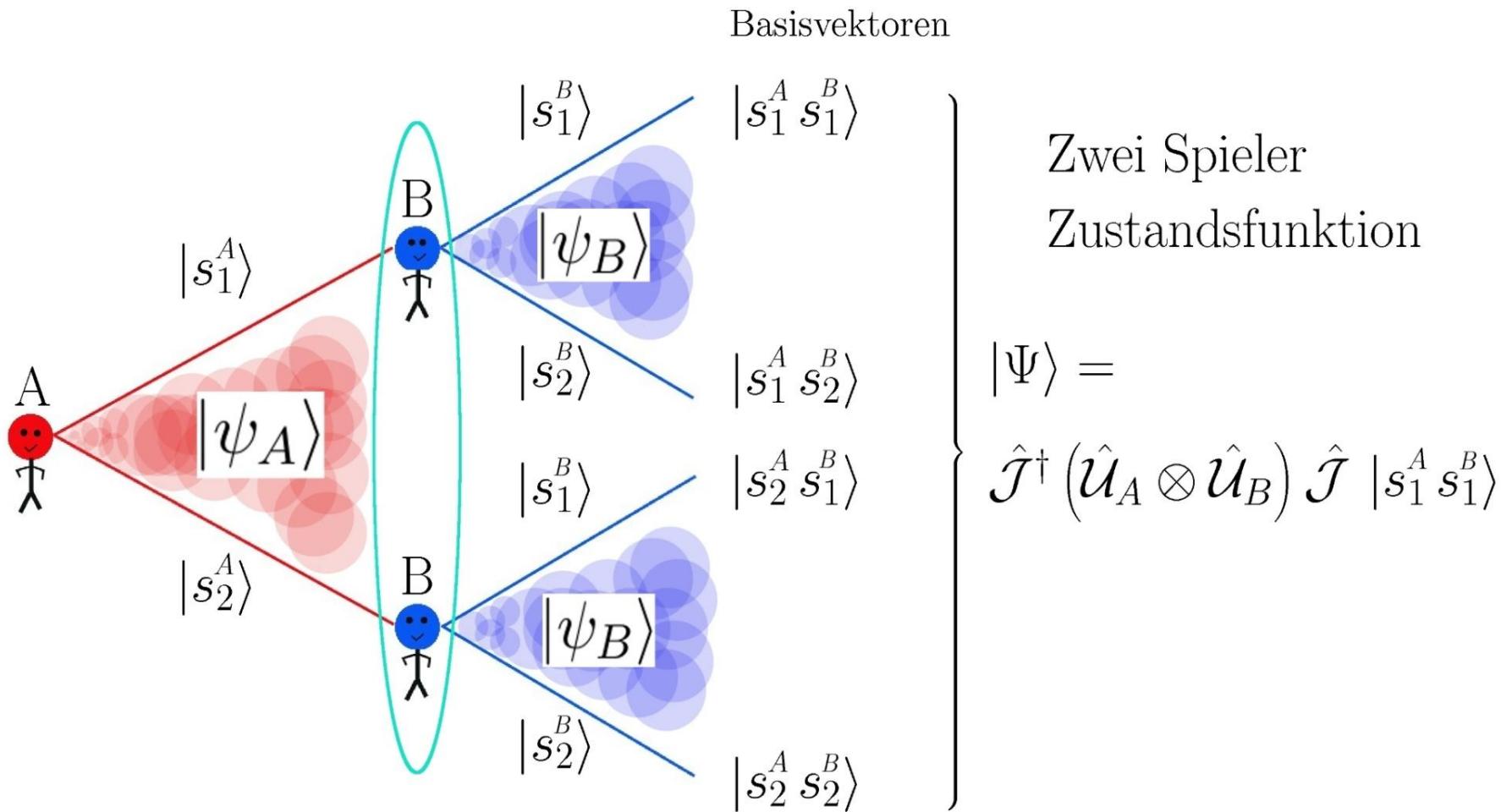
Die Quanten-Spieltheorie beschreibt den Entscheidungszustand eines Spielers  $\mu = A, B$ , bevor dieser die endgültige Wahl der reinen Strategie getroffen hat, als eine komplexwertige Größe (einen sog. Spinor  $|\psi\rangle_A$  bzw.  $|\psi\rangle_B$ ) in einem zweidimensionalen Zustandsraum, dem sogenannten

Hilbertraum  $\mathcal{H}_A$  bzw.  $\mathcal{H}_B$ . Der Zwei-Spielerzustand  $|\Psi\rangle$  ist ein

vierkomponentiger Spinor, welcher auf dem gemeinsamen Hilbertraum der Spieler ( $\mathcal{H} := \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ) definiert ist. Formal setzt sich dieser aus den Entscheidungsmatrizen (Entscheidungsoperatoren)  $\hat{\mathcal{U}}_A$  bzw.  $\hat{\mathcal{U}}_B$  und der Verschränkungsmatrix (bzw. dem Verschränkungsoperator)  $\hat{\mathcal{J}}$  zusammen (siehe nebenstehenden Abbildung). Die der evolutionären Entwicklung zugrundeliegende Replikatordynamik besitzt in der evolutionären Quantenspieltheorie eine komplexere Struktur und die jeweiligen evolutionär stabilen Strategien können sich, abhängig vom Maß der Verschränkung, ändern.

# Quantum Games

## The Quantum Game Tree



# Wie geht man in der Physik vor? Wie beschreibt man in der Physik das Verhalten der untersuchten Dinge?

Nehmen wir z.B. das Elektron als das Ding (der Aktant (Akteur, Knoten, Spieler)) des zu untersuchenden Systems. Mit welcher Theorie beschreiben wir das Verhalten dieses Elektrons?

des Elektrons und seines zugehörigen Antiteilchens als Zustand eines Diracspinors zusammen:

$$\psi_A = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \\ \tilde{e}_L \\ \tilde{e}_R \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} \text{Linkshändiges Elektron} \\ \text{Rechtshändiges Elektron} \\ \text{Linkshändiges Positron} \\ \text{Rechtshändiges Positron} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Man kann dann mit ein und derselben Gleichung sowohl das Teilchen als auch das Antiteilchen beschreiben. Die zutreffende Gleichung nennt man Diracgleichung; sie besitzt die folgende Form:<sup>6</sup>

$$i \gamma^\mu {}_A^B \partial_\mu \psi_B - \frac{m_0 c}{\hbar} \psi_A = 0 \quad (1.2)$$

- $i = \sqrt{-1}$  : Imaginäre Einheit
- $c$  : Lichtgeschwindigkeit
- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  : Plank'sches Wirkungsquantum
- $m_0$  : Ruhemasse des Fermions
- $\mu$  : Raumzeitindex 0...3
- $A, B$  : Diracindex 1..4
- $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  : Partielle Ableitung
- $\psi_A$  : Fermionischer Diracspinor
- $\gamma^\mu {}_A^B$  : Dirac Matrizen

Vergleicht man den Zwei-Spielerzustand der Quanten Spieltheorie mit dem Diracspinor, so repräsentieren die beiden Spieler das Teilchen und das Antiteilchen und die Händigkeit (links, rechtshändig) die Strategienwahl der Spieler.

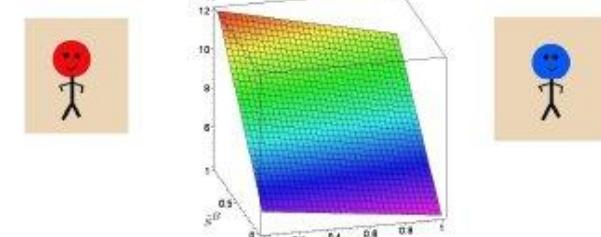
## Beyond Homo Economicus

Quantum Game Theory  
Entanglement      Quantum Strategies  
Homo Sociologicus      Homo Transcendentalis

 $|\Psi\rangle$ 

Extended models of classical evolutionary game theory (e.g. [10, 9])

Homo Economicus  
Classical Game Theory



Homo Afectualis

The final 2-player quantum state:

$$|\Psi\rangle = \hat{\mathcal{J}}^\dagger (\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B) \hat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle$$

$\hat{\mathcal{J}}(\gamma)$ : Entangling operator

$\hat{\mathcal{J}}^\dagger(\gamma)$ : Disentangling operator

$\gamma \in [0, \pi]$ : Strength of entanglement

$\hat{U}_A$ : Decision Operator for player A

$\hat{U}_B$ : Decision Operator for player B

### Teil III.2.1 Einführung in die Quanten Spieltheorie

Die Annahme des vollständig verbundenen, zufälligen Netzwerks, welches die Grundlage der deterministischen evolutionären Spieltheorie bildet, ist in realen sozialen Netzwerken oft nicht erfüllt. In realen sozialen Netzwerken bilden sich oft weitgehend abgeschlossene Cluster von miteinander verbundenen Spielern, die zu anderen Clustern nur bedingt bzw. selten Kontakt haben. Diese Art von Cluster- bzw. Cliquenbildung kann zu einer unterschiedlichen Ausprägung von sozialen Normen innerhalb der einzelnen Teilgruppen führen. Soziale Normen können sich somit herausbilden, die den einzelnen Spielern neben ihrem *homo ökonomischen* Interesse auch den Blick auf das Wohl der eigenen Gruppe nahelegen. Eine solche Art von induziertem Gruppeninteresse wird im folgenden mittels des Ansatzes der Quanten-Spieltheorie mathematisch in die deterministischen Gleichungen der evolutionären Spieltheorie eingearbeitet. Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden. Ist die Strategienverschränkung der Spieler im imaginären Raum der denkbaren Entscheidungswege nur genügend groß, so können zusätzliche Nash-Gleichgewichte auftreten und zuvor existente dominante Strategien sich auflösen.

Die erste formale Beschreibung der Quanten-Spieltheorie wurde im Jahre 1999 von Eisert et al. vorgestellt. Diese oft zitierte Arbeit betrachtet die quantentheoretische Erweiterung eines Gefangenendilemma Spiels und zeigt auf, dass die Spieler dem Dilemma entkommen können, falls der strategische Verschränkungswert oberhalb einer dem Spiel eigenen Grenze liegt. Im selben Jahr (1999) analysierte D. A. Meyer das *Penny Flip* Spiel und erweiterte dieses mittels quantentheoretischer Konzepte. In seinem Artikel betrachtete er den unrealistischen Fall, dass einer der Spieler das im Spiel benutzte Geldstück in einem überlagerten Quantenzustand positionieren könne und zeigte, dass dieser Spieler stets das Spiel gewinnen wird, falls sein Gegenspieler eine rein klassische Strategie benutzt. Im Jahre 2000 kommentierte S.J. van Enk die Arbeit von D. A. Meyer und zeigte, dass Meyer's Behauptung nicht sonderlich beeindruckend ist, da er nur einem der Spieler einen größeren Strategienraum erlaubt. Im Jahre 2000 wendeten Marinatto &

Weber die quantentheoretischen Konzepte auf das *Kampf der Geschlechter (battle of sexes)* Spiel an und zeigten, dass durch die Verschränkung der Spielerstrategien ein eindeutiges Gleichgewicht möglich ist. In den folgenden Jahren wurden die quantenspieltheoretischen Konzepte auf weitere Spiele ausgedehnt; so analysierte R.V. Mendes die Quantenversion des *Ultimatum Spiels*, Hogg et al. betrachteten das *Öffentliche Gut* Spiel, eine Version des *Quanten Koordinationsspiels* und analysierten *Quanten Auktionen*. Benjamin & Hayden erweiterten im Jahre 2001 den Formalismus der Quanten-Spieltheorie auf mehr als zwei Spieler. Im Jahre 2002 benutzten Piotrowski & Sladkowsky die quantenspieltheoretischen Konzepte um Eigenschaften im Verhalten von Märkten zu erklären. Im Jahre 2006 analysierten Hanuske et al. das *Open Access*-Publikationsverhalten wissenschaftlicher Autoren mittels des quantentheoretischen Ansatzes. Bereits im Jahre 2001 wurde das erste Quantenspiel auf einem Quantencomputer realisiert, wobei sich die vorhergesagten Eigenschaften bestätigten. Die Resultate dieser Experimente wurden im Jahre 2007 von A. Zeilinger erneut bestätigt. Die ersten Ansätze einer Anwendung der Quanten-Spieltheorie auf sozio-ökonomische Experimente wurden nach 2007 veröffentlicht. Neben diesen Arbeiten, entwickelte sich im Bereich der Psychologie ein weiterer wissenschaftlicher Forschungszweig, welcher quantentheoretische Konzepte zur Erklärung von experimentellen Daten benutzt. Diese Arbeiten zeigen, dass viele, zunächst nicht erklärbare experimentelle Befunde im Bereich der Psychologie, sich mittels quantenlogischer Konzepte beschreiben lassen.



- The *Quantum Penny Flip Game*  
1999, D. A. Meyer, *Quantum strategies*, PRL 82 (1052)
- The *Quantum Prisoner's Dilemma*  
1999, J. Eisert, M. Wilkens and M. Lewenstein, *Quantum Games and Quantum Strategies*, PRL 83 (3077)
- The *Quantum Battle of Sexes*  
2001, L. Marinatto and T. Weber, *A Quantum Approach To Static Games Of Complete Information*, Physics Letters A 272
- The *Quantum Coordination Game*  
2003, B. A. Huberman and T. Hogg, *Quantum Solution of Coordination Problems*, Quantum Information Processing 2(6)
- The *Quantum Ultimatum Game*  
2005, R. Vilela Mendes, *The Quantum Ultimatum Game*, Quantum Information Processing 4(1)



- **Economics and Quantum Game Theory**  
2002, E. W. Piotrowski and J. Sladkowski, *Quantum Market Games*, *Physica A* (312) 208  
2002, Kay-Yut Chen, T. Hogg and R. Beaulsoleil *A Quantum Treatment of Public Goods Economics*, *Quantum Information Processing* 1(6)  
2004, E. W. Piotrowski and J. Sladkowski *Quantum Game Theory in Finance*, *Quantitative Finance* 4 (1-7)  
2007, T. Hogg, P. Harsha and Kay-Yut Chen *Quantum Auctions*, *Int. J. of Quantum Information* 5:751-780  
2007, M. Hanuske, S. Bernius and B. Dugall, *Quantum Game Theory and Open Access Publishing*, *Physica A*, Vol.382 (2007), p.650-664 (physics/0612234)



- **Quantum Computer and Quantum Game Theory**  
2002, J. Du, H. Li, X. Xu, M. Shi, J. Wu, X. Zhou and R. Han  
*Experimental realization of quantum games on a quantum computer*, PRL 88 (137902)  
2007, R. Prevedel, A. Stefanov, P. Walther and A. Zeilinger  
*Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer*, New Journal of Physics 9 (205)  
2008, P. Benicio, Melo de Sousa, R. V. Ramos *Multiplayer Quantum Games and its Application as Access Controller in Architecture of Quantum Computers*, arXiv:0802.3684v2
- **Extensions of Quantum Game Theory**  
2001, S. C. Benjamin and P. M. Hayden, *Multi-Player Quantum Games*, PRA 64 (030301) ...



- Experimental Economics and Quantum Game Theory  
2006, Kay-Yut Chen and Tad Hogg *How well do people play a quantum prisoner's dilemma?*, Quantum Information Processing 5(43)  
2007, Kay-Yut Chen and Tad Hogg *Experiments with Probabilistic Quantum Auctions*, arXiv:0707.4195v1  
2007, M. Hanuske, S. Bernius, W. König and B. Dugall *Experimental Validation of Quantum Game Theory*, Accepted Paper at the Conference *LOFT 2008*
- and reviews in Physics World and Nature ...



## Quantum Game Theory and Scientific Communication

M. Hanauske, S. Bernius und B. Dugall “Quantum Game Theory and Open Access Publishing” (in *Physica A* 382 (2007) 650-664)

Matthias Hanauske, Wolfgang König und Berndt Dugall “Evolutionary Quantum Game Theory and Scientific Communication” (Beitrag auf der Konferenz “Second Brasilian Workshop of the Game Theory Society” (2010))

Matthias Hanauske “Evolutionary Game Theory and Complex Networks of Scientific Information” (Chapter in the Springer Book “Models of science dynamics—Encounters between complexity theory and information science” (2011))

## Quantum Game Theory and Financial Crises

M. Hanauske, J. Kunz, S. Bernius und W. König “Doves and hawks in economics revisited: An evolutionary quantum game theory-based analysis of financial crises” (in *Physica A* 389 (2010) 5084 – 5102)

## Quantum Game Theory and Experimental Economics

M. Hanauske, S. Bernius, W. König und B. Dugall “Experimental Validation of Quantum Game Theory” (Beitrag auf der Konferenz “Logic and the Foundations of Game and Decision Theory” (2008))

## Quantum Game Theory and Networks of Software Firms

## Quantum Game Theory and Social Norms in Firms

# Quantum dynamics of human decision-making

Jerome R. Busemeyer\*, Zheng Wang, James T. Townsend

*Indiana University, USA*

Received 10 December 2004; received in revised form 11 January 2006

Available online 15 March 2006

---

## Abstract

A quantum dynamic model of decision-making is presented, and it is compared with a previously established Markov model. Both the quantum and the Markov models are formulated as random walk decision processes, but the probabilistic principles differ between the two approaches. Quantum dynamics describe the evolution of complex valued probability amplitudes over time, whereas Markov models describe the evolution of real valued probabilities over time. Quantum dynamics generate interference effects, which are not possible with Markov models. An interference effect occurs when the probability of the union of two possible paths is smaller than each individual path alone. The choice probabilities and distribution of choice response time for the quantum model are derived, and the predictions are contrasted with the Markov model.

© 2006 Elsevier Inc. All rights reserved.

**Keywords:** Quantum; Markov; Dynamics; Decision-making; Random-walk; Diffusion; Choice; Response-time

---

## A Brief Introduction to Quantum Formalism Emmanuel Haven and Andrei Khrennikov

## Quantization in Financial Economics: An Information-Theoretic Approach Raymond J. Hawkins and B. Roy Frieden

## Quantum Game Theoretical Frameworks in Economics Edward W. Piotrowski and Jan Ślądkowski

## The Intrinsic Quantum Nature of Classical Game Theory Y. Pelosse

## Decision-Making and Cognition Modeling from the Theory of Mental Instruments Irina Basieva and Andrei Khrennikov

## Adaptive Dynamics and an Optical Illusion Masanori Ohya and Yoshiharu Tanaka

## Strategic Choice in Hilbert Space Charles E. Smith Jr. and Christopher Zorn

## 1 Voters' Preferences in a Quantum Framework Polina Khrennikova and Emmanuel Haven

## 19 Quantum Structure in Cognition Origins, Developments, Successes, and Expectations Diederik Aerts and Sandro Sozzo

## 39 Quantum Cognition, Neural Oscillators, and Negative Probabilities J. Acacio de Barros and Gary Oas

## 59 Quantum-Like Type Indeterminacy: A Constructive Approach to Preferences à la Kahneman and Tversky A. Lambert-Mogiliansky

## 229 Quantum Models of Human Causal Reasoning Jennifer S. Trueblood and Percy K. Mistry

## 251 A Quantum Probability Model for the Constructive Influence of Affective Evaluation Lee C. White, Emmanuel M. Pothos, and Jerome R. Busemeyer

## 267 Is there Room in Quantum Ontology for a Genuine Causal Role for Consciousness? Paavo Pylkkänen

## 293 Big Challenges Section

## 319 Why Quantum? Andrei Khrennikov

## 321 Quantum Principles and Mathematical Models in Physics and Beyond Arkady Plotnitsky

## Applications and Grand Challenges

# The Palgrave Handbook of Quantum Models in Social Science

# Quantum cognition: a new theoretical approach to psychology

Peter D. Bruza<sup>1</sup>, Zheng Wang<sup>2</sup>, and Jerome R. Busemeyer<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Information Systems School, GPO Box 2434, Queensland University of Technology, Brisbane 4001, Australia

<sup>2</sup> School of Communication, 3145 Derby Hall, 154 North Oval Mall, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA

<sup>3</sup> Department of Psychological and Brain Sciences, 1101 East 10th Street, Indiana University, Bloomington, IN 48705, USA

What type of probability theory best describes the way humans make judgments under uncertainty and decisions under conflict? Although rational models of cognition have become prominent and have achieved much success, they adhere to the laws of classical probability theory despite the fact that human reasoning does not always conform to these laws. For this reason we have seen the recent emergence of models based on an alternative probabilistic framework drawn from quantum theory. These quantum models show promise in addressing cognitive phenomena that have proven recalcitrant to modeling by means of classical probability theory. This review compares and contrasts probabilistic models based on Bayesian or classical versus quantum principles, and highlights the advantages and disadvantages of each approach.

maker is rational and arrived from. However, the Bayesences that

To what subscribe? Theers because exposed to classical on which viable pr models o alternati 10]. Wha



**ELSEVIER**

Journal of Mathematical Psychology 53 (2009) 303–305

Contents lists available at ScienceDirect

**Journal of Mathematical Psychology**

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jmp](http://www.elsevier.com/locate/jmp)



Editorial

Introduction to the special issue on quantum cognition

Peter Bruza<sup>a</sup>, Jerome R. Busemeyer<sup>b,\*</sup>, Liane Gabora<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Faculty of Information Technology, GPO Box 2434, Brisbane, Australia  
<sup>b</sup> Department of Psychology, Faculty of Information Technology, GPO Box 2434, Brisbane, Australia  
<sup>c</sup> Department of Psychology, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA

Quantum Models of Cognition and Decision

Jerome R. Busemeyer

Peter D. Bruza



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

# Journal of Mathematical Psychology

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jmp](http://www.elsevier.com/locate/jmp)



## Quantum structure in cognition

Diederik Aerts\*

Center Leo Apostel for Interdisciplinary Studies, Vrije Universiteit Brussel, 1160 Brussels, Belgium

Department of Mathematics, Vrije Universiteit Brussel, 1160 Brussels, Belgium

Department of Psychology, Vrije Universiteit Brussel, 1160 Brussels, Belgium

---

### ARTICLE INFO

*Article history:*

Received 27 May 2008

Received in revised form

17 April 2009

Available online 31 May 2009

---

*Keywords:*

Concept theories

Concept conjunction

Guppy effect

Overextension

Quantum mechanics

Interference

Superposition

Hilbert space

Fock space

---

### ABSTRACT

The broader scope of our investigations is the search for the way in which concepts and their combinations carry and influence meaning and what this implies for human thought. More specifically, we examine the use of the mathematical formalism of quantum mechanics as a modeling instrument and propose a general mathematical modeling scheme for the combinations of concepts. We point out that quantum mechanical principles, such as superposition and interference, are at the origin of specific effects in cognition related to concept combinations, such as the guppy effect and the overextension and underextension of membership weights of items. We work out a concrete quantum mechanical model for a large set of experimental data of membership weights with overextension and underextension of items with respect to the conjunction and disjunction of pairs of concepts, and show that no classical model is possible for these data. We put forward an explanation by linking the presence of quantum aspects that model concept combinations to the basic process of concept formation. We investigate the implications of our quantum modeling scheme for the structure of human thought, and show the presence of a two-layer structure consisting of a classical logical layer and a quantum conceptual layer. We consider connections between our findings and phenomena such as the disjunction effect and the conjunction fallacy in decision theory, violations of the sure thing principle, and the Allais and Elsberg paradoxes in economics.

© 2009 Elsevier Inc. All rights reserved.





OPEN

## Quantum affective processes for multidimensional decision-making

Johnny K. W. Ho<sup>2</sup>✉ & Johan F. Hoorn<sup>1,2,3,4</sup>

In modeling the human affective system and applying lessons learned to human–robot interaction, the challenge is to handle ambiguous emotional states of an agency (whether human or artificial), probabilistic decisions, and freedom of choice in affective and behavioral patterns. Moreover, many cognitive processes seem to run in parallel whereas seriality is the standard in conventional computation. Representation of contextual aspects of behavior and processes and of self-directed neuroplasticity are still wanted and so we attempt a quantum-computational construction of robot affect, which theoretically should be able to account for indefinite and ambiguous states as well as parallelism. Our Quantum Coppélia (Q-Coppélia) is a translation into quantum logics of the fuzzy-based Silicon Coppélia system, which simulates the progression of a robot's attitude towards its user. We show the entire circuitry of the Q-Coppélia framework, aiming at contemporary descriptions of (neuro)psychological processes. Arguably, our work provides a system for simulating and handling affective interactions among various agencies from an understanding of the relations between quantum algorithms and the fundamental nature of psychology.

# Quantum Advantage in Trading: A Game-Theoretic Approach

Faisal Shah Khan<sup>1,2</sup> , Norbert M. Linke<sup>3,4</sup>, Anton Trong Than<sup>4</sup>, and Dror Baron<sup>5</sup>

Quantum Economics and Finance  
2025, Vol. 2(1) 40–51  
© The Author(s) 2025  
  
 Article reuse guidelines:  
[sagepub.com/journals-permissions](http://sagepub.com/journals-permissions)  
 DOI: 10.1177/29767032251333418  
[journals.sagepub.com/home/qef](http://journals.sagepub.com/home/qef)  


## Abstract

Quantum games, like quantum algorithms, exploit quantum entanglement to establish strong correlations between strategic player actions. This paper introduces quantum game-theoretic models applied to trading and demonstrates their implementation on an ion-trap quantum computer. The results showcase a quantum advantage, previously known only theoretically, realized as higher-paying market Nash equilibria. This advantage could help uncover alpha in trading strategies, defined as excess returns compared to established benchmarks. These findings suggest that quantum computing could significantly influence the development of financial strategies.

## Quantum games: a review of the history, current state, and interpretation

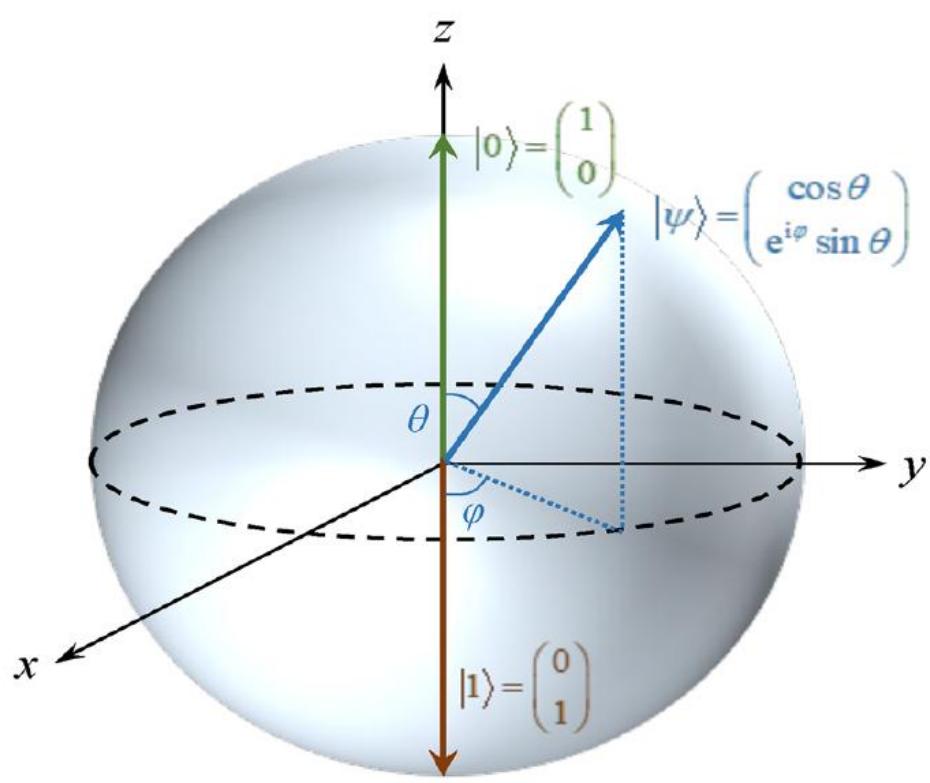
Faisal Shah Khan\*, Neal Solmeyer & Radhakrishnan Balu†, Travis S. Humble‡

October 1, 2018

## Abstract

We review both theoretical and experimental developments in the area of quantum games since the inception of the subject circa 1999. We will also offer a narrative on the controversy that surrounded the subject in its early days, and how this controversy has affected the development of the subject.

In the context of Hawk-Dove games, we emphasize the earlier work of Hanauske et al. (Hanauske et al., 2010), which illustrates that the quantum-entangled version of the hawk-dove game produces “non-aggressive” evolutionary stable strategies that are unattainable within the classical game-theoretic framework. The real-world context of their model is investment banking and the issuance of highly risky investment products with high expected return (aggressive, Hawk strategy) versus investment products of rather low risk and moderate expected return (non-aggressive, Dove strategy). Their findings also suggest that the economic population collectively adopts a non-aggressive quantum strategy, and they suggest potential applications of this toward mitigation of market crashes. The authors interpret quantum entanglement in a non-physical sense, framing it as a shared psychological contract that aligns the strategies of economic agents. Rather than resulting from explicit contract negotiations, they argue that this alignment emerges from broader socioeconomic factors that simultaneously shape individual behavior. These factors include moral standards, values, legal rules, shared experiences, and similar educational backgrounds, which collectively influence decision-making and drive individuals toward coordinated actions, even in the absence of direct communication.



## Quantum Economics: A Systematic Literature Review

Thomas Holtfort,  [ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7480-9484>](https://orcid.org/0000-0001-7480-9484)

FOM University of Applied Science, Germany

Andreas Horsch,  [ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4157-2454>](https://orcid.org/0000-0003-4157-2454)

TU Bergakademie Freiberg, Freiberg, Germany

Corresponding author: Thomas Holtfort, E-mail: [thomas.holtfort@fom.de](mailto:thomas.holtfort@fom.de)

Type of manuscript: theoretical paper

**Abstract:** In the 21st century, various socio-economic crises have revealed that traditional economic science and (neo)classical thinking are unable to explain all the complexity of current economic problems, therefore the application of more complex and non-trivial economic concepts is gaining relevance. In addition to behavioral and evolutionary economic thinking, models of quantum economics have been developed in recent years, which allow solving economic problems, using mainly quantum thinking and the principles of quantum physics, in particular particle-wave dualism, the principle of uncertainty, the absence of a subject-object distinction, superposition and confusion. The article addresses 3 research questions (RQ). According to RQ1, the paper finds that quantum economics research is dominated by the following topics: quantum economics, quantum finance, quantum decision making, and quantum game theory. According to these four thematic descriptors, the article carries out a systematic modern review of scientific works in the period from 1978 to 2022 (if only 50 works were

### Relevance of entanglement in the economy

Entanglement is evident in most contractual relationships that underlie transactions, e.g. in the relationship between creditors and debtors (Orrell, 2018b). The loan contract connects two parties, meaning that a change on the side of one party instantly affects the other. Therefore, debt/credit (and other contractual) relationships create an intricate web of entanglements, which can be mapped using techniques taken from complexity science (Orrell, 2018b). Due et al. (2005) argue that the concept of quantum entanglement can help improve the economic efficiency of oligopolistic markets (for a duopolistic market, see Shi et al., 2021) by reducing the imperfections of oligopolistic competition. If companies rather think in terms of relationships and strategies than in transactions, pure production and sales quantities and prices and resulting profits, the strategies create in a game theoretical sense an entanglement (i.e. dependency) which makes companies more thoughtful (Due et al., 2005).

# The Game Theory in Quantum Computers: A Review

Raquel Pérez-Antón, José Ignacio López Sánchez, Alberto Corbi \*

Universidad Internacional de La Rioja, Avd. de la Paz, 137 26006 Logroño, La Rioja (Spain)

\* Corresponding author: [raquel.perez527@comunidadunir.net](mailto:raquel.perez527@comunidadunir.net) (R. Pérez-Antón), [joseignacio.lopez@unir.net](mailto:joseignacio.lopez@unir.net) (J. I. López Sánchez), [alberto.corbi@unir.net](mailto:alberto.corbi@unir.net) (A. Corbi Bellot).

Received 6 July 2021 | Accepted 26 July 2023 | Early Access 19 September 2023



## ABSTRACT

Game theory has been studied extensively in recent centuries as a set of formal mathematical strategies for optimal decision making. This discipline improved its efficiency with the arrival, in the 20th century, of digital computer science. However, the computational limitations related to exponential time type problems in digital processors, triggered the search for more efficient alternatives. One of these choices is quantum computing. Certainly, quantum processors seem to be able to solve some of these complex problems, at least in theory. For this reason, in recent times, many research works have emerged related to the field of quantum game theory. In this paper we review the main studies about the subject, including operational requirements and implementation details. In addition, we describe various quantum games, their design strategy, and the used supporting tools. We also present the still open debate linked to the interpretation of the transformations of classical algorithms in fundamental game theory to their quantum version, with special attention to the Nash equilibrium.

## KEYWORDS

Nash Equilibrium, Polynomial Time, Quantum Problems, Quantum Computing, Quantum Game Strategies, Quantum Game Theory.

# Quantum Game Theory Meets Quantum Networks

Publisher: IEEE

Cite This



Indrakshi Dey ; Nicola Marchetti ; Marcello Caleffi ; Angela Sara Cacciapuoti [All Authors](#)

11  
Cites in  
Papers

741  
Full  
Text Views



## Abstract

### Document Sections

» Introduction

» Motivation

» Contribution

» Background on Quantum  
and Classical Games

» Game-Based Optimization  
Framework for  
Entanglement Distribution

Show Full Outline ▾

### Authors

### Figures

### References

### Citations

## Abstract:

Classical game theory is a powerful tool focusing on optimized resource distribution, allocation, and sharing in classical wired and wireless networks. As quantum networks are emerging as a means of providing true connectivity between quantum computers, it is imperative and crucial to exploit game theory for addressing challenges such as entanglement distribution and access, routing, topology extraction, and inference. Quantum networks provide the promising opportunity of employing quantum games owing to their inherent capability of generating and sharing quantum states. In addition, quantum games offer enhanced payoffs and winning probabilities, new strategies, and equilibria, which are unimaginable in classical games. Employing quantum game theory to solve fundamental challenges in quantum networks opens a new fundamental research direction necessitating inter-disciplinary efforts. In this article, we introduce a novel game-theoretical framework for exploiting quantum strategies to solve – as an archetypal example – one of the key functionalities of a quantum network, namely, entanglement distribution. We compare quantum strategies with classical ones by showing the quantum advantages in terms of link fidelity improvement and latency decrease in communication. In the future, we will generalize our game framework to optimize entanglement distribution and access over any quantum network topology. We will also explore how quantum games can be leveraged to address other challenges like routing, optimization of quantum operations, and topology design.

Published in: [IEEE Wireless Communications](#) ( Volume: 31 , Issue: 4, August 2024)

Page(s): 90 - 96

DOI: [10.1109/MWC.001.2300288](https://doi.org/10.1109/MWC.001.2300288)

Date of Publication: 06 August 2024

Publisher: IEEE

# Using Quantum Game Theory to Model Competition

Vithala Rao\*

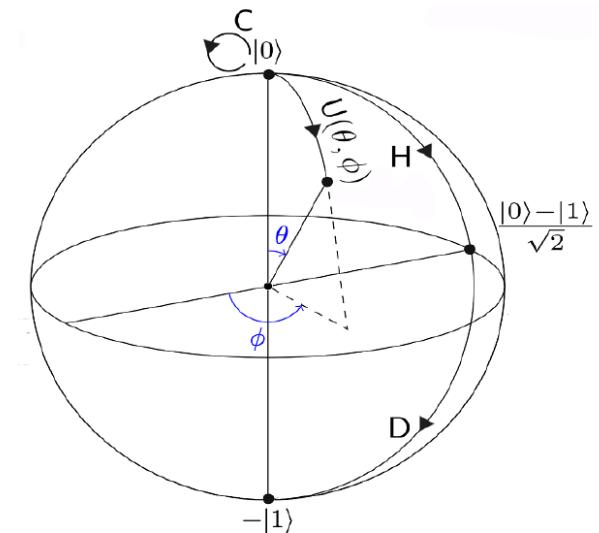
Nathan Yang†

Saleh Zakerinia‡

November 19, 2025

## Abstract

We examine how quantum game theory could reshape strategic decision-making in economics. Embedding quantum principles into classical frameworks expands feasible equilibria, often softening competition and enabling outcomes unattainable under classical strategies. We illustrate these mechanisms in a high-low pricing game, where the performance gap between quantum-enabled and classical players depends on the degree of entanglement, creating incentives for broader adoption when payoff asymmetries favor the quantum side. Extending to canonical settings—such as the Prisoner’s Dilemma, Bertrand and Cournot competition, Stackelberg leadership, Hotelling spatial competition, repeated games, auctions, and spatial preemption—quantum strategies yield efficiency gains through expanded strategy spaces and probabilistic interdependence.



## B Codes for Numerical Examples

This section provides Python code for solving the quantum equilibrium discussed in the paper. Each subsection corresponds to a specific example detailing the exact implementation procedure for replication purposes.

### B.1 Pricing Competition: Classical versus Quantum

```
import numpy as np
from numpy import kron
from scipy.optimize import minimize

# Payoffs in the order (H,H), (H,L), (L,H), (L,L)
payA = np.array([4.0, 1.0, 5.0, 2.0])
payB = np.array([4.0, 5.0, 1.0, 2.0])

# Entangler J_x(\gamma) for the EWL scheme
def J_x(gamma: float) -> np.ndarray:
    c, s = np.cos(gamma / 2.0), np.sin(gamma / 2.0)
    return np.array([
        [c, 0.0, 0.0, 1j*s],
        [0.0, c, 1j*s, 0.0],
        [0.0, 1j*s, c, 0.0],
        [1j*s, 0.0, 0.0, c]
    ], dtype=complex)

# Local unitary U(\theta, \psi, \lambda)
def U(theta: float, phi: float, lam: float = 0.0) -> np.ndarray:
```

## New Journal of Physics

The open access journal at the forefront of physics

PAPER • OPEN ACCESS

Analyses between phase transitions in potential games and quantum phase transitions

To cite this article: Archan Mukhopadhyay *et al* 2025 *New J. Phys.* **27** 123901

## Teil III.2.2 Mathematischer Formalismus der die Quanten Spieltheorie

Die bei der quantentheoretischen Formulierung benutzten mathematischen Ansätze können grob in zwei Hauptströme gegliedert werden. Der Dichtematrix Ansatz der Quantenspieltheorie (siehe Marinatto & Weber) und den quanten-informationstheoretischen Ansatz von Eisert et al. Der auf quanteninformationstheoretischen Konzepten aufbauende Ansatz hat einerseits den Vorteil, dass die neu entstehenden Quantenstrategien in einem reduzierten Quanten-Strategienraum visualisiert und interpretiert werden können, andererseits baut der Ansatz die Möglichkeit einer Quantenverschränkung in mathematisch eleganter Weise in die Theorie ein, so dass man die Stärke einer möglichen Strategienverschränkung der Spieler mittels eines zusätzlichen Parameters ( $\gamma$ ) im Modell variieren kann. In den ersten Jahren nach seiner Veröffentlichung wurde der Eisert'sche Ansatz von Benjamin & Hayden und S.J. van Enk angegriffen und kritisch diskutiert. Die damals erhobenen Vorwürfe stellten sich jedoch im Laufe der Zeit als nicht auf die Eisert'sche Theorie anwendbar heraus. Im Folgenden wird das Konzept der Quanten-Spieltheorie (in der Eisert'schen, quanten-informationstheoretischen Nomenklatur) im Detail beschrieben.

In der Quanten-Spieltheorie kann der Entscheidungszustand der beteiligten Akteure, im Gegensatz zur klassischen Spieltheorie, eine gemeinsame Strategienverschränkung aufweisen. Durch das Konzept dieser möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen, mit in die klassische Theorie einbezogen werden. Eine der grundlegenden Folgerungen aus einer solchen gemeinsamen Strategienverschränkung ist, dass die beteiligten Akteure eine erhöhte Kooperationsbereitschaft aufweisen, da sie dann eine Optimierung des gemeinsamen Zwei-Spielerzustandes  $|\Psi\rangle$  anstreben.

Um die mathematische Beschreibung eines evolutionären, quantenspieltheoretischen Modells zu verdeutlichen, wird im Folgenden zunächst ein (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspiel betrachtet. Der spieltheoretische, binäre Entscheidungsprozess der Akteure soll durch eine allgemeine Auszahlungsmatrix bestimmt sein (siehe nebenstehende Auszahlungstabelle). Die Quanten-Spieltheorie beschreibt den Entscheidungszustand eines Spielers  $\mu = A, B$ , bevor dieser die endgültige Wahl der reinen Strategie getroffen hat, als eine komplexwertige Größe (Spinor) in einem zweidimensionalen Zustandsraum, dem sogenannten Hilbertraum  $\mathcal{H}_\mu$ . Die in dieser Arbeit verwendete mathematische Repräsentation dieses Spinors wird mit Hilfe des Entscheidungsoperators  $\widehat{\mathcal{U}}_\mu(\theta_\mu, \varphi_\mu)$  konstruiert, der auf einen Anfangszustand (hier speziell  $|s_1^\mu\rangle$ ) wirkt. Ein allgemeiner Entscheidungszustand des Spielers A wird somit wie folgt mathematisch konstruiert:

# The Quantum State of Player A and the Decision Operator

$$|\psi_A\rangle = \psi_1^A |s_1^A\rangle + \psi_2^A |s_2^A\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1^A \\ -\psi_2^A \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_A$$

$$|s_1^A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s_2^A\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \psi_1^A = e^{i\varphi_A} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right), \quad \psi_2^A = \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)$$

$$|\psi_A\rangle = \widehat{\mathcal{U}}(\theta_A, \varphi_A) |s_1^A\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_A} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Die reinen Zustände  $|s_1^A\rangle$  und  $|s_2^A\rangle$  bilden die Basis des Hilbertraums  $\mathcal{H}_A$  des Spielers A und repräsentieren die reinen Strategien  $s_1^A$  und  $s_2^A$  des Spiels. Der Entscheidungsoperator des Spielers  $\mu$  hängt von den beiden Entscheidungswinkeln  $\theta_\mu$  und  $\varphi_\mu$  ab und ist explizit wie folgt definiert:

$$\widehat{\mathcal{U}}_\mu(\theta_\mu, \varphi_\mu) := \begin{pmatrix} e^{i\varphi_\mu} \cos\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) & e^{-i\varphi_\mu} \cos\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \forall \quad \theta_\mu \in [0, \pi] \wedge \varphi_\mu \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad .$$

# The Entanglement Operator and the 2-Player Quantum State

Der finale Zwei-Spielerzustand eines simultanen Zwei-Strategien-'One Shot'- Quantenspiels wird somit durch den vierkomponentigen Quantenzustand  $|\Psi\rangle$  beschrieben, welcher sich in der Eisert'schen Repräsentation wie folgt aus dem Anfangszustand  $|\Psi_0\rangle = \hat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle$  entwickelt

$$|\Psi\rangle = \hat{\mathcal{J}}^\dagger (\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B) \hat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle, \quad |\Psi_0\rangle = \hat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ -i \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix},$$

wobei  $\hat{\mathcal{J}} := (J_{\alpha\beta})$ ,  $\alpha, \beta = 1 \dots 4$  die von dem Parameter  $\gamma$  abhängige Verschränkungsmatrix (bzw. den Verschränkungsoperator) beschreibt

$$\hat{\mathcal{J}} := e^{-i \frac{\gamma}{2} (\hat{s}_2 \otimes \hat{s}_2)} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & 0 & 0 & -i \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ 0 & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & i \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & 0 \\ 0 & i \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & 0 \\ -i \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & 0 & 0 & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix} \mathbb{I}, \quad \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

$\hat{U}_A := (U_{\alpha\beta}^A)$ ,  $\alpha, \beta = 1 \dots 2$  und  $\hat{U}_B := (U_{\alpha\beta}^B)$ ,  $\alpha, \beta = 1 \dots 2$  stellen die von den Winkeln  $\theta_A, \varphi_A$  und  $\theta_B, \varphi_B$  abhängigen Entscheidungsmatrizen (Entscheidungsoperatoren) der Spieler A und B dar.

# The Quantum Version of the Payoff Function

Der Erwartungswert der Auszahlungen der Spieler wird zusätzlich durch die Spielmatrix (siehe nebenstehende Auszahlungstabelle) mitbestimmt:

$$\$_A = \$_{11}^A P_{11} + \$_{12}^A P_{12} + \$_{21}^A P_{21} + \$_{22}^A P_{22}$$

$$\$_B = \$_{11}^B P_{11} + \$_{21}^B P_{12} + \$_{12}^B P_{21} + \$_{22}^B P_{22}$$

$$\text{mit: } P_{kl} = |\langle s_k^A s_l^B | \Psi \rangle|^2, \quad k, l = \{1, 2\}$$

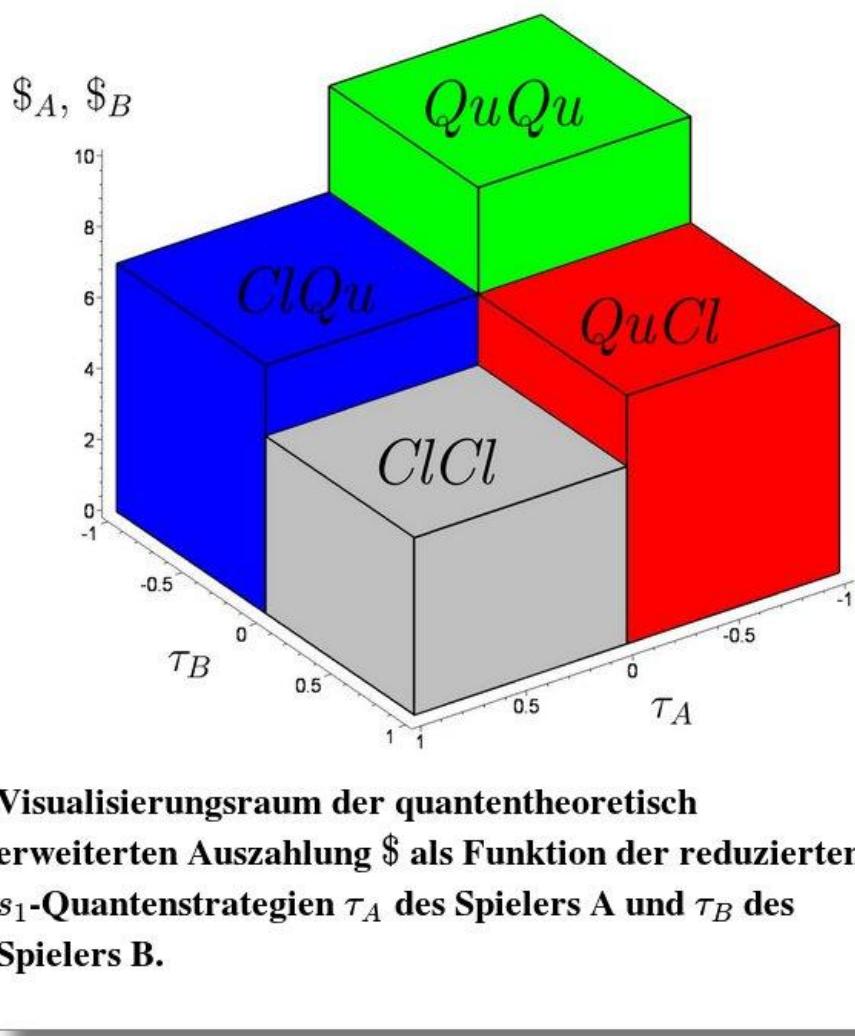
Dieser Erwartungswert der Auszahlungen stellt eine Erweiterung des aus der klassischen Spieltheorie bekannten Konzepts der Auszahlungsfunktion in gemischten Strategien dar.

Um die Auswirkungen des quantenspieltheoretischen Konzepts auf die dem Spieler ratsame Wahl der Entscheidung zu untersuchen, wird im Folgenden die Struktur der quantenspieltheoretisch erweiterten gemischten Auszahlungsfunktion untersucht. Im Unterschied zur klassischen Auszahlungsfunktion ( $\$^\mu(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)$ ), die lediglich von den gemischten Strategien des Spielers A ( $\tilde{s}^A$ ) und des Spielers B ( $\tilde{s}^B$ ) abhängt, hängt die quantentheoretische Erweiterung der Auszahlungsfunktion im Allgemeinen von fünf Parametern ab: Die vier Winkel der Entscheidungsoperatoren ( $\theta_A, \varphi_A, \theta_B$  und  $\varphi_B$ ) und der Parameter  $\gamma$ , welcher die Stärke der Strategienverschränkung quantifiziert.

A \ B	$s_1^B$	$s_2^B$
$s_1^A$	$(\$_{11}^A, \$_{11}^B)$	$(\$_{12}^A, \$_{21}^B)$
$s_2^A$	$(\$_{21}^A, \$_{12}^B)$	$(\$_{22}^A, \$_{22}^B)$

**Allgemeine Auszahlungsmatrix eines (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels.**

# Visualization and the Reduced Set of Quantum Strategies



Um die Auszahlungsfunktion dennoch als Fläche in einem dreidimensionalen Raum zu visualisieren, reduziert man deren Abhängigkeiten, indem man einerseits den Verschränkungsparameter  $\gamma$  fixiert und die Menge der Quantenstrategien auf diejenigen beschränkt, die vom Ursprung der reinen, klassischen  $s_1$ -Strategie starten. Die Abhängigkeiten des vierkomponentigen Zwei-Spieler Quantenzustand  $|\Psi\rangle$  werden durch die Einführung zweier neuer Parameter ( $\tau_A$  und  $\tau_B$ ) reduziert:

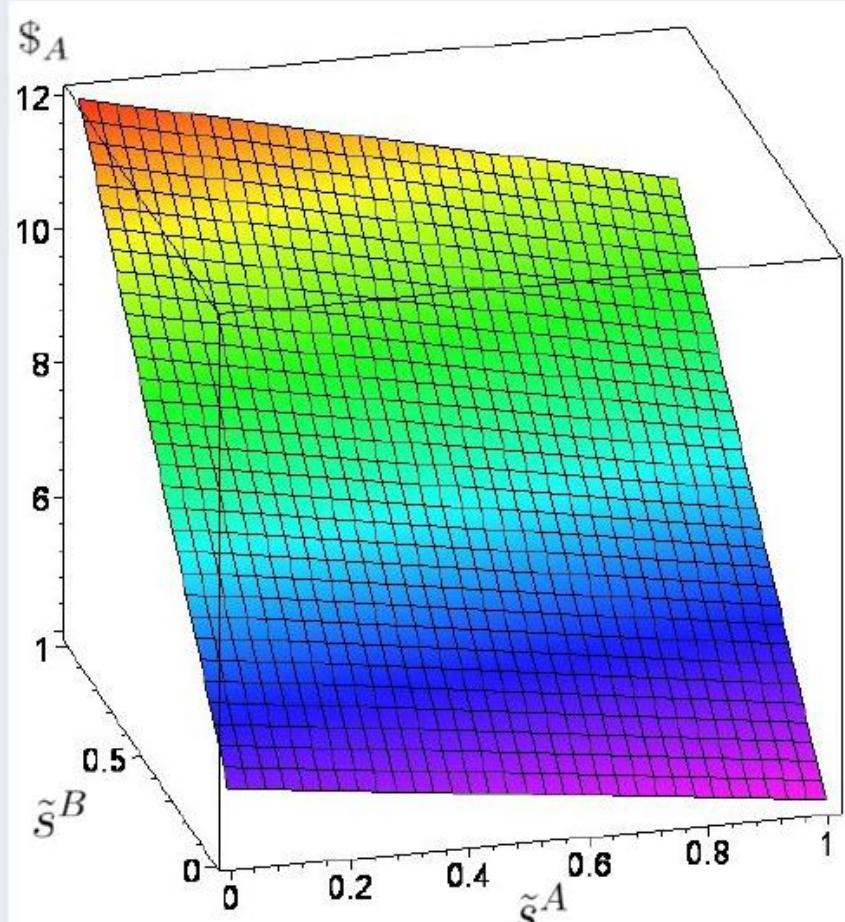
$|\Psi\rangle = |\Psi(\theta_A, \varphi_A, \theta_B, \varphi_B)\rangle \rightarrow |\Psi(\tau_A, \tau_B)\rangle$ . Die für jeden Spieler wählbaren Entscheidungswinkel  $\theta$  und  $\varphi$  werden dadurch auf einen einzigen Parameter  $\tau \in [-1, 1]$  reduziert. Positive  $\tau$ -Werte entsprechen den klassischen gemischten Strategien, wohingegen negative  $\tau$ -Werte Quantenstrategien mit  $\theta = 0$  und  $\varphi > 0$  repräsentieren. Der gesamte quantentheoretische Strategienraum wird dadurch in vier separate Regionen unterteilt: in den absolut klassischen Bereich (ClCl:  $\tau_A, \tau_B \geq 0$ ), den absoluten Quantenbereich (QuCl:  $\tau_A, \tau_B < 0$ ) und in die beiden semi-klassischen Quantenbereiche (ClQu:  $\tau_A \geq 0 \wedge \tau_B < 0$  und QlCl:  $\tau_A < 0 \wedge \tau_B \geq 0$ ). Durch diese  $(\tau_A, \tau_B)$ -Repräsentation wird die Menge der möglichen Quantenstrategien auf die folgende Untermenge reduziert:

$$\underbrace{\{(\tau\pi, 0) \mid \tau \in [0, 1]\}}_{\text{klassischer Bereich Cl}} \wedge \underbrace{\{(0, \tau \frac{\pi}{2}) \mid \tau \in [-1, 0]\}}_{\text{Quantenbereich Ql}}$$

Die nebenstehende Abbildung stellt die vier Regionen des Visualisierungsraums der quantentheoretischen Auszahlungsfunktion dar. Die absolut klassische Region (ClCl,  $\varphi_A, \varphi_B \equiv 0$ ) befindet sich im vorderen Bereich, die Region in welchem beide Spieler eine Quantenstrategie

# Quantum extension of dominant class games

Classical payoff for player A



A \ B	$s_1^B$	$s_2^B$
$s_1^A$	(10,10)	(4,12)
$s_2^A$	(12,4)	(5,5)

Table: Payoffmatrix of a dominant, prisoners dilemma like game.

This dominant, prisoners dilemma like game has only one pure, symmetric Nash equilibrium  $(s_2^A, s_2^B)$  which is the only ESS of the evolutionary game.

### Teil III.2.3 Symmetrische (2x2)-Quantenspiele

Parameter- sätze	Spiel- klasse	$\$_{11}$	$\$_{12}$	$\$_{21}$	$\$_{22}$	Nash-Gleichgewichte
$Set_A$	Dominantes Spiel	10	4	12	5	Ein reines Nash-Gleichgewicht $(s_2^A, s_2^B)$
$Set_B$	Koordinationsspiel	10	4	9	5	Zwei reine NEs, ein internes NE $(s^* = \frac{1}{2})$
$Set_C$	Anti-Koordinationsspiel	10	7	12	5	Zwei reine NEs, ein internes NE $(s^* = \frac{1}{2})$

Parameterwerte der drei symmetrischen Beispiele.

Symmetrische (2 Personen)-(2 Strategien) Spiele lassen sich formal in drei unterschiedliche Spielklassen separieren (siehe Teil I).

#### Dominante Spiele ( $Set_A$ )

Das durch Parametersatz  $Set_A$  definierte Spiel gehört der Klasse der dominanten Spiele an. Das Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien befindet sich bei der Strategienkombination, bei welcher beide Spieler die Strategie  $s_2$  spielen  $(s_2^A, s_2^B)$ .

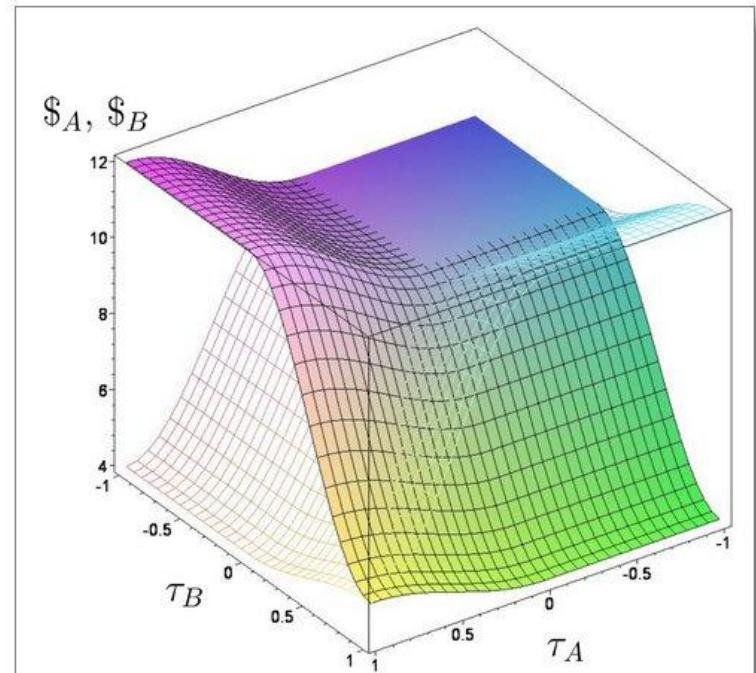
Die auf der rechten Seite dargestellte Abbildung stellt die quantentheoretisch erweiterte Auszahlung  $\$_A$  des Spielers A (untransparente Fläche) und  $\$_B$  des Spielers B (transparente Fläche) als Funktion der reduzierten  $s_1$ -Quantenstrategien  $\tau_A$  des Spielers A und  $\tau_B$  des Spielers B dar. Als zugrundeliegender Parametersatz wurde  $Set_A$  verwendet und die Stärke der Quantenverschränkung der Spielerstrategien wurde auf null gesetzt ( $\gamma = 0$ ).

Als Visualisierungsraum wurde der in der oberen Abbildung beschriebene reduzierte Raum verwendet, wobei der absolute Quantenbereich QuQu, bei dem beide Spieler eine Quantenstrategie benutzen, im hinteren Teil des Diagramms zu finden ist und die rein klassische Region ClCl nach vorne projiziert wurde. Die Abbildung zeigt deutlich, dass das unverschränkte Quantenspiel identisch mit der klassischen Version des Spiels ist. Im Bereich, in dem beide Spieler eine Quantenstrategie wählen ( $\tau_A < 0 \wedge \tau_B < 0$ ),

ist die Auszahlung der Spieler gleich der Auszahlung, als wenn die Spieler die klassische Strategie  $s_1$  gewählt hätten ( $\$_A(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10, \$_B(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10$ ). Das Nash-Gleichgewicht des klassischen Spiels  $((s_2^A, s_2^B))$ , die dominante Strategie entspricht den folgenden  $\tau$ -Werten:

$(s_2^A, s_2^B) \hat{=} (\tau_A = 1, \tau_B = 1)$  und bleibt auch im unverschränkten Quantenspiel bestehen.

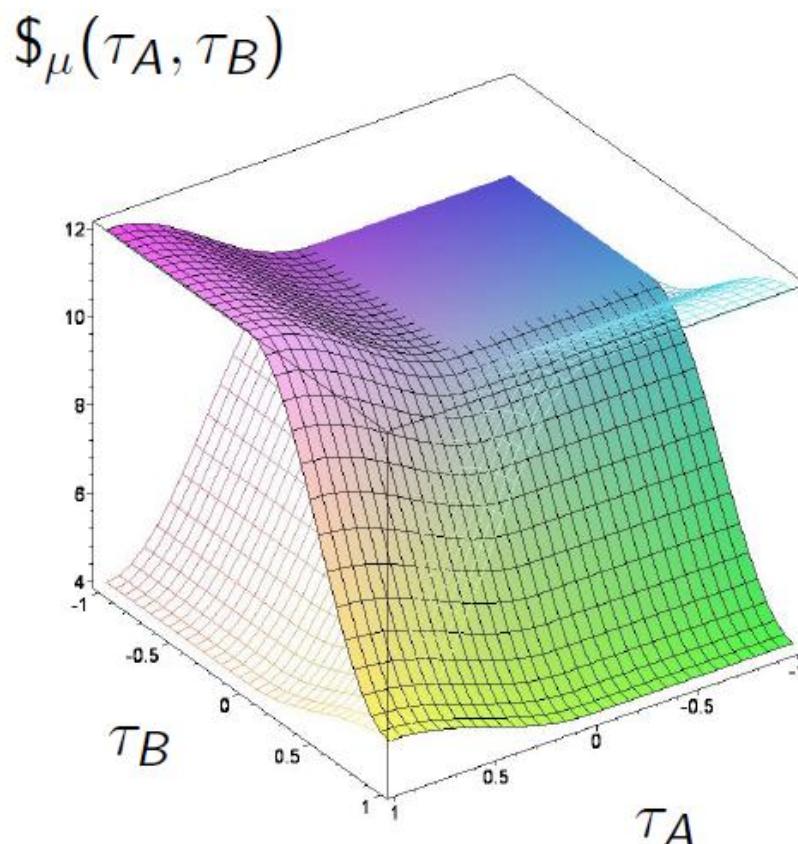
Die beiden Diagramme in der linken unteren Abbildung stellen die quantentheoretisch erweiterte Auszahlungsfunktion bei einem mittleren und dem maximalen Verschränkungswert dar. Die Struktur der Auszahlungsflächen innerhalb der vollständig klassischen Region ClCl verändert ihr Erscheinungsbild bei



Quantentheoretisch erweiterte Auszahlung  $\$_A$  des Spielers A (untransparente Fläche) und  $\$_B$  des Spielers B (transparente Fläche) als Funktion der reduzierten  $s_1$ -Quantenstrategien  $\tau_A$  des Spielers A und  $\tau_B$  des Spielers B in einem unverschränktem Quantenspiel ( $\gamma = 0$ ) unter Verwendung des Parametersatzes  $Set_A$ .

# Quantum extension of dominant class games

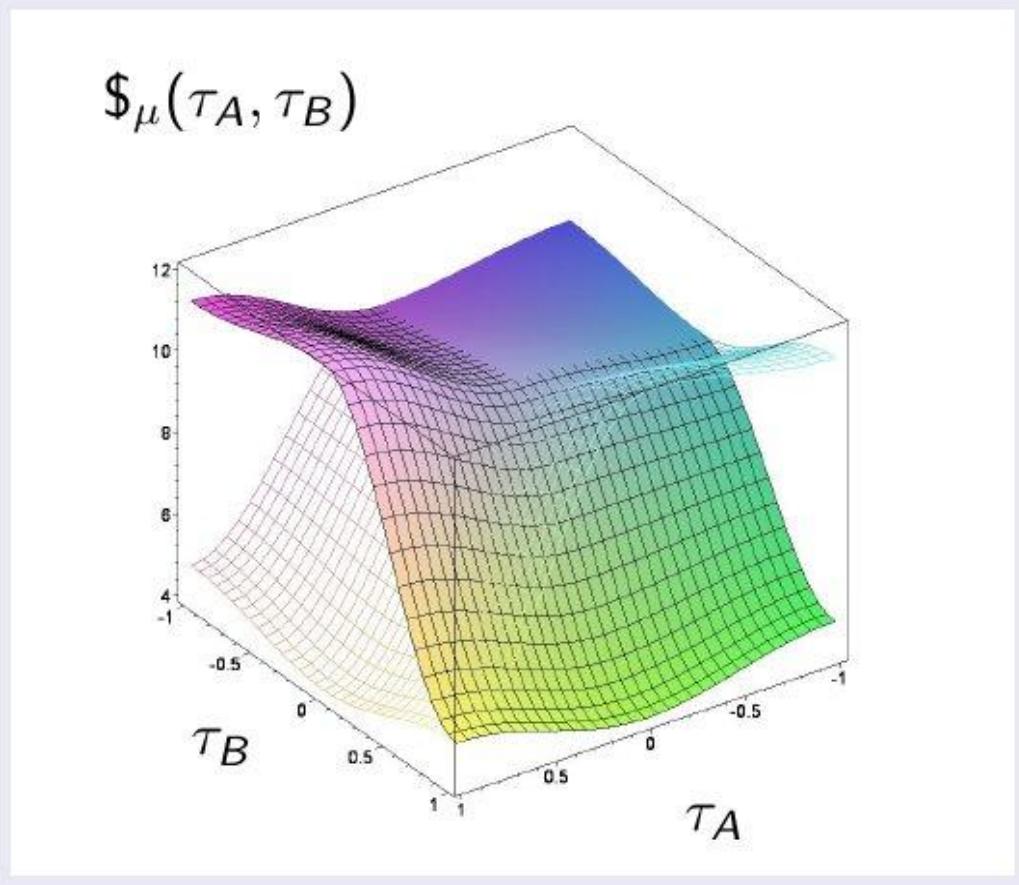
Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = 0$  (no entanglement)



The diagram clearly exhibits that the non-entangled quantum game simply describes the classical version of the prisoner's dilemma game. For the case, that both players decide to play a quantum strategy ( $\tau_A < 0 \wedge \tau_B < 0$ ) their payoff is equal to the case where both players choose the classical pure strategy  $s_1$  ( $\$_A(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10$ ). The classical Nash equilibrium  $((s_2^A, s_2^B),$  the dominant strategy) corresponds to the following  $\tau$ -values:  $(s_2^A, s_2^B) \hat{=} (\tau_A = 1, \tau_B = 1)$ .



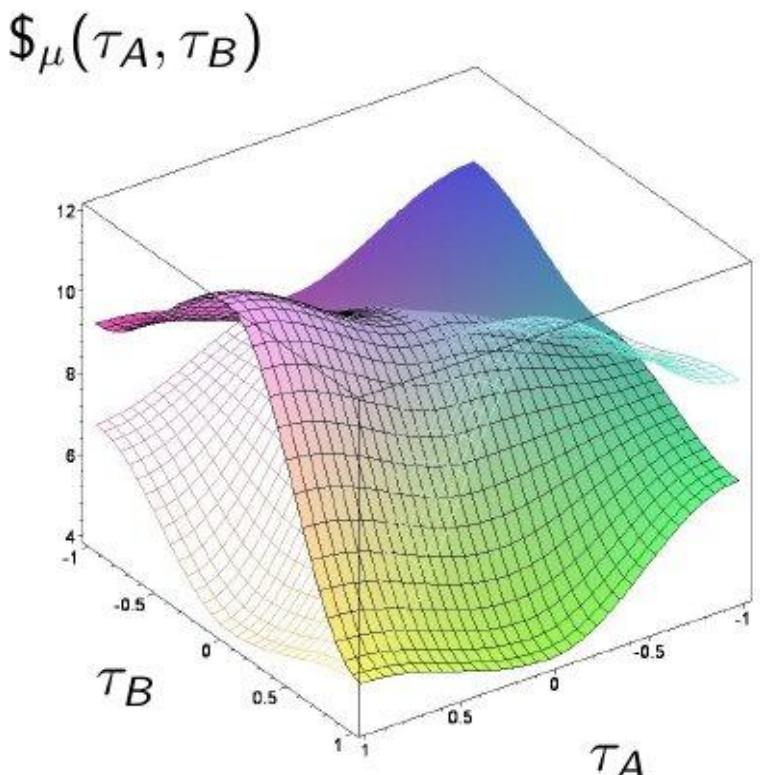
Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = \frac{\pi}{10} \approx 0.31$



For the absolute classical region  $C/C$  the shape of the surfaces does not change, whereas for the partially classical-quantum ( $C/Qu$  and  $QuC$ ) and absolute quantum region regions  $QuQu$  the payoff structure changes due to a possible interference of quantum strategies within Hilbertspace. The structure of Nash-equilibria does not change for the left picture, whereas for the following pictures the previously present dominant strategy of the prisoner's dilemma game has disappeared and a new, advisable quantum Nash-equilibrium will appear at  $(\hat{Q}, \hat{Q}^{\perp}(\tau_A = -1, \tau_B = -1))$ . During the transition from this figure to the next picture two separate phenomena occur. At first, for an entanglement value  $\gamma_1 \approx 0.37$ , the best response for player A to the strategy  $s_2^B \hat{=} \tau_B = 1$  is no longer the strategy  $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$ , as  $\$_A(\tau_A = -1, \tau_B = 1) \approx 5.05$  is now higher than  $\$_A(\tau_A = 1, \tau_B = 1) = 5$ . Secondly, for an entanglement value  $\gamma_2 \approx 0.53$ , the best response for player A to the strategy  $\hat{Q}_B \hat{=} \tau_B = -1$  is no longer the strategy  $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$ , as  $\$_A(\tau_A = 1, \tau_B = -1) \approx 9.96$  is for  $\gamma_2 = 0.53$  lower than  $\$_A(\tau_A = -1, \tau_B = -1) = 10$ .



Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = \frac{\pi}{8} \approx 0.52$

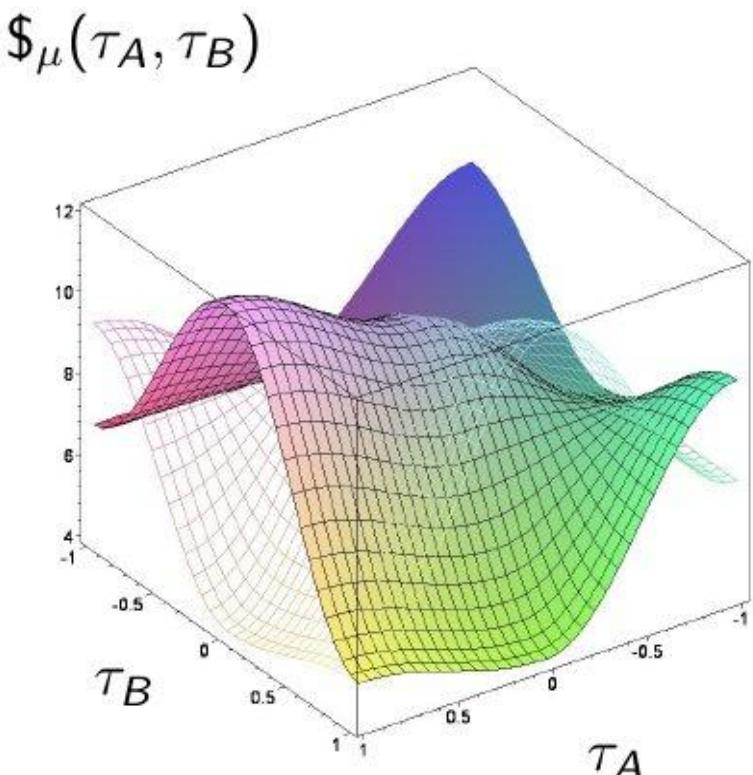


For the absolute classical region  $CICl$  the shape of the surfaces does not change, whereas for the partially classical-quantum ( $CICl$  and  $QuCl$ ) and absolute quantum region regions  $QuQu$  the payoff structure changes due to a possible interference of quantum strategies within Hilbertspace. The structure of Nash-equilibria did not change for the last figure, whereas for this and the following pictures the previously present dominant strategy of the prisoner's dilemma game has disappeared and a new, advisable quantum Nash-equilibrium has appeared ( $\widehat{Q}, \widehat{Q}^{\perp}(\tau_A = -1, \tau_B = -1)$ ). During the transition from the last picture to this figure two separate phenomena occurred. At first, for an entanglement value  $\gamma_1 \approx 0.37$ , the best response for player A to the strategy  $s_2^B \widehat{=} \tau_B = 1$  is no longer the strategy  $s_2^A \widehat{=} \tau_A = 1$ , as  $\$_A(\tau_A = -1, \tau_B = 1) \approx 5.05$  is now higher than  $\$_A(\tau_A = 1, \tau_B = 1) = 5$ . Secondly, for an entanglement value  $\gamma_2 \approx 0.53$ , the best response for player A to the strategy  $\widehat{Q} \widehat{=} \tau_B = -1$  is no longer the strategy  $s_2^A \widehat{=} \tau_A = 1$ , as  $\$_A(\tau_A = 1, \tau_B = -1) \approx 9.96$  is for  $\gamma_2 = 0.53$  lower than  $\$_A(\tau_A = -1, \tau_B = -1) = 10$ .

# Quantum Games

## The 2-Player Decision State

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = \frac{\pi}{6} \approx 0.94$

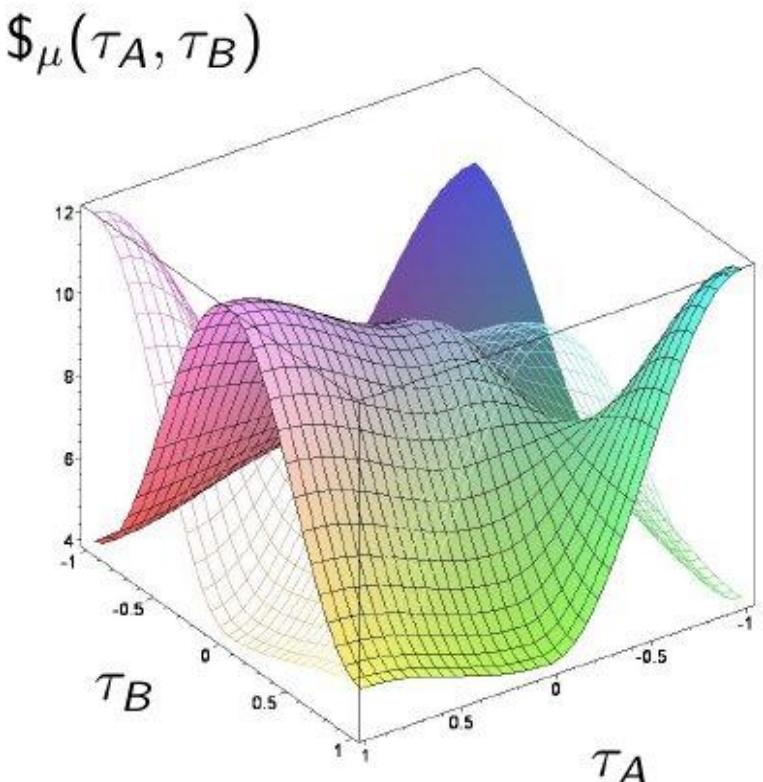


The results show, that a quantum extension of a classical prisoner's dilemma game is able to change the structure of Nash-equilibria, and even previously present dominant strategies could become nonexistent, if the value of entanglement increases further than a defined  $\gamma$ -threshold. Players with a higher strategic entanglement value  $\gamma$  escape the dilemma as they see the advantage of the quantum strategy combination  $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$ , which is measured as if both are playing the classical strategy  $s_2$ .

# Quantum Games

## The 2-Player Decision State

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$



The results show, that a quantum extension of a classical prisoner's dilemma game is able to change the structure of Nash-equilibria, and even previously present dominant strategies could become nonexistent, if the value of entanglement increases further than a defined  $\gamma$ -threshold.

Players with a higher strategic entanglement value  $\gamma$  escape the dilemma as they see the advantage of the quantum strategy combination  $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$ , which is measured as if both are playing the classical strategy  $s_2$ .

# Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

## (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

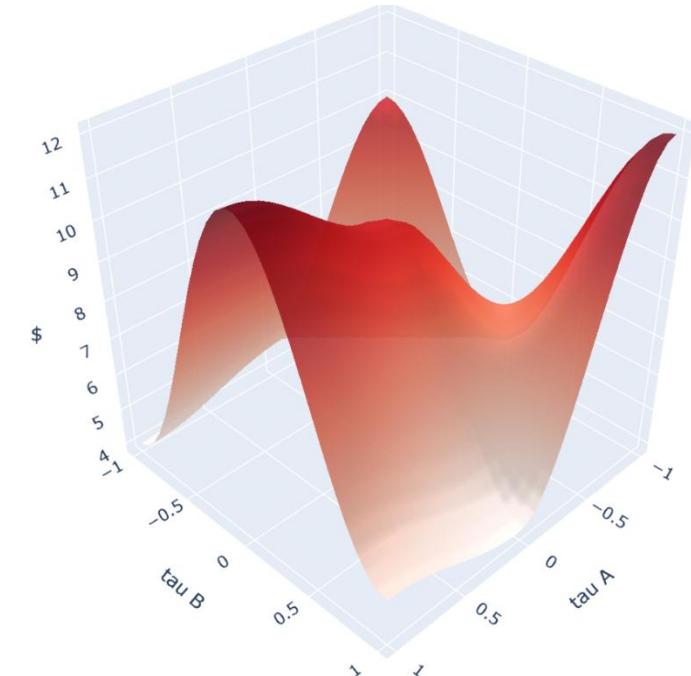
Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2025/26)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanuske

Frankfurt am Main 23.01.2026

Jupyter Notebook:  
Quanten Spieltheorie



### Dritter Vorlesungsteil: Quanten Spieltheorie

#### Einführung

Die Annahme des vollständig verbundenen, zufälligen Netzwerks, welches die Grundlage der deterministischen evolutionären Spieltheorie bildet, ist in realen sozialen Netzwerken oft nicht erfüllt. In realen sozialen Netzwerken bilden sich oft weitgehend abgeschlossene Cluster von miteinander verbundenen Spielern, die zu anderen Clustern nur bedingt bzw. selten Kontakt haben. Diese Art von Cluster- bzw. Cliquenbildung kann zu einer unterschiedlichen Ausprägung von sozialen Normen innerhalb der einzelnen Teilgruppen führen. Soziale Normen können sich somit herausbilden, die den einzelnen Spielern neben ihrem *homo ökonomischen* Interesse auch den Blick auf das Wohl der eigenen Gruppe nahelegen. Eine solche Art von induziertem Gruppeninteresse wird im folgenden mittels des Ansatzes der Quanten-Spieltheorie mathematisch in die deterministischen Gleichungen der evolutionären Spieltheorie eingearbeitet. Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch



- Favorites
- Handwriting
- Expression
- Units (SI)
- Units (FPS)
- Common Symbols
- Matrix
- Components
- Greek
- Arrows
- Relational
- Relational Round
- Negated
- Large Operators
- Operators
- Open Face
- Fraktur
- Script
- Miscellaneous

Text Math Drawing Plot Animation  
 C Text Lucida Bright 16

# Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

## Physics of Socio-Economic Systems with the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe–Universität in Frankfurt am Main (Wintersemester 2017/18)  
 von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske  
 Frankfurt am Main 10.01.2018

Dritter Vorlesungsteil:  
Symmetrische (2 x 2) Quantenspiele

### Die Quanten Spieltheorie und der verschränkte Zwei-Spieler Zustand

Dieses Maple-Worksheet illustriert das Konzept der Quanten-Spieltheorie an mehreren Beispielen.

```
> restart:  

with(linalg):  

with(LinearAlgebra):  

with(plots):  

with(RandomTools):  

with(networks):  

with(stats[statplots]):  

with(plottools):  

with(ColorTools):
```

Die Quanten-Spieltheorie beschreibt den Entscheidungszustand eines Spielers, bevor dieser die endgültige Zustandsraum, dem sogenannten Hilbertraum. Die in diesem Worksheet verwendete mathematische Repräsentation wird wie folgt definiert:

```
> UA:=subs({theta=ta,phi=pa},matrix(2,2,[exp(I*phi)*cos(theta/2),sin(theta/2),-sin(theta/2),cos(theta/2)]):  

UB:=subs({theta=tb,phi=pb},matrix(2,2,[exp(I*phi)*cos(theta/2),sin(theta/2),-sin(theta/2),cos(theta/2)]):
```

$$UA := \begin{bmatrix} e^{I \cdot pa} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$UB := \begin{bmatrix} e^{I \cdot pb} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Mittels des äusseren Produktes erhält man den gemeinsamen (4x4)-Entscheidungsooperator:

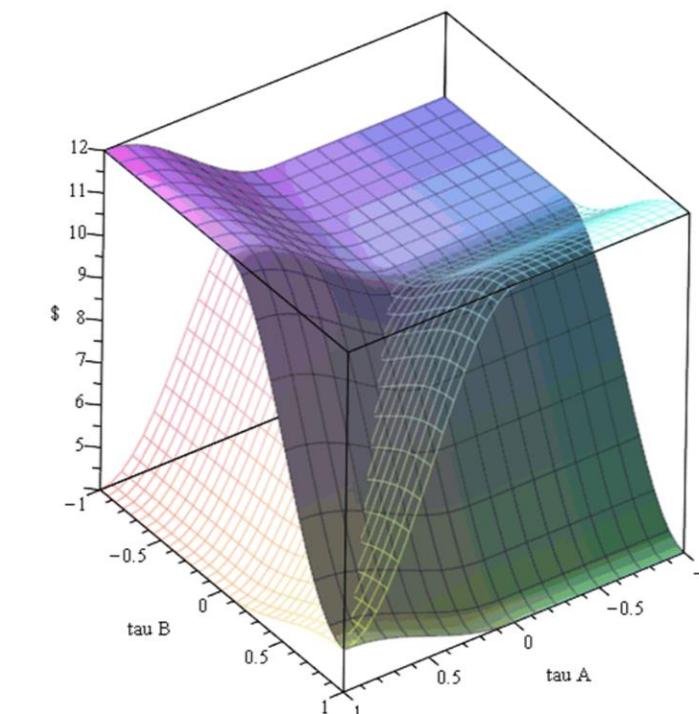
```
> UA_T_UB:=matrix(4,4,[  

UA[1,1]*UB[1,1],UA[1,1]*UB[1,2],UA[1,2]*UB[1,1],UA[1,2]*UB[1,2],  

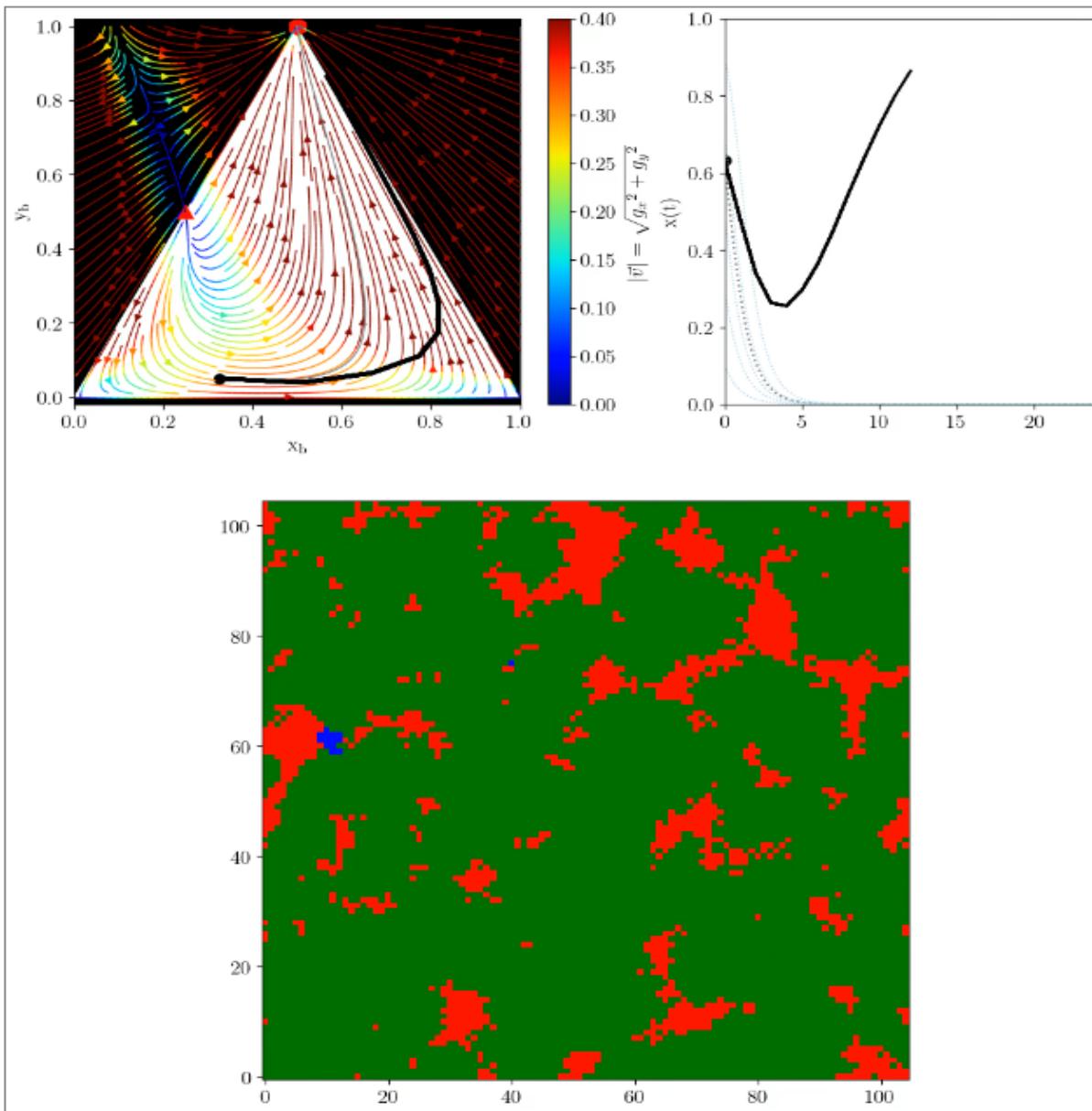
UA[2,1]*UB[2,1],UA[2,1]*UB[2,2],UA[2,2]*UB[2,1],UA[2,2]*UB[2,2],  

UA[3,1]*UB[3,1],UA[3,1]*UB[3,2],UA[3,2]*UB[3,1],UA[3,2]*UB[3,2],  

UA[4,1]*UB[4,1],UA[4,1]*UB[4,2],UA[4,2]*UB[4,1],UA[4,2]*UB[4,2]]):
```



# Räumliche Quantenspiele (Spatial Quantum Games)



Koordinatensystem veranschaulicht ( $x_b := x_2 - x_3/3$  und  $y_b := x_3$ ), das rechte obere Panel veranschaulicht den Populationsvektor  $x(t)$  der observablen klassischen Strategien (Anteil der Personen, die nach der Messung  $s_1$  spielen) und das untere Panel zeigt die Strategienwahl der Spieler auf dem räumlichen Gitter. Man erkennt, dass die Population dem Dilemma des Spiels entkommen und sich in der evolutionär stabilen, vorteilhafteren Quantenstrategie stabilisieren kann.

In diesem Unterpunkt befassen wir uns mit räumlichen (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspielen. Durch die Festlegung der Entscheidungswinkel  $\theta_\mu$  und  $\varphi_\mu$  wählt der Spieler seine Strategie. Neben den klassischen, reinen Strategien  $s_1$  ( $\hat{s}_1 = \hat{U}(0, 0)$ , blaue Strategie) und  $s_2$  ( $\hat{s}_2 = \hat{U}(\pi, 0)$ , rote Strategie) kann der Spieler nun auch die Quantenstrategie  $\hat{Q}$  ( $\hat{Q} = \hat{U}(0, \pi/2)$ , grüne Strategie) festlegen. Wir betrachten zunächst ein dominantes Quantenspiel mit folgender symmetrischer Auszahlungsmatrix  $\hat{\$}^A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ , mit  $\hat{\$}^B = (\hat{\$}^A)^T$ . Das so konstruierte Quantenspiel entspricht somit einem evolutionären symmetrischen ( $2 \times 3$ ) Spiel auf einem räumlichen Gitter, wobei die dritte Strategie  $s_3$  die Quantenstrategie  $\hat{Q}$  darstellt. Mittels des Python Programms [Räumliches symmetrisches \(2 x 2\)-Quantenspiel \(SpatialQuantumGame.py\)](#) können Simulationen für unterschiedliche Verschränkungswerte  $\gamma$  berechnet werden.

Betrachtet man die Resultate des Quantenspiels bei verschwindendem Verschränkungswert ( $\gamma = 0$ ), so stimmen diese mit dem klassischen Spiel überein.  $s_2$  ist dabei die dominante Strategie des Spiels und der Populationsvektor konvergiert zu  $x(t) \rightarrow 0$ . Erhöht man den Verschränkungswert über die erste  $\gamma$ -Barriere ( $\gamma > \gamma_1 \approx 0.361$ ), so verschwindet die ursprüngliche dominante Strategie und ab einem Verschränkungswert der über der zweiten  $\gamma$ -Barriere liegt ( $\gamma_2 \approx 0.524$ ) entsteht die neue dominante Quantenstrategie  $s_3 : \hat{Q}$ . Die nebenstehende Animation zeigt die Ergebnisse des räumlichen Quantenspiels bei dem maximalen Verschränkungswert ( $\gamma = \pi/2 \approx 1.57$ ). Es wurden 11025 Spieler auf einem räumlichen Gitter angeordnet (Moore Nachbarschaft), wobei zur Zeit  $t = 0$  die Spieler im Mittel die folgenden Strategien wählten  $(x_1, x_2, x_3)(t = 0) = (0.65, 0.3, 0.05)$ . Im oberen linken Panel der Animation wird die Evolution der Population im baryzentrischen Dreiecks-

```

# Python-Programm "Spatial (2x3)-QuantumGames"
#####
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
from random import randint, uniform
from math import isclose
import numpy as np
from matplotlib import rcParams
import matplotlib.gridspec as gridspec
from scipy.integrate import solve_ivp
import os
from sympy import symbols, Matrix, Eq, transpose, solve, N, exp, sin, cos, I, re
import matplotlib.colors as colors

#Berechnung der Erwartungswerte der observablen Strategien s_1 und s_2 (Gleichungen von QuantumGame.ipynb)
def calc_P(s_A, s_B, gamma):
    def P_11(theta_A,phi_A,theta_B,phi_B,gamma):
        f = (exp(2*I*(phi_A + phi_B))*cos(gamma/2)**2 + sin(gamma/2)**2)*(sin(gamma/2)**2 + exp(-2*I*(phi_A + phi_B))*cos(gamma/2)**2)*cos(theta_A/2)**2*cos(theta_B/2)**2
        return f
    def P_12(theta_A,phi_A,theta_B,phi_B,gamma):
        f = (-exp(I*phi_A)*sin(gamma/2)**2*sin(theta_B/2)*cos(theta_A/2) + I*exp(I*phi_B)*sin(gamma/2)*sin(theta_A/2)*cos(gamma/2)*cos(theta_B/2) - I*exp(-I*phi_B)*sin(gamma/2)*sin(theta_A/2)*cos(gamma/2)*cos(theta_B/2) - exp(-I*phi_A)*sin(theta_B/2)*cos(gamma/2)**2*cos(theta_A/2))*(-exp(I*phi_A)*sin(theta_B/2)*cos(gamma/2)**2*cos(theta_A/2) + I*exp(I*phi_B)*sin(gamma/2)*sin(theta_A/2)*cos(gamma/2)*cos(theta_B/2) - I*exp(-I*phi_B)*sin(gamma/2)*sin(theta_A/2)*cos(gamma/2)*cos(theta_B/2) - exp(-I*phi_A)*sin(gamma/2)**2*sin(theta_B/2)*cos(theta_A/2))
        return f
    def P_21(theta_A,phi_A,theta_B,phi_B,gamma):
        f = (I*exp(I*phi_A)*sin(gamma/2)*sin(theta_B/2)*cos(gamma/2)*cos(theta_A/2) - exp(I*phi_B)*sin(gamma/2)**2*sin(theta_A/2)*cos(theta_B/2) - exp(-I*phi_B)*sin(theta_A/2)*cos(gamma/2)**2*cos(theta_B/2) - I*exp(-I*phi_A)*sin(gamma/2)*sin(theta_B/2)*cos(gamma/2)*cos(theta_A/2))*(I*exp(I*phi_A)*sin(gamma/2)*sin(theta_B/2)*cos(gamma/2)*cos(theta_A/2) - exp(I*phi_B)*sin(theta_A/2)*cos(gamma/2)**2*cos(theta_B/2) - exp(I*phi_B)*sin(gamma/2)**2*sin(theta_A/2)*cos(theta_B/2) - I*exp(-I*phi_A)*sin(gamma/2)*sin(theta_B/2)*cos(gamma/2)*cos(theta_A/2))
        return f
    def P_22(theta_A,phi_A,theta_B,phi_B,gamma):
        f = (-I*exp(-I*phi_A - I*phi_B)*sin(gamma/2)*cos(theta_A/2)*cos(theta_B/2) + I*exp(I*phi_A + I*phi_B)*sin(gamma/2)*cos(gamma/2)*cos(theta_A/2)*cos(theta_B/2) + sin(theta_A/2)*sin(theta_B/2))**2
        return f

# Strategien: (theta, phi) für s=0,1,2 (s_1, s_2, Q)
S = [(0, 0), (np.pi, 0), (0, np.pi/2)]
theta_A, phi_A = S[s_A]
theta_B, phi_B = S[s_B]
p_11 = float(re(N(P_11(theta_A, phi_A, theta_B, phi_B, gamma))))
p_12 = float(re(N(P_12(theta_A, phi_A, theta_B, phi_B, gamma))))
p_21 = float(re(N(P_21(theta_A, phi_A, theta_B, phi_B, gamma))))
p_22 = float(re(N(P_22(theta_A, phi_A, theta_B, phi_B, gamma))))

return np.array([[p_11,p_12],[p_21,p_22]])


# Quanten-Verschränkung (entanglement: in [0,pi/2])
set_gamma = np.pi/2
# Auszahlungsmatrix des symmetrischen (2x2)-Spiels
# Festlegung der Simulationsparameter und starten der Simulation
# Gefangenendilemma (cooperate: s_1-Strategie), siehe QuantumGame.ipynb
run_simulation(105, 105, 25, 1, set_gamma, 10, 4, 12, 5, [0.65,0.3,0.05], "./V_max")
# Hanauske, Matthias, , et al. "Quantum game theory and open access publishing." Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 382.2 (2007): 650-664.
# Open Access Game as a Prisoners' Dilemma
#run_simulation(105, 105, 13, 1, set_gamma, 4, 1, 5, 3, [0.2,0.65,0.15], "./OA_PD_")
# Open Access as a "Stag Hunt"
#run_simulation(105, 105, 15, 1, set_gamma, 4, 1, 3, 3, [0.2,0.65,0.15], "./OA_SH_")
# Hanauske, Matthias, et al. "Doves and hawks in economics revisited: An evolutionary quantum game theory based analysis of financial crises." Physica A: 389.21 (2010): 5084-5102.
# Falke Taube, high risk
#run_simulation(105, 105, 25, 1, set_gamma, 1.5, 0, 5, -7.5, [0.2,0.65,0.15], "./FT_")

```

## Weiterführende Links

# Python programm

Folien der 11. Vorlesung

Ergebnis der 11. Vorlesung: WS 2022/23

## sches $(2 \times 2)$ -Spiel mit Klassenst

ebook: Quanten Spieltheorie

ipython Notebook: Quanten Spieltheorie

Sheet:  Metrische (2 x 2) Quantenspiele

## Worksheets symmetrische (2 x 2) Quantenspiele

## symmetrisches $(2 \times 2)$ -Quantenspiel (SpatialQuantumGame.py)

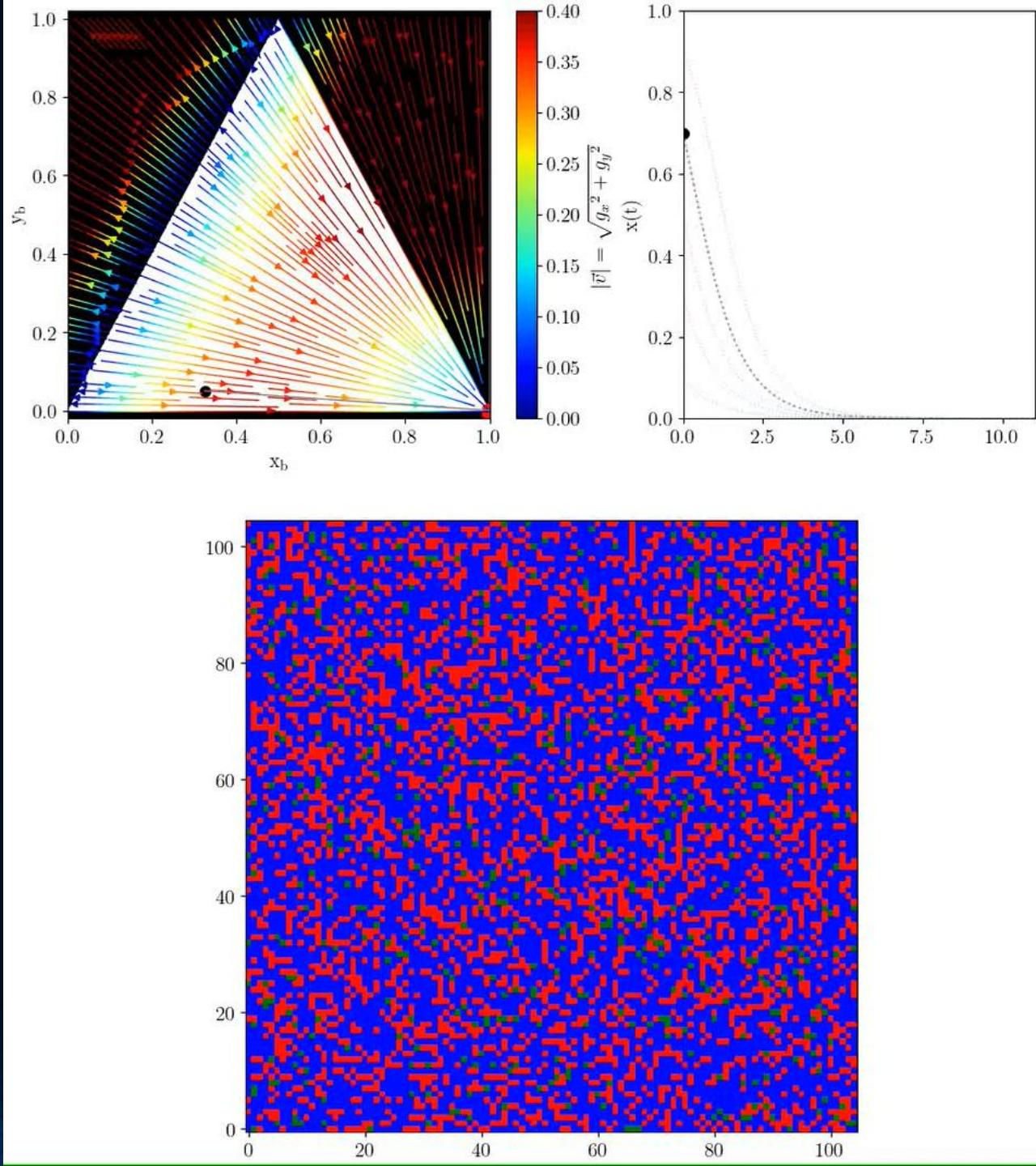
Clusterprojekt ConTrust der Goethe-Universität Frankfurt

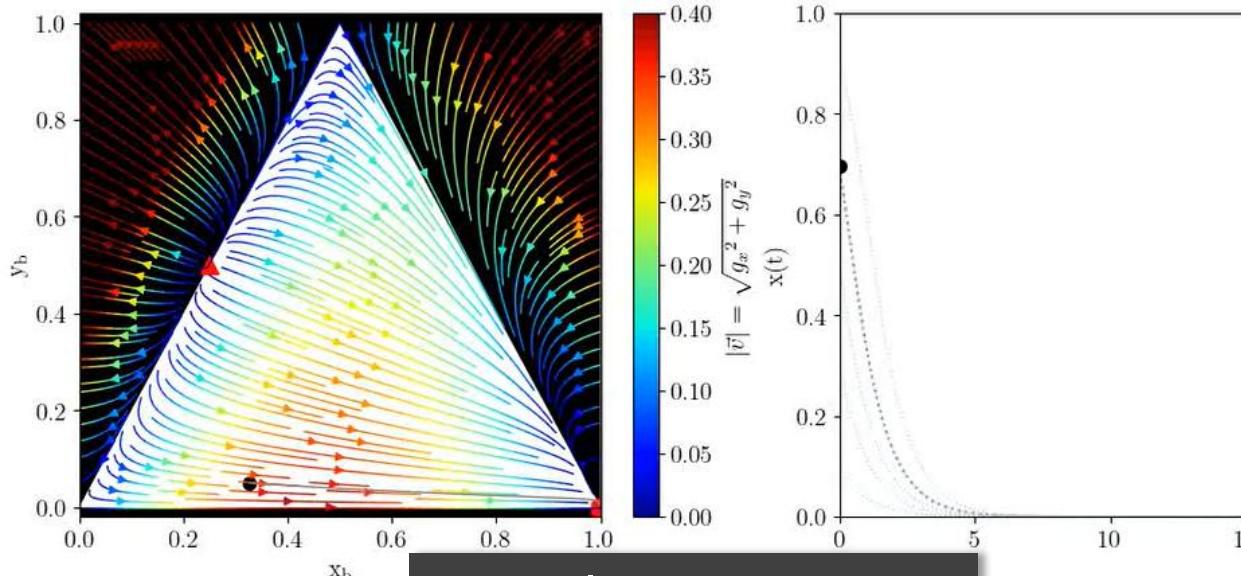
# Räumliche Quantenspiele

## *Dominantes Spiel*

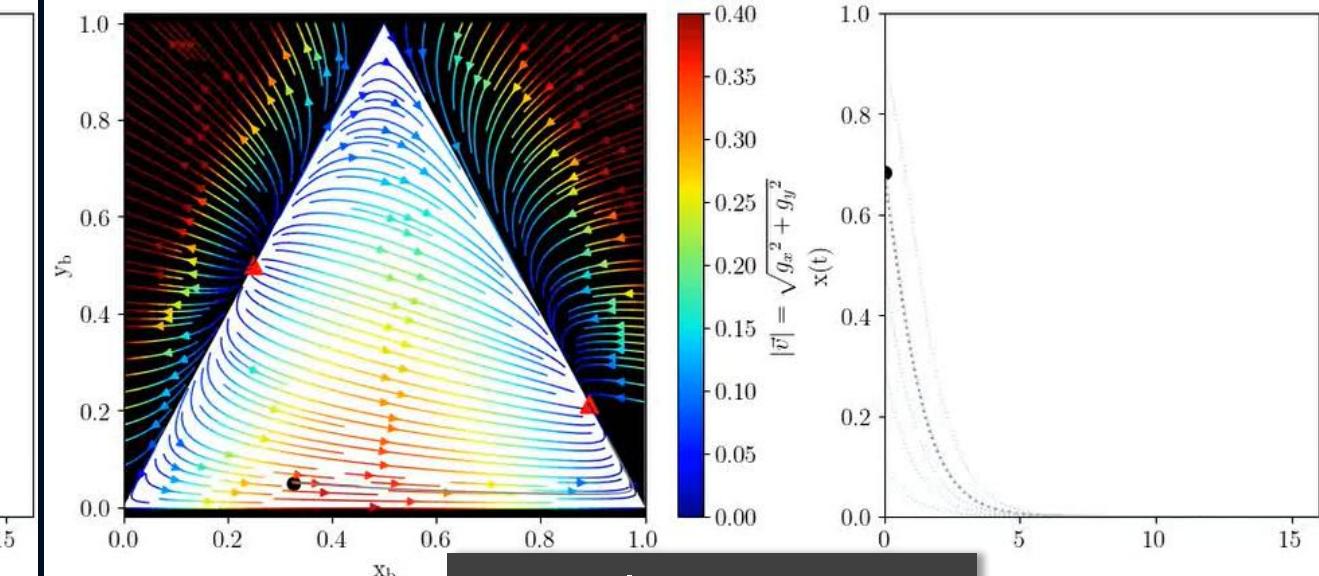
	$s_1^B$	$s_2^B$
$s_1^A$	(10, 10)	(4, 12)
$s_2^A$	(12, 4)	(5, 5)

entanglement ( $\gamma=0$ )

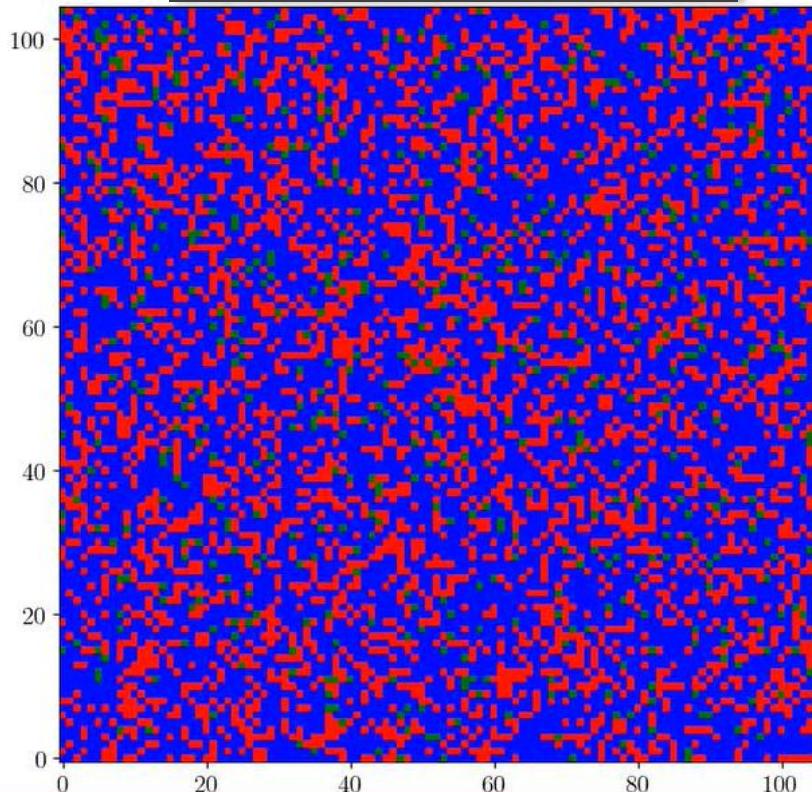




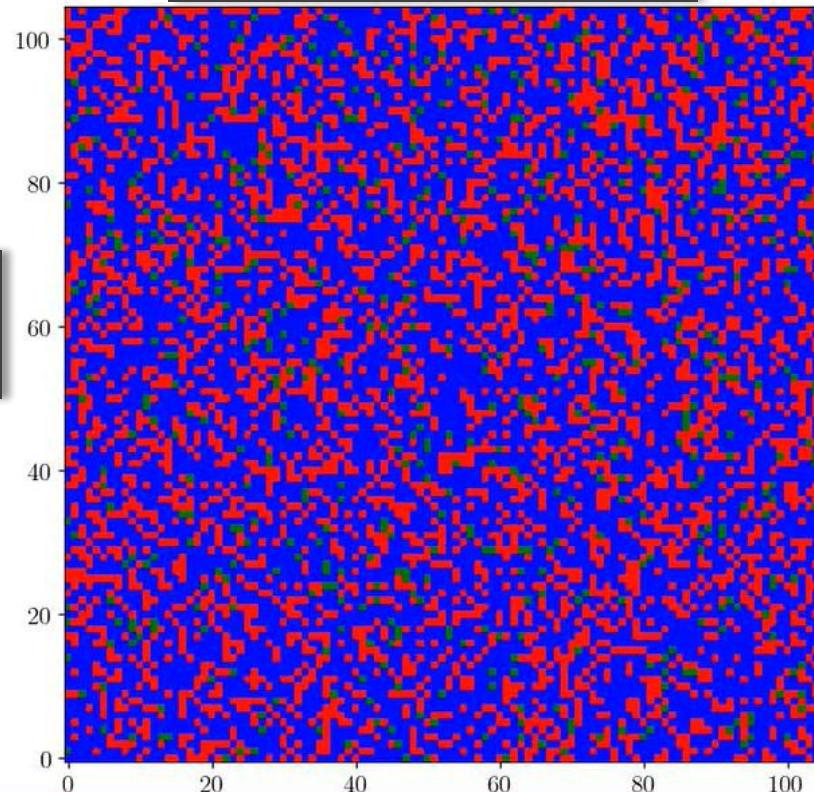
entanglement ( $\gamma=0.35$ )

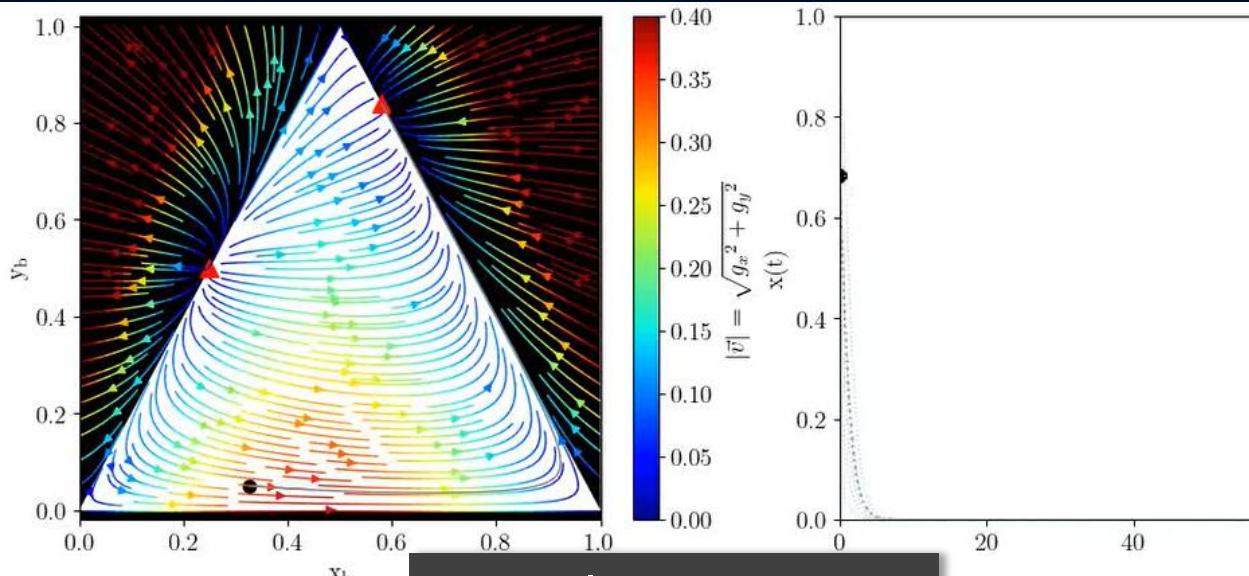


entanglement ( $\gamma=0.4$ )

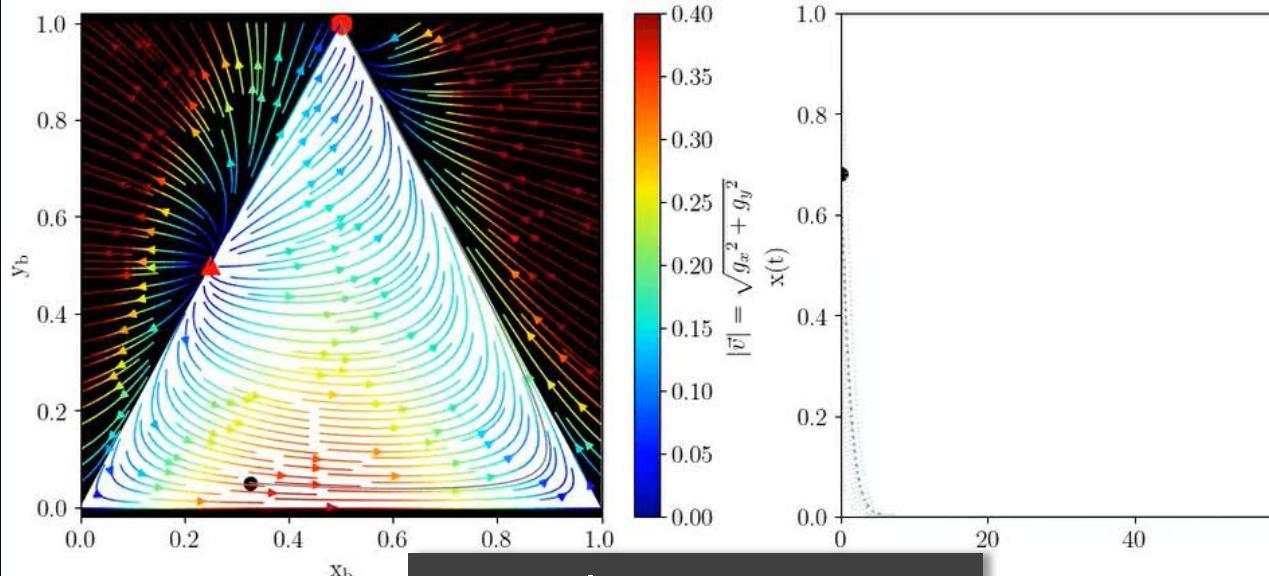


1. Barriere bei  
 $\gamma_1=0.361$

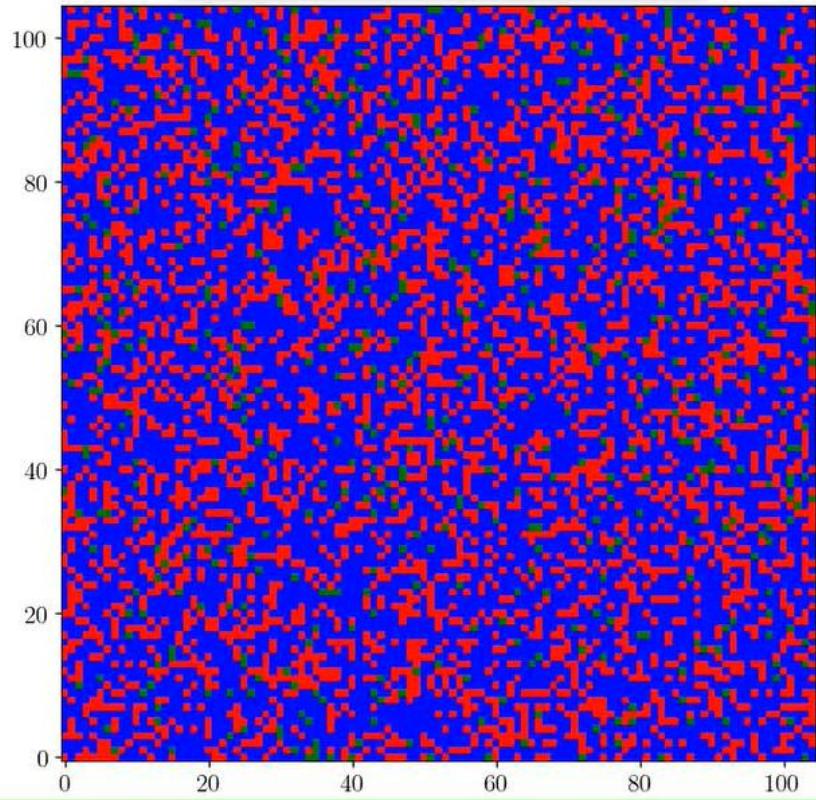




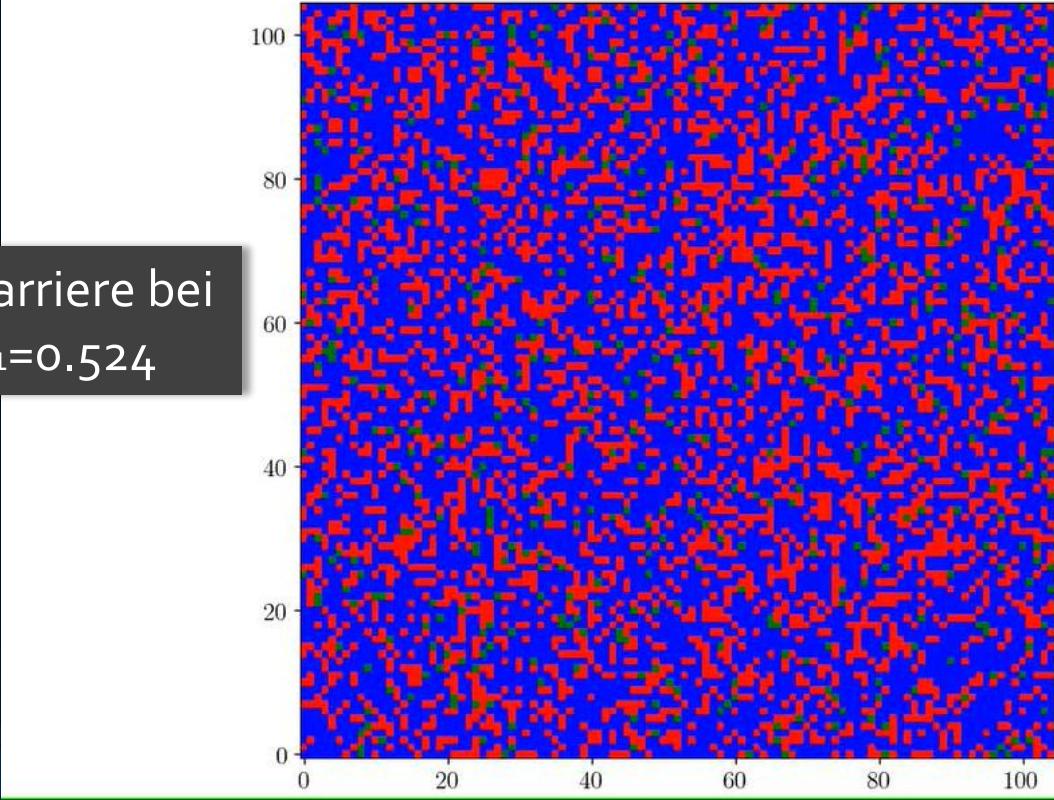
entanglement ( $\gamma=0.5$ )

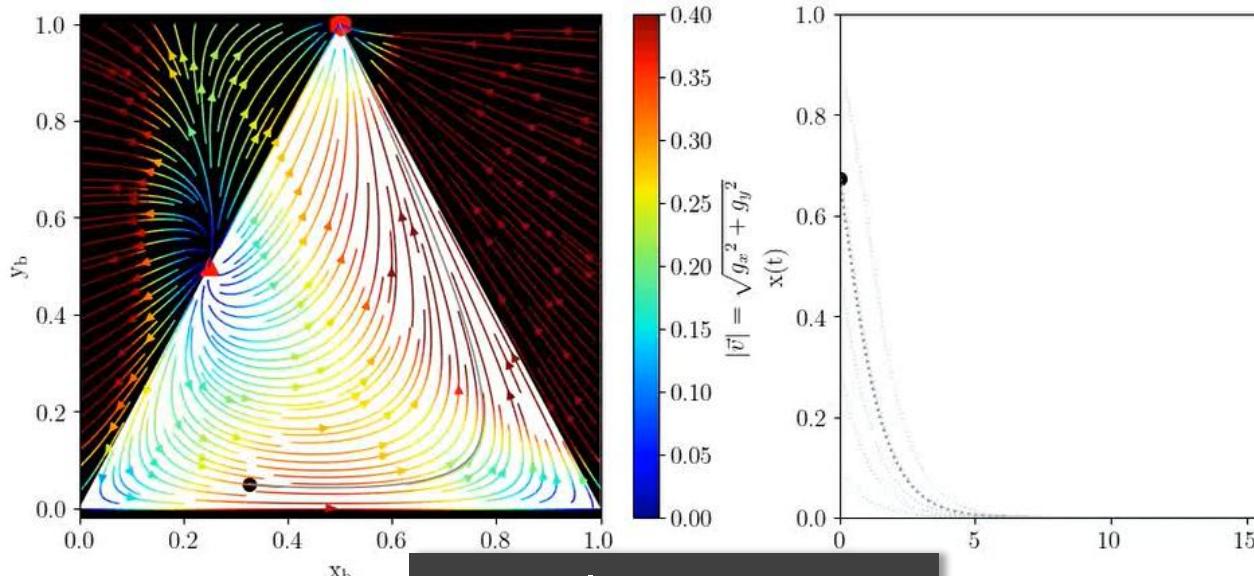


entanglement ( $\gamma=0.55$ )

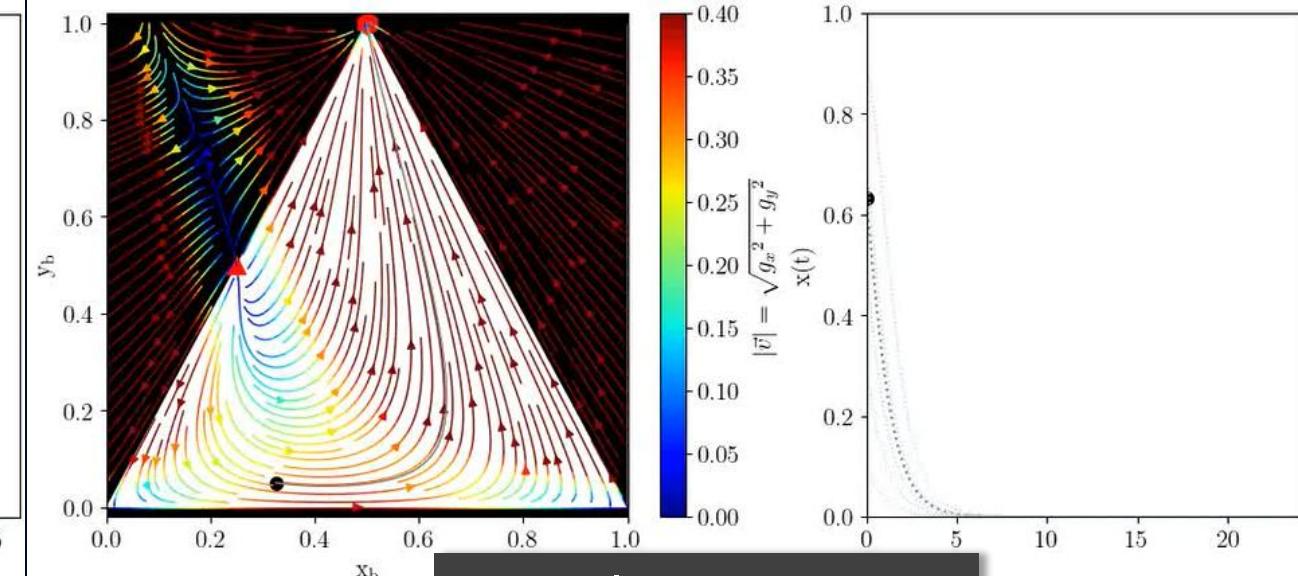


2. Barriere bei  
 $\gamma_1=0.524$

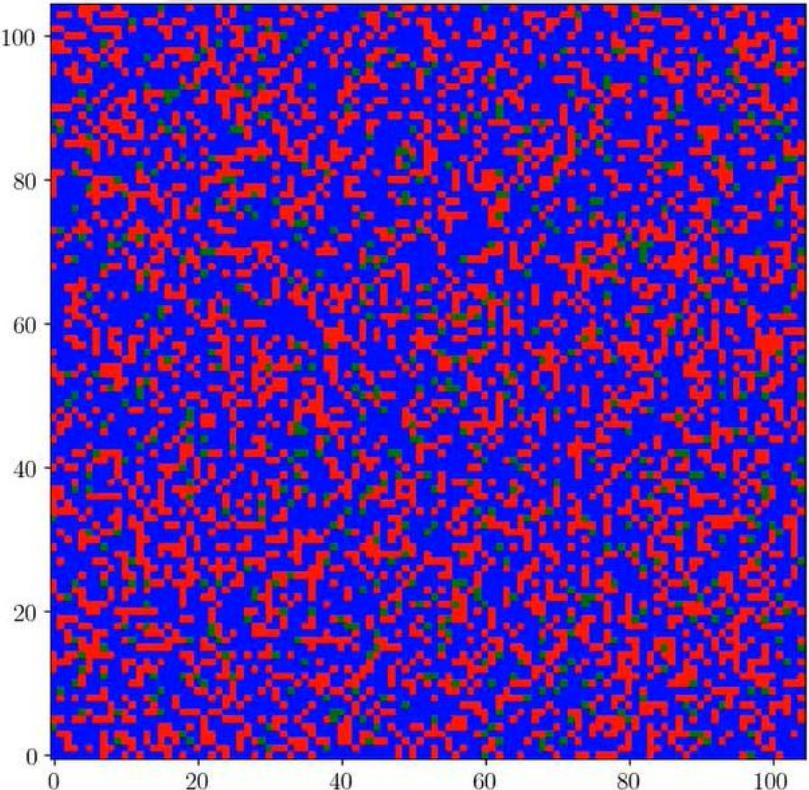
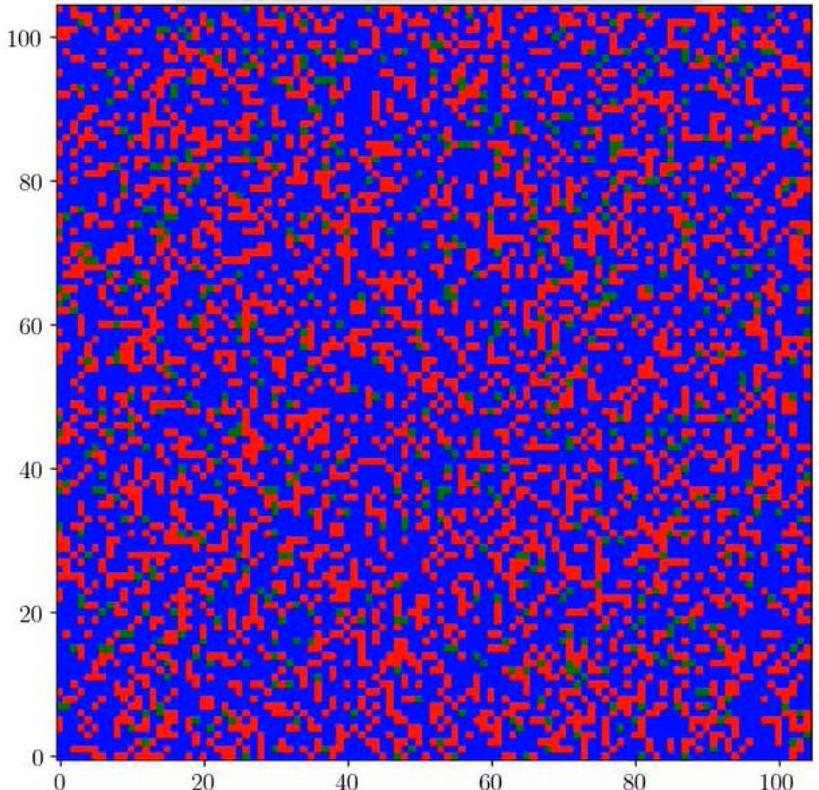




entanglement ( $\gamma=0.8$ )



entanglement ( $\gamma=\pi/2$ )



Social dilemmas can be resolved  
with the entangled strategic decision paths of  
quantum game theory.

For vanishing values of entanglement ( $\gamma=0$ ) quantum games are identical to classical games.

### Dominant Class:

Games with a dilemma: The dilemma resolves if the value of entanglement is above a defined  $\gamma$ -barrier.

Games without a dilemma: No further Nash-equilibria, dominant strategy remains.

### Class of coordination games:

The coordination problem resolves if the value of entanglement is above a defined  $\gamma$ -barrier.

### Class of anti-coordination games:

An additional Nash-Equilibrium appears if the value of entanglement is above a defined  $\gamma$ -barrier.

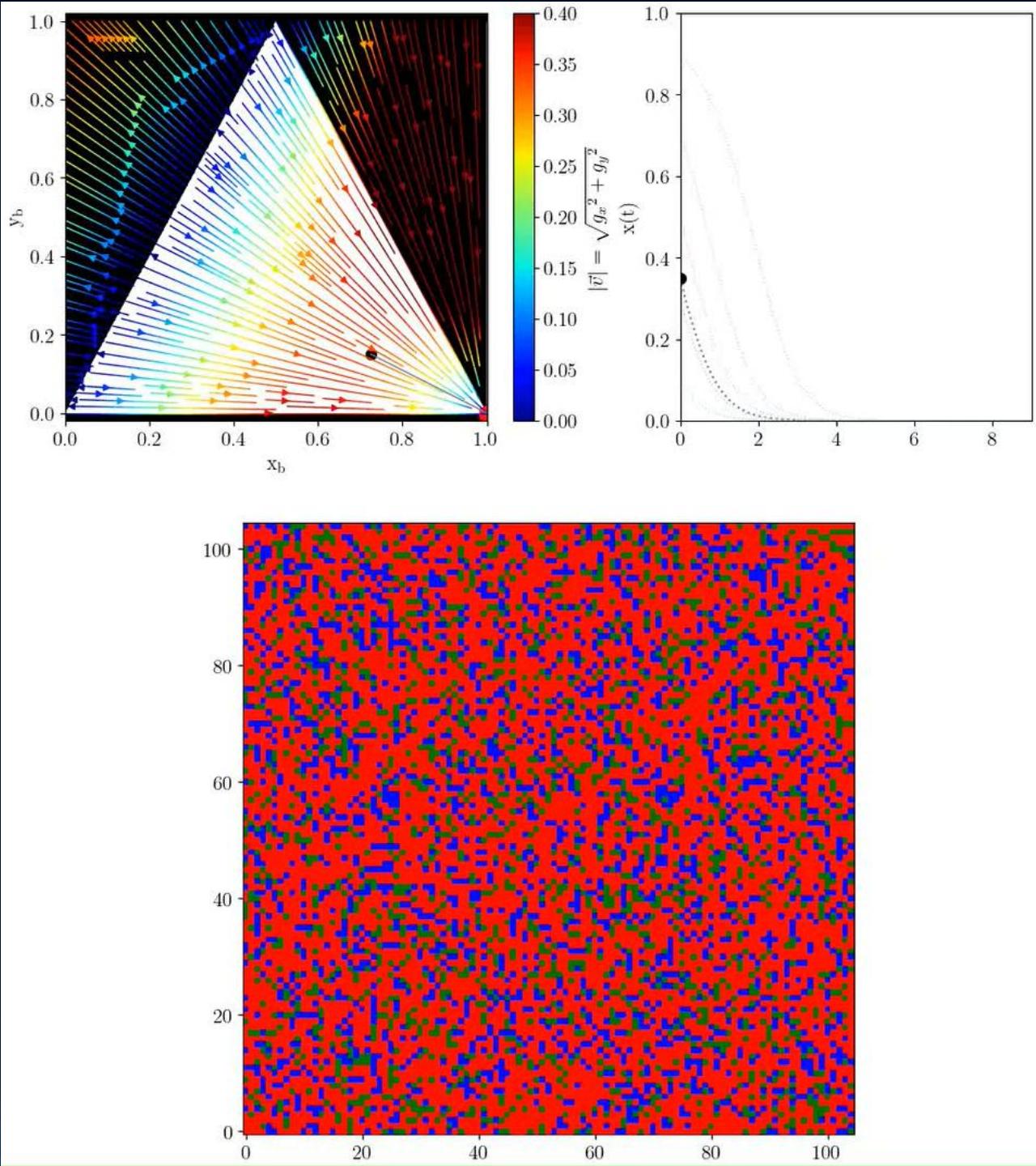
In General: If the strategy entanglement is large enough, then additional Nash equilibria can occur, previously present, not favorable dominant or evolutionary stable strategies could become nonexistent and new, favorable evolutionary stable strategies do appear for some game classes.

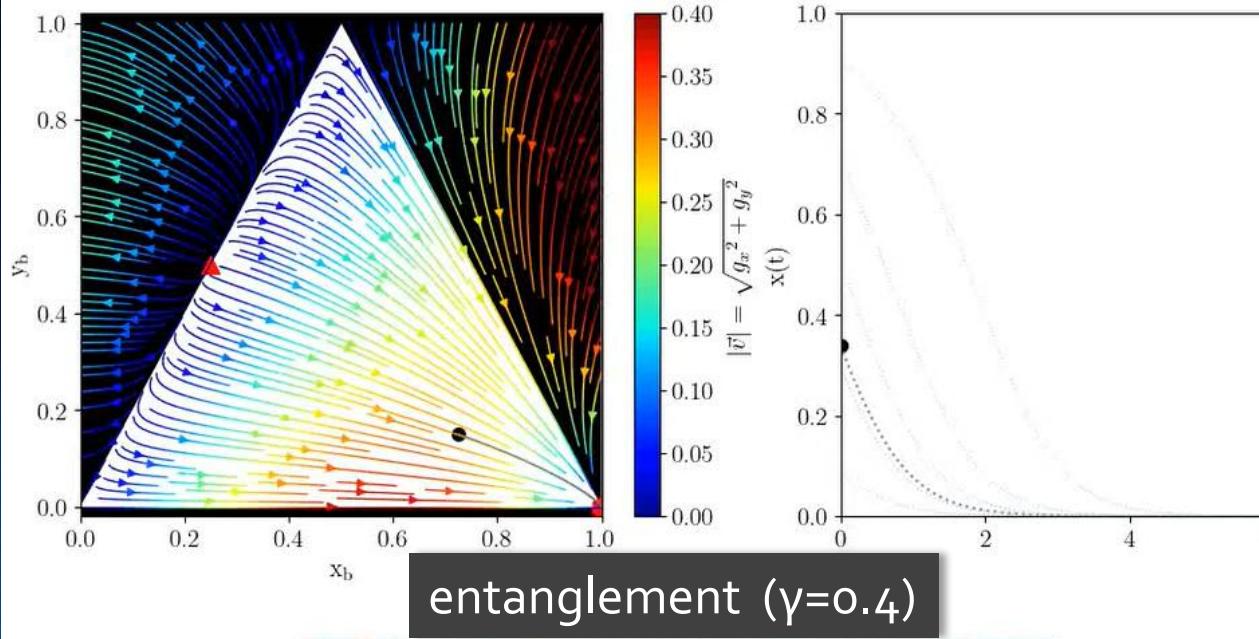
# Räumliche Quantenspiele

## *Dominantes Spiel*

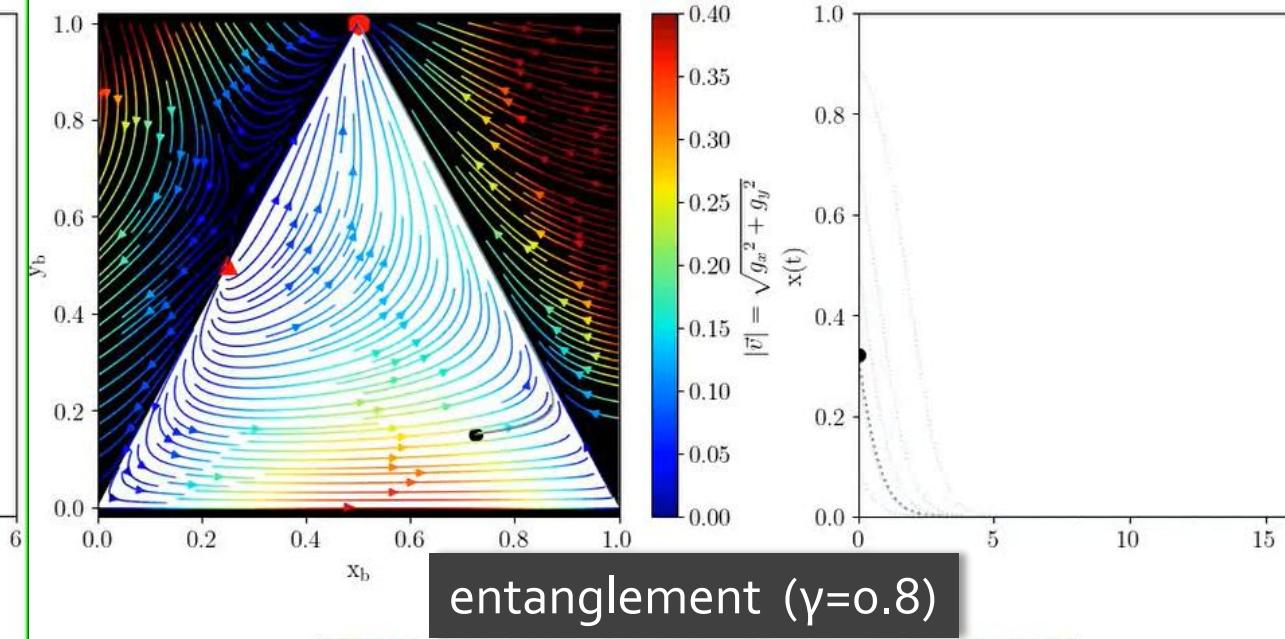
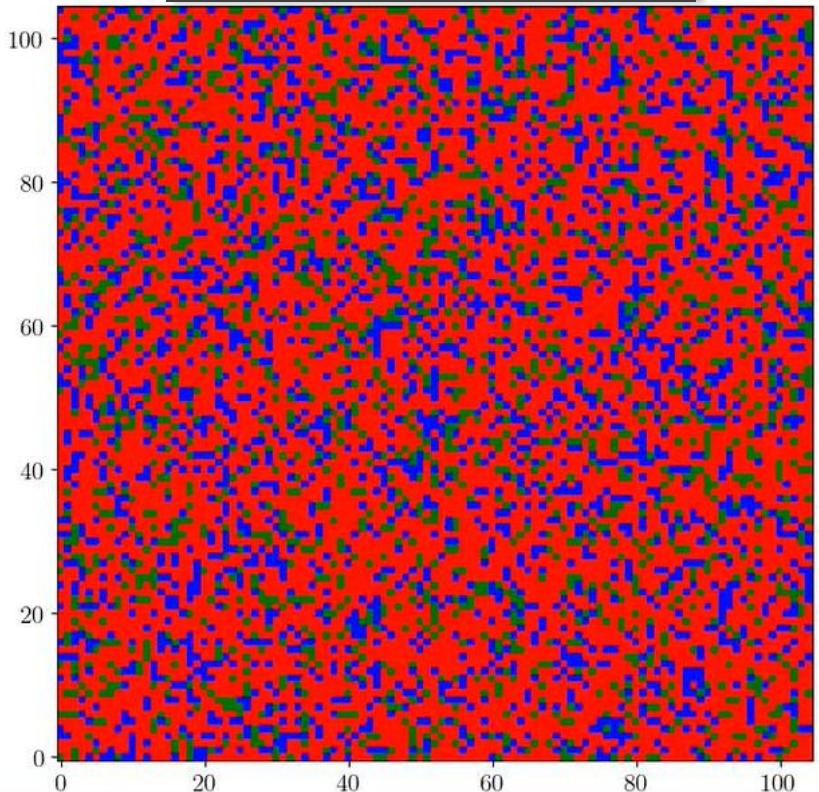
	$s_1^B$	$s_2^B$
$s_1^A$	(4, 4)	(1, 5)
$s_2^A$	(5, 1)	(3, 3)

entanglement ( $\gamma=0$ )

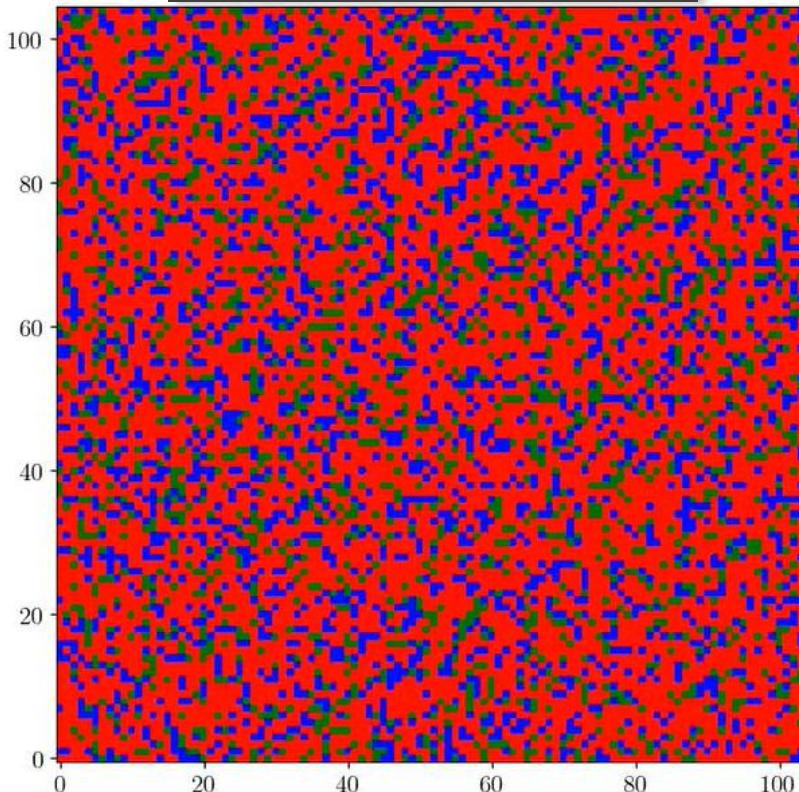


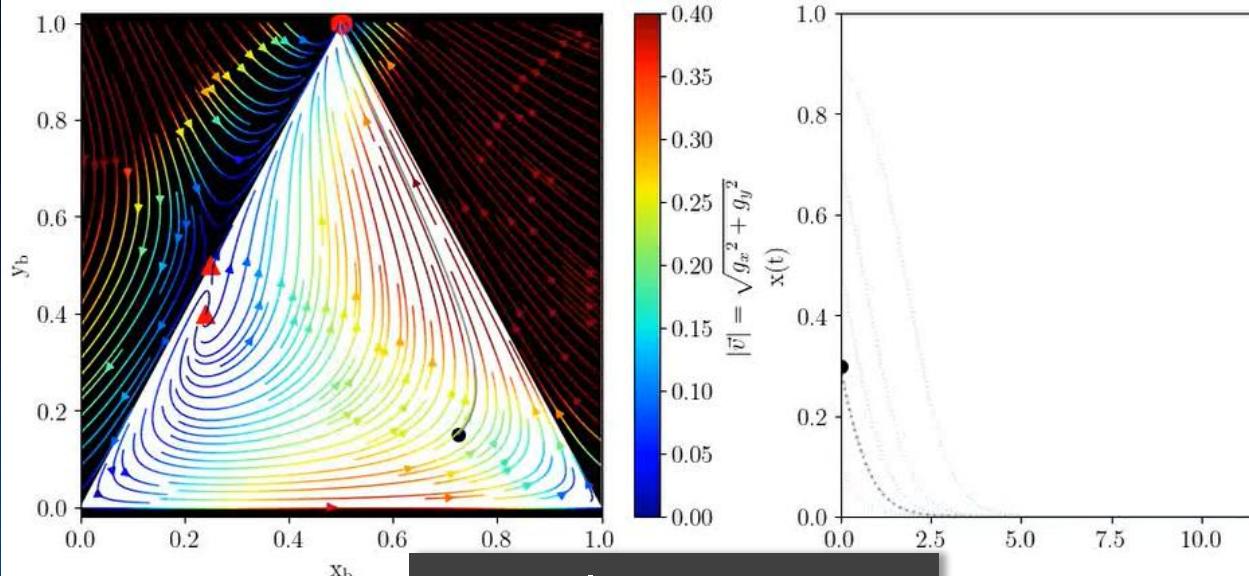


entanglement ( $\gamma=0.4$ )

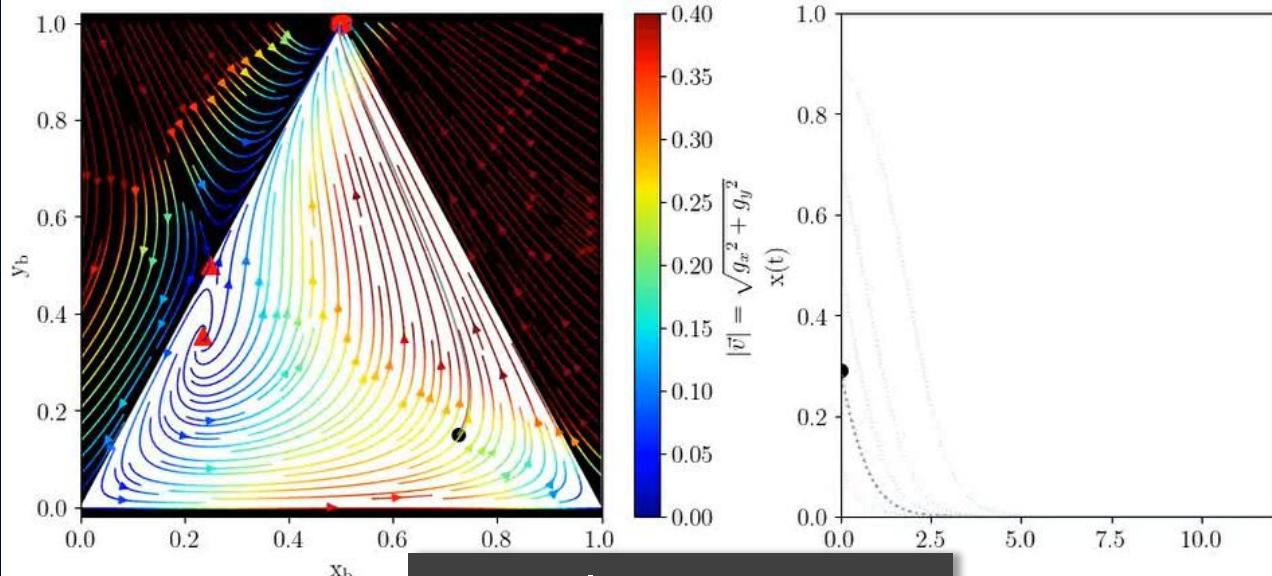


entanglement ( $\gamma=0.8$ )

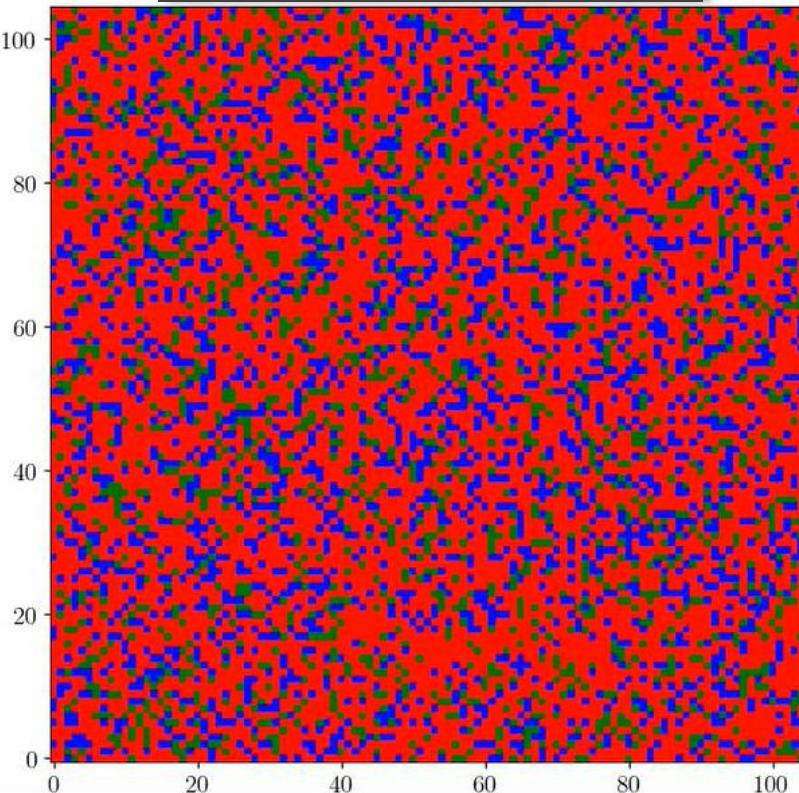
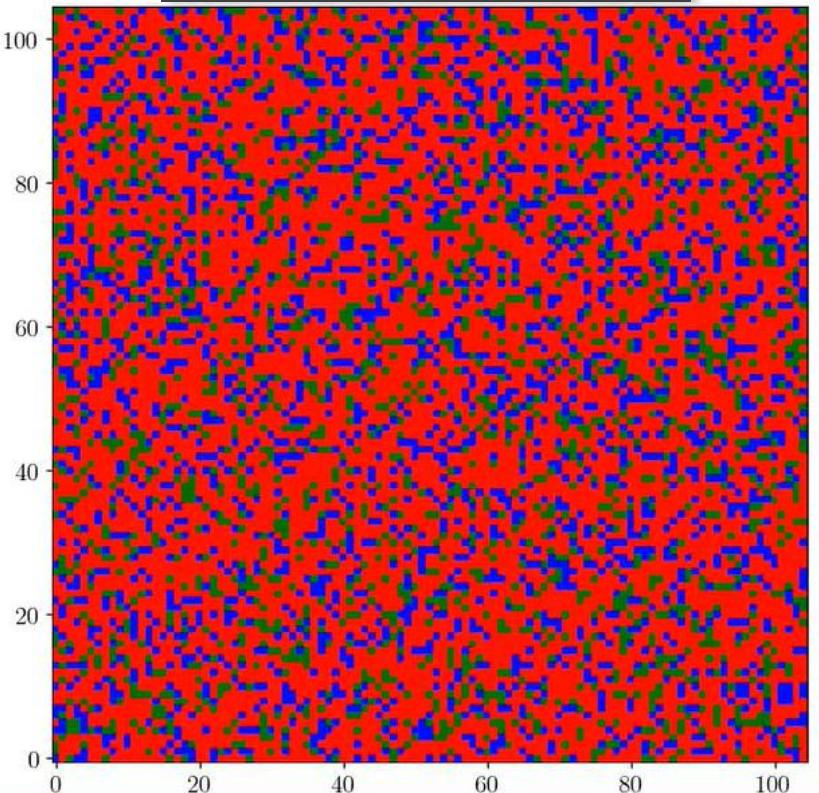




entanglement ( $\gamma=1.2$ )



entanglement ( $\gamma=\pi/2$ )

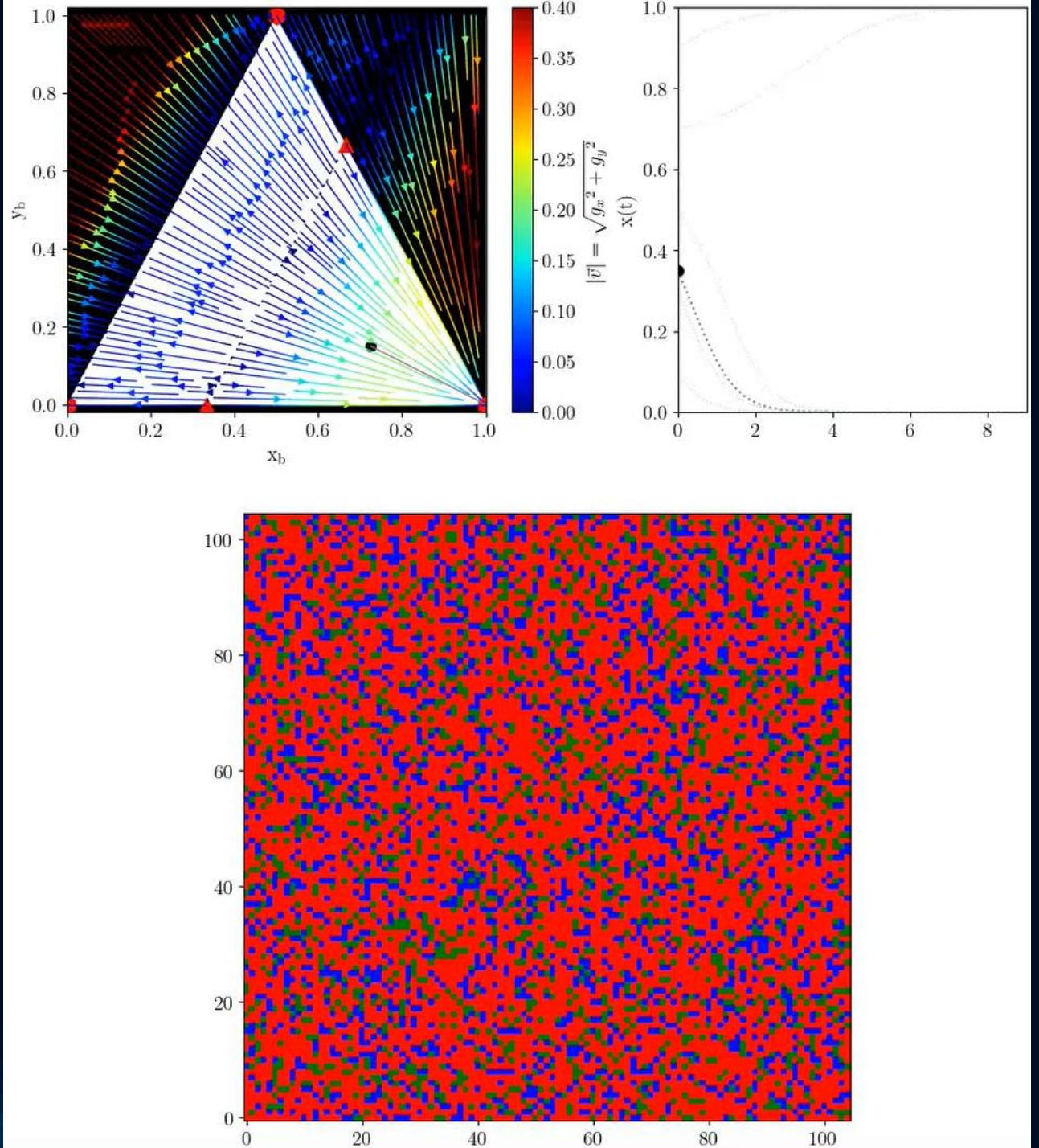


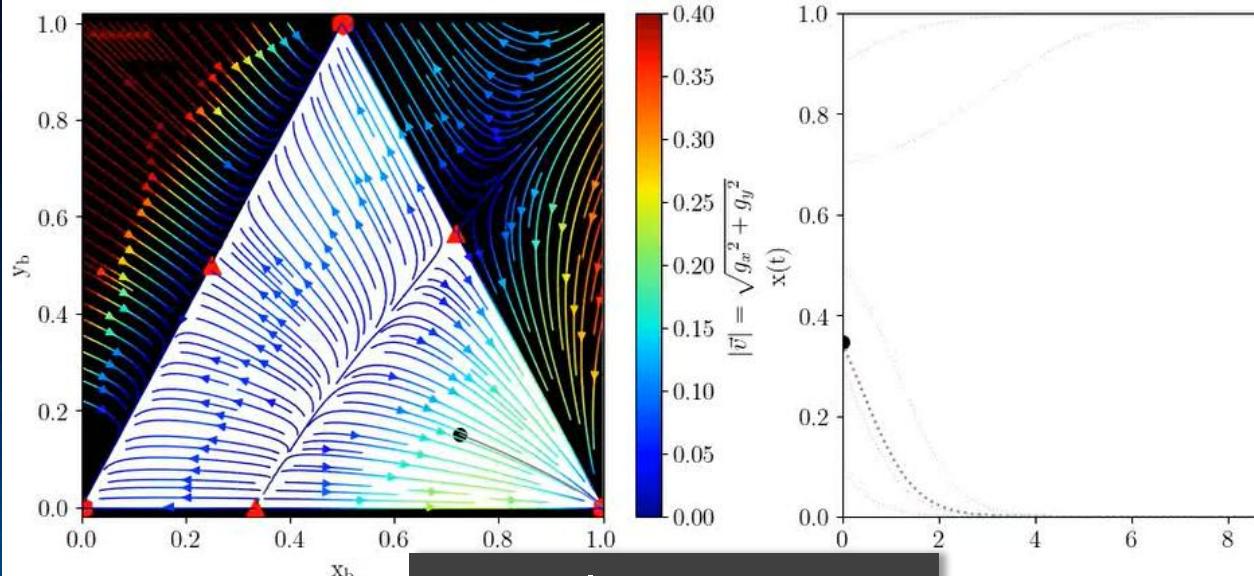
# Räumliche Quantenspiele

## Koordinationsspiel

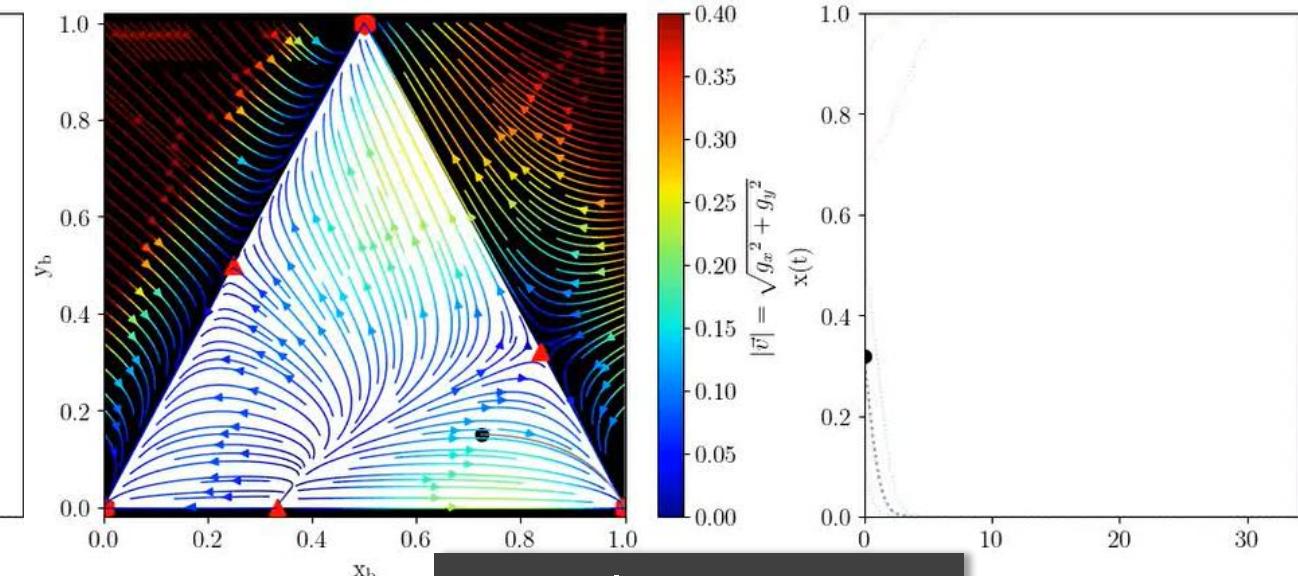
	$s_1^B$	$s_2^B$
$s_1^A$	(4, 4)	(1, 3)
$s_2^A$	(3, 1)	(3, 3)

entanglement ( $\gamma=0$ )

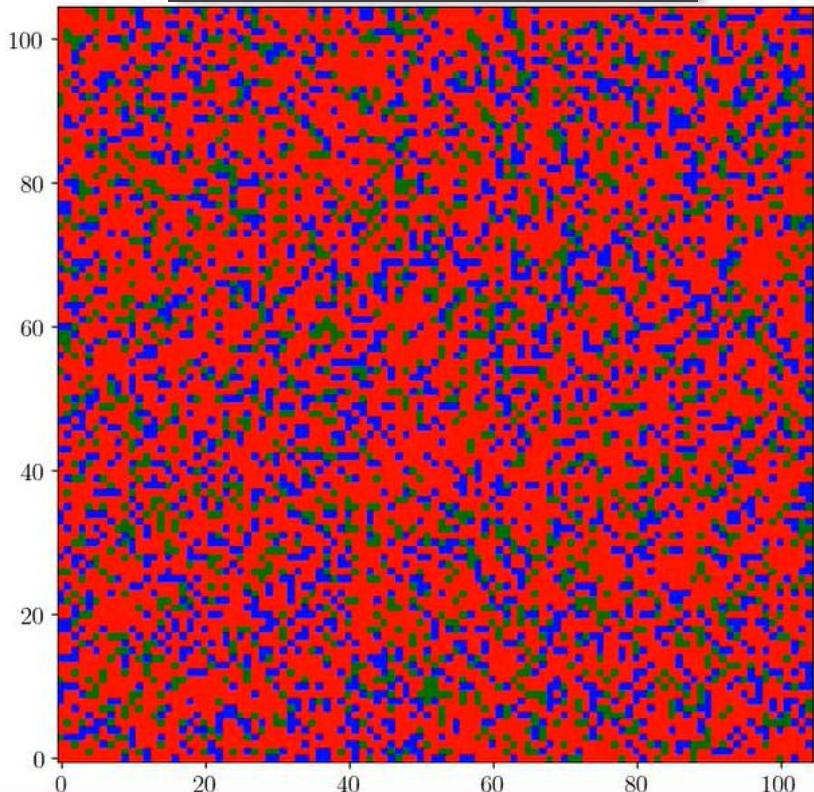
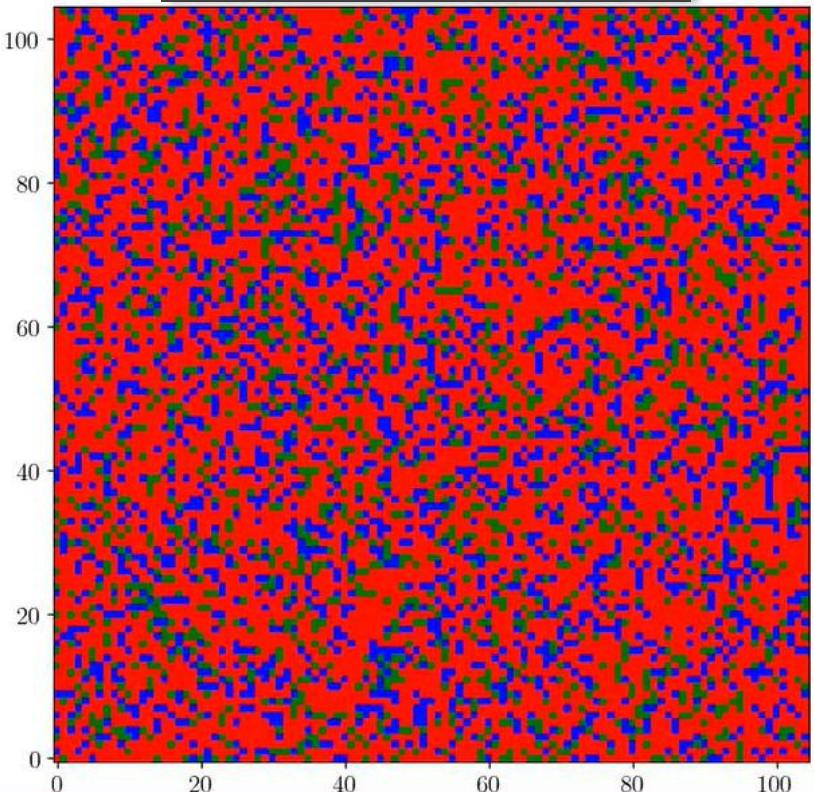


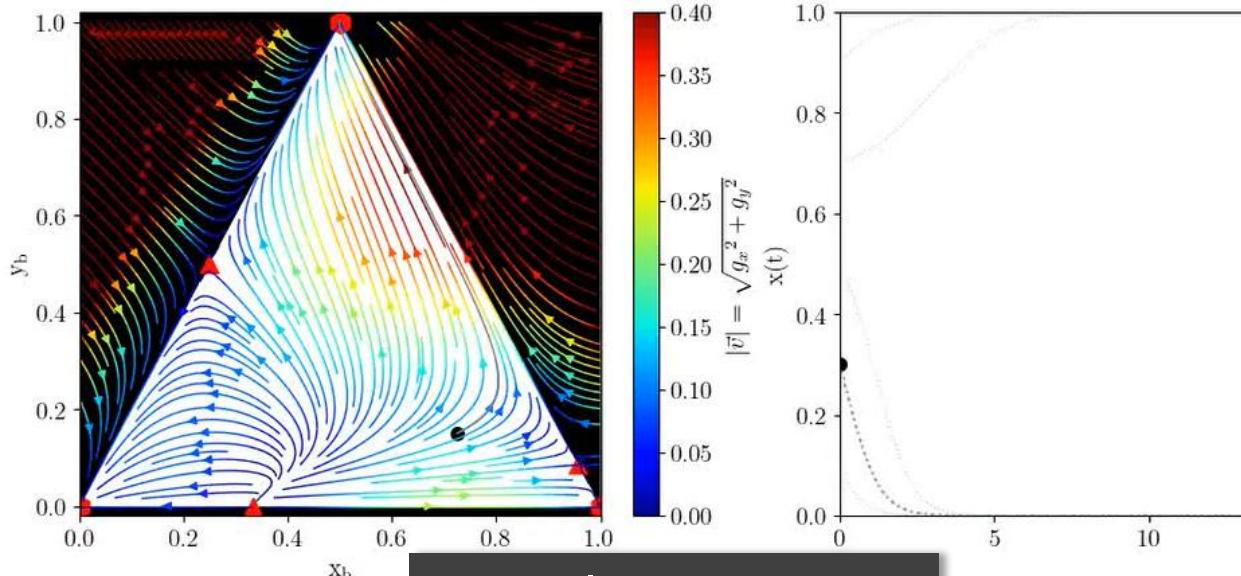


entanglement ( $\gamma=0.4$ )

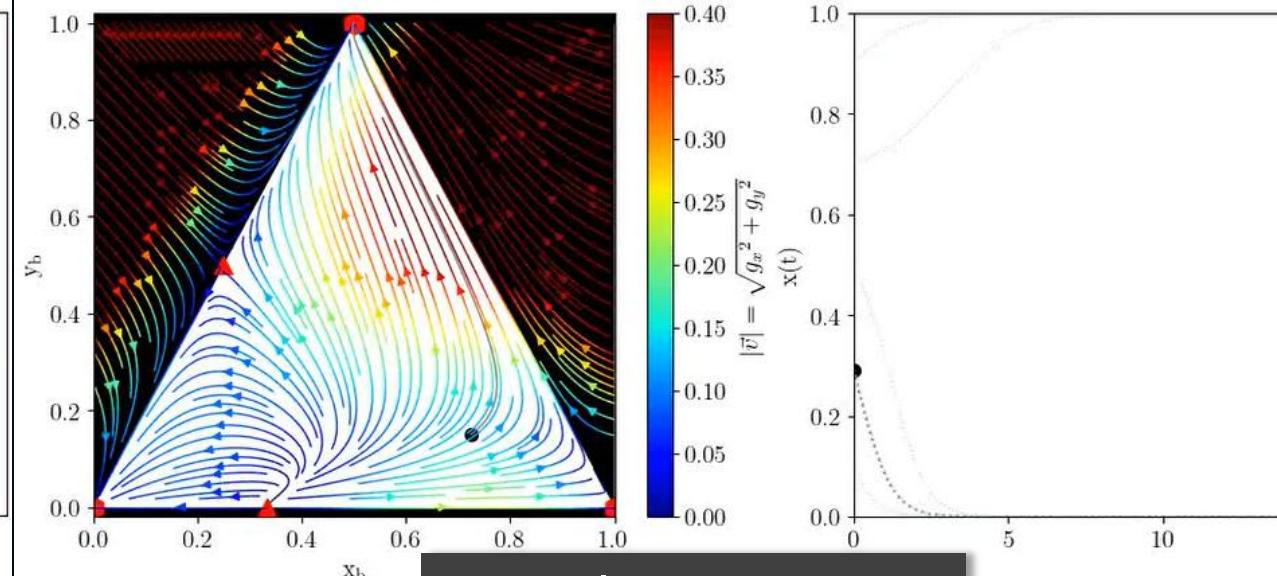


entanglement ( $\gamma=0.8$ )

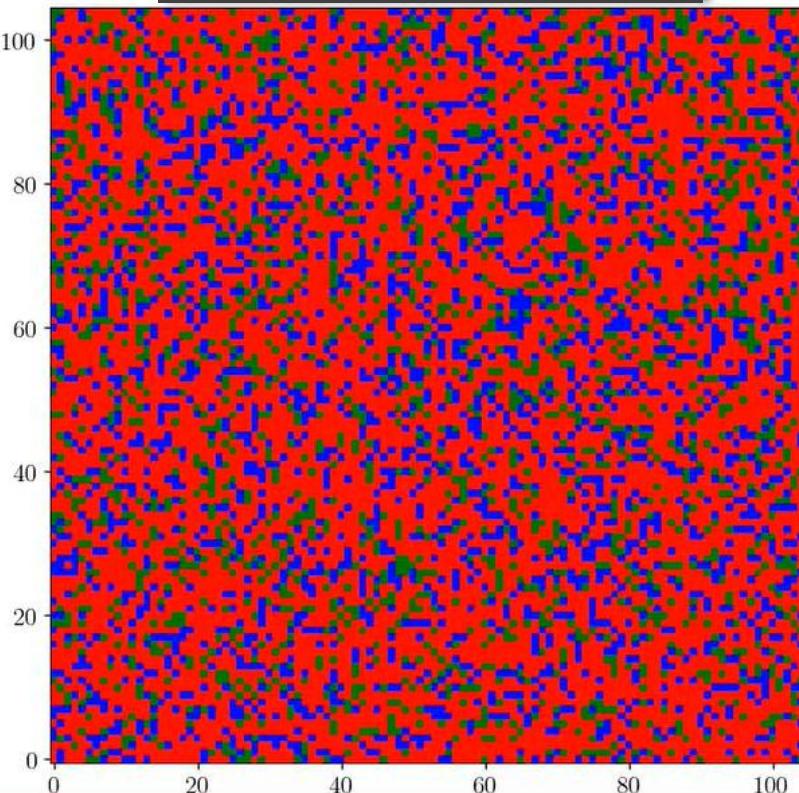
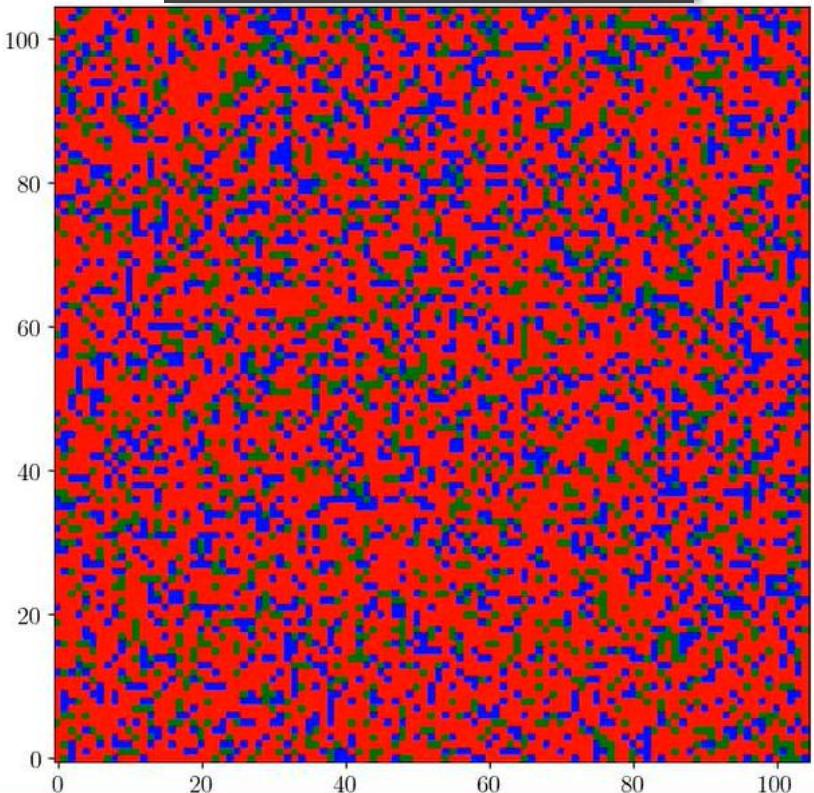




entanglement ( $\gamma=1.2$ )



entanglement ( $\gamma=\pi/2$ )



# Quantum Game Theory and Financial Crises (Anti-Coordination Class)

M. Hanauske, J. Kunz, S. Bernius und W. König "Doves and hawks in economics revisited: An evolutionary quantum game theory-based analysis of financial crises" (in *Physica A* 389 (2010) 5084 – 5102)

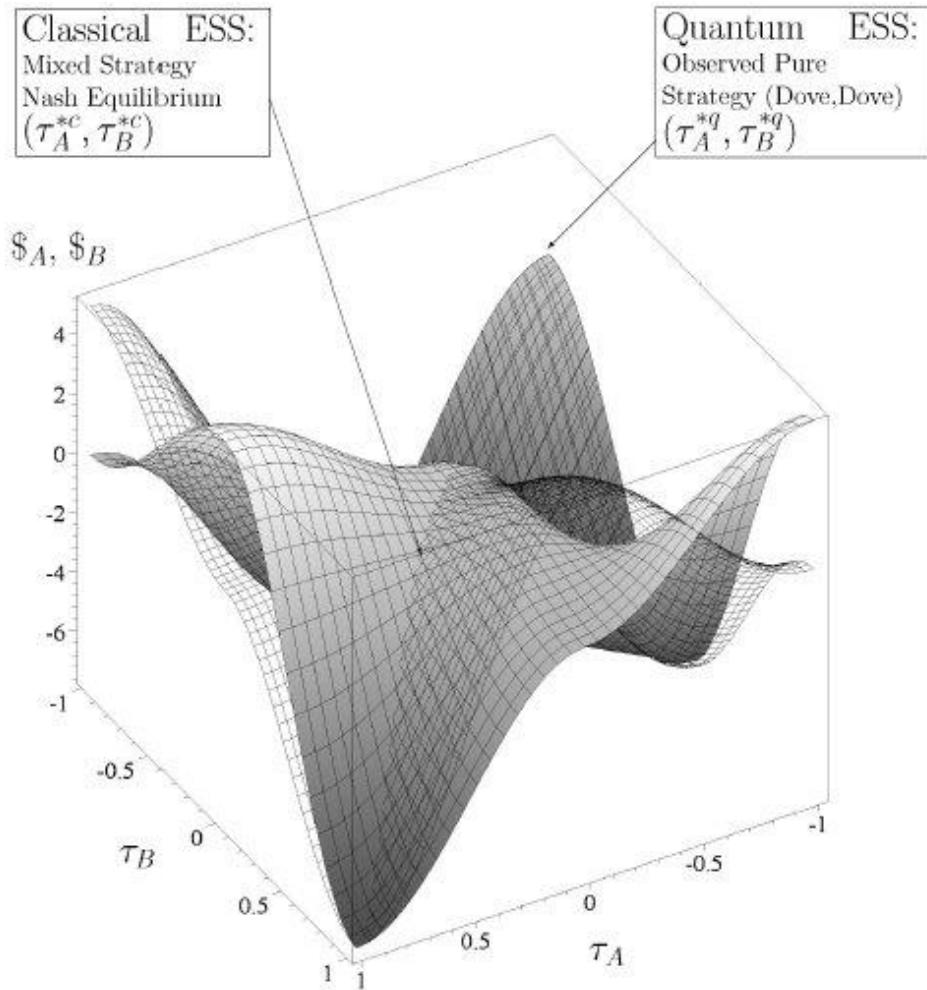


Figure 5.10.: Same description as Figure 5.7, whereas the results were calculated within a maximally entangled quantum game ( $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ) using parameter set  $P3$ .

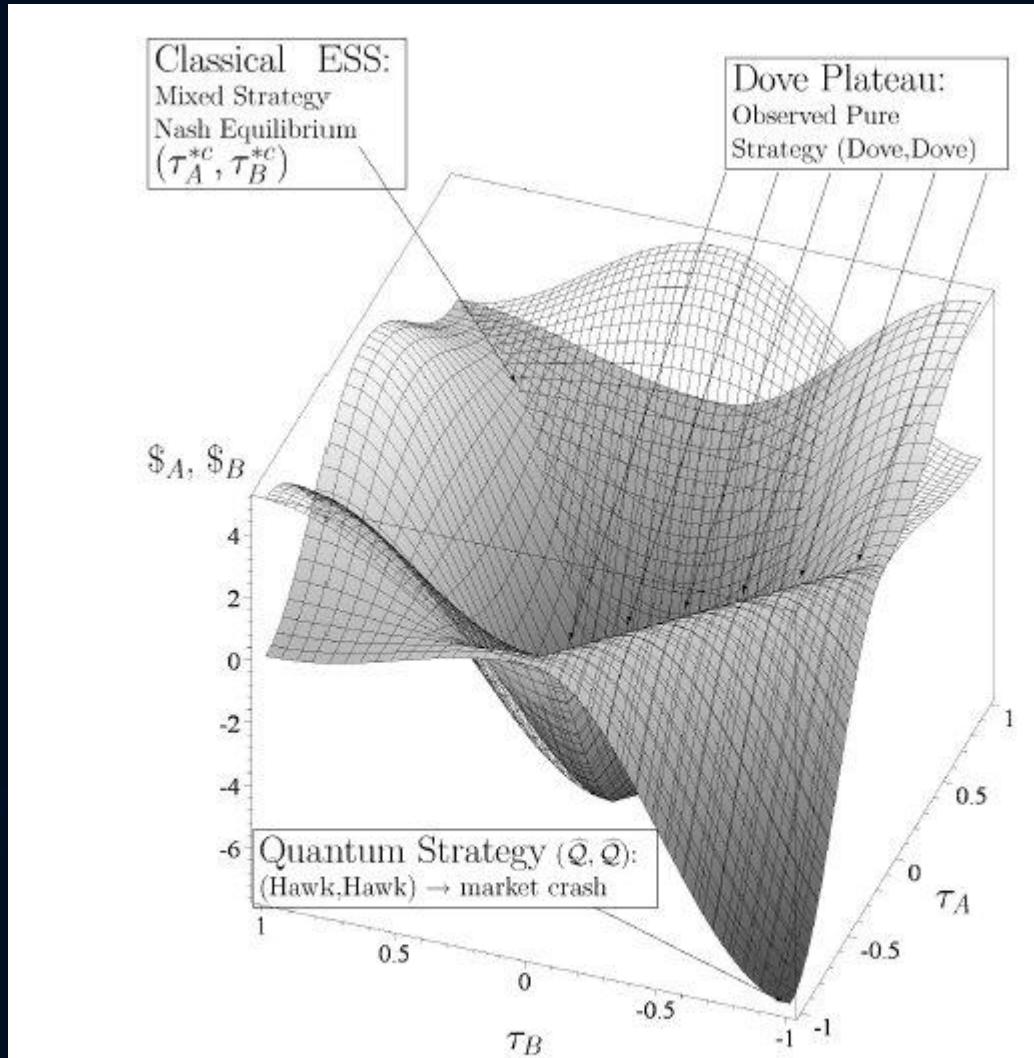


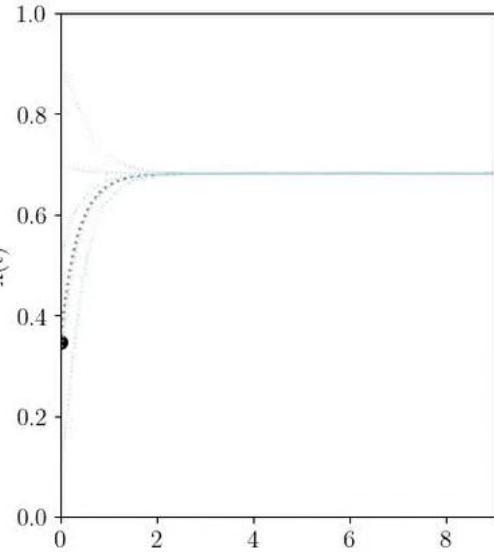
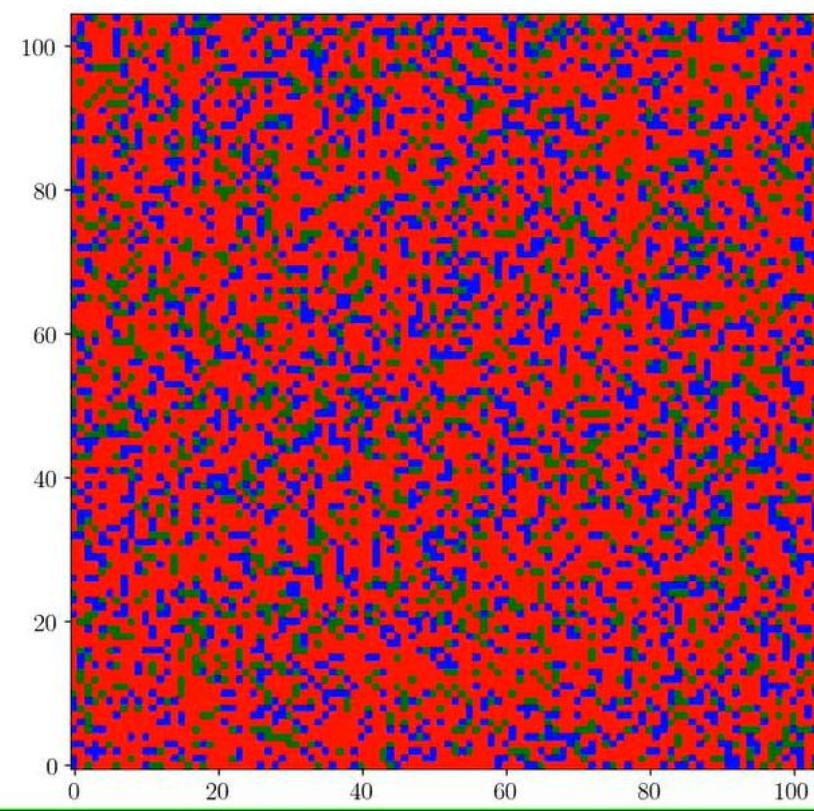
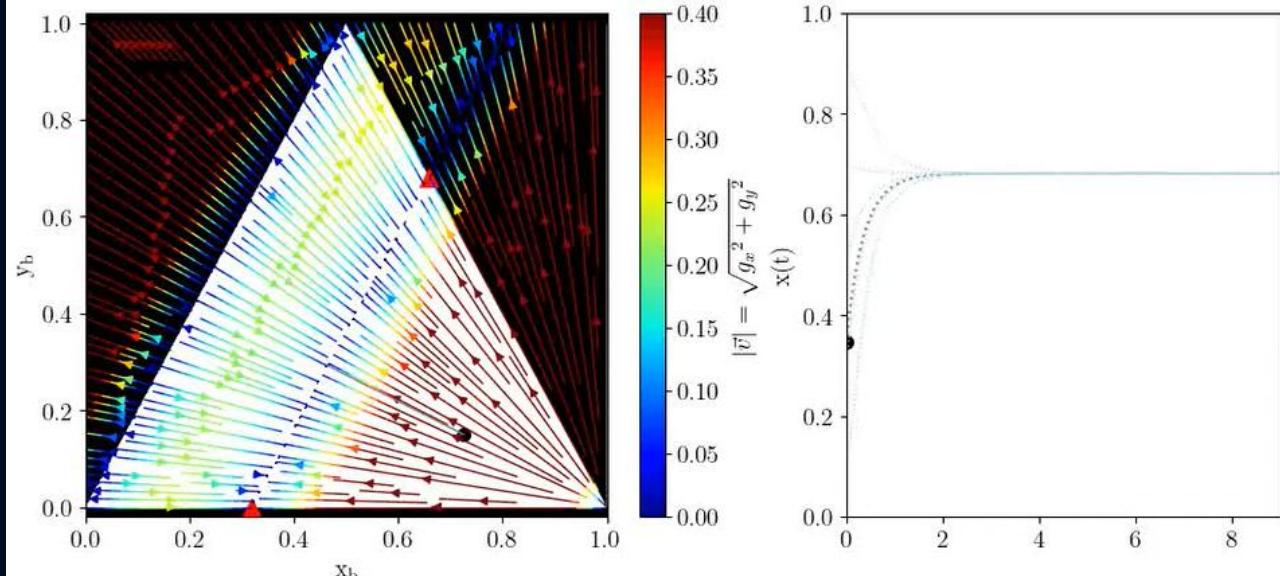
Figure 5.13.: Same description as Figure 5.12, whereas the results were calculated within a maximally entangled quantum game ( $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ) using parameter set  $P3$ .

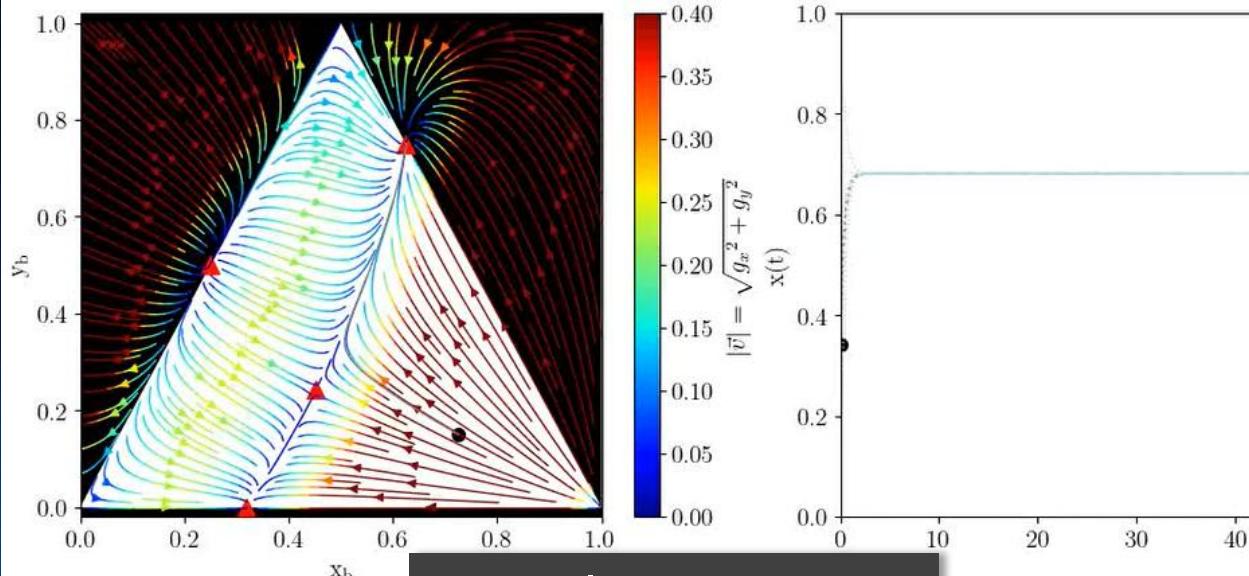
# Räumliche Quantenspiele

## Anti-Koordinationspiel

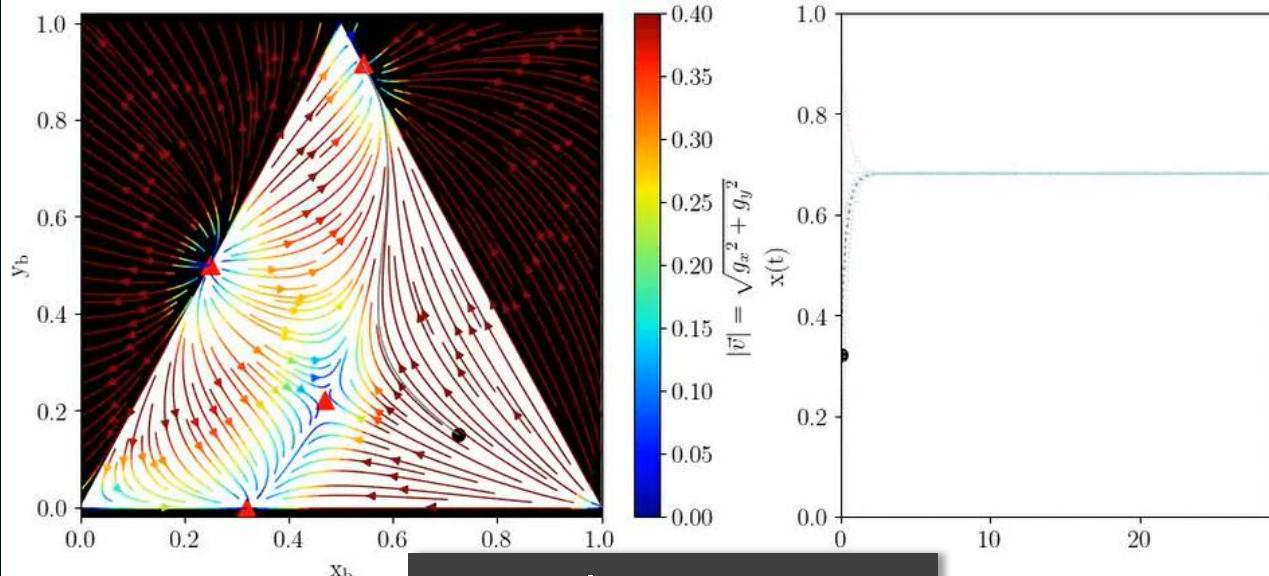
	$s_1^B$	$s_2^B$
$s_1^A$	(1.5, 1.5)	(0, 5)
$s_2^A$	(5, 0)	(-7.5, -7.5)

entanglement ( $\gamma=0$ )

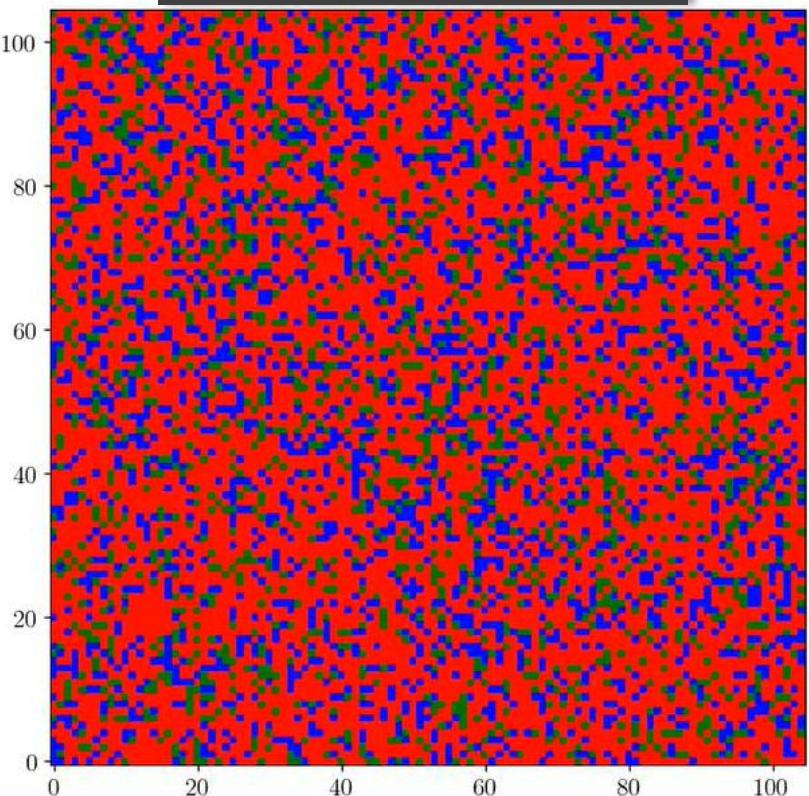
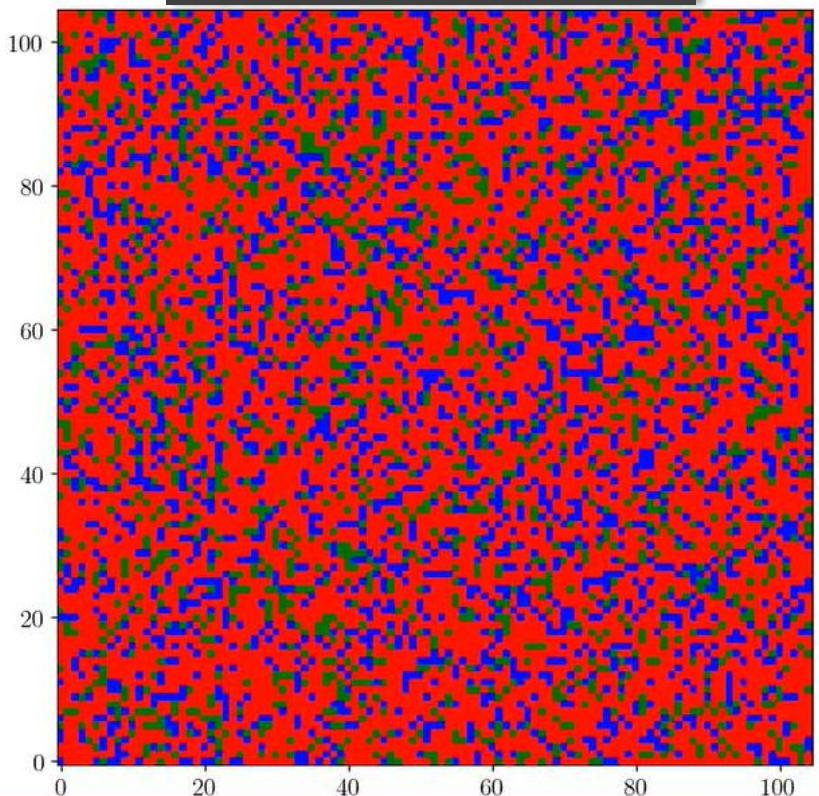


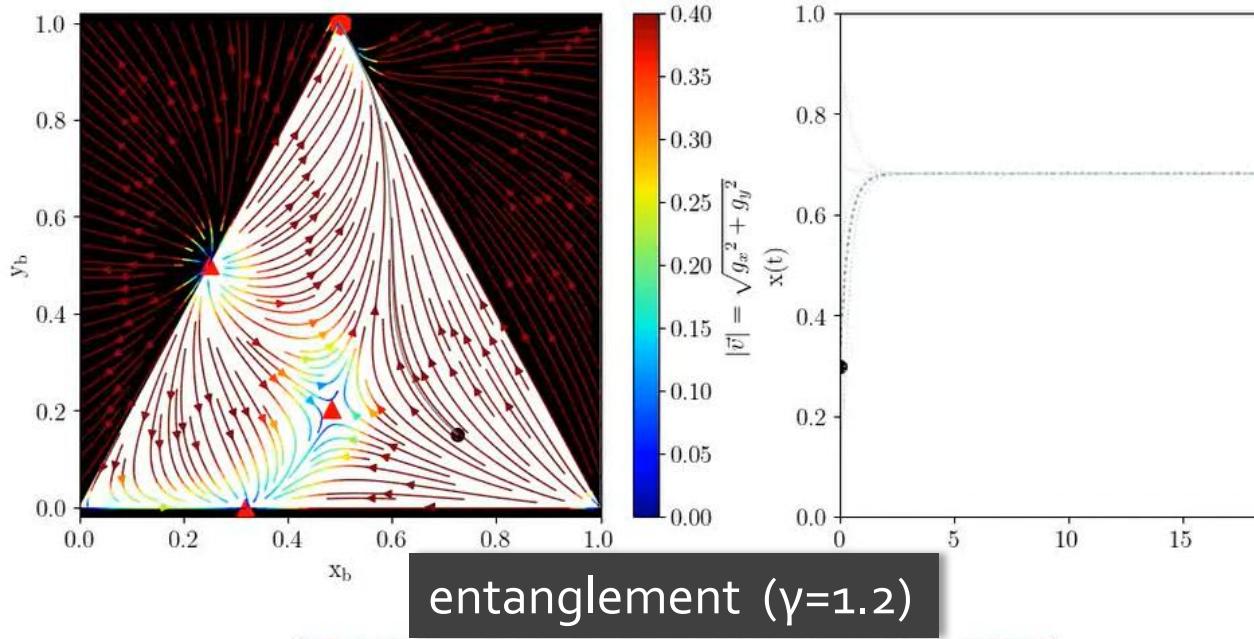


entanglement ( $\gamma=0.4$ )

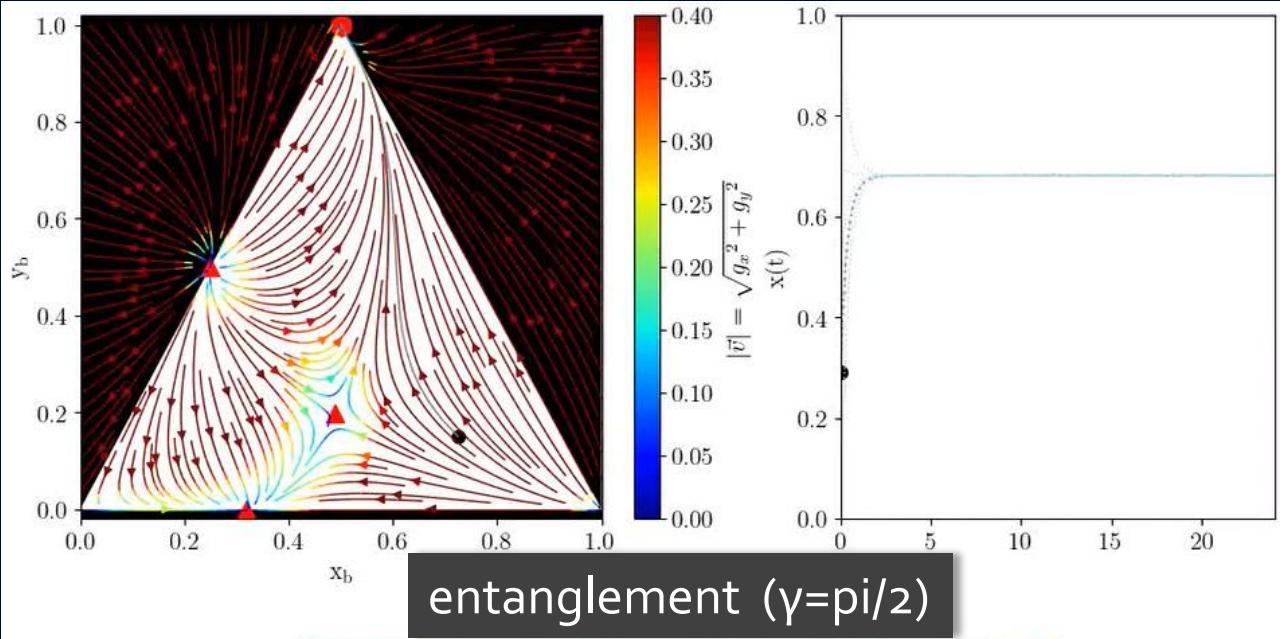


entanglement ( $\gamma=0.8$ )

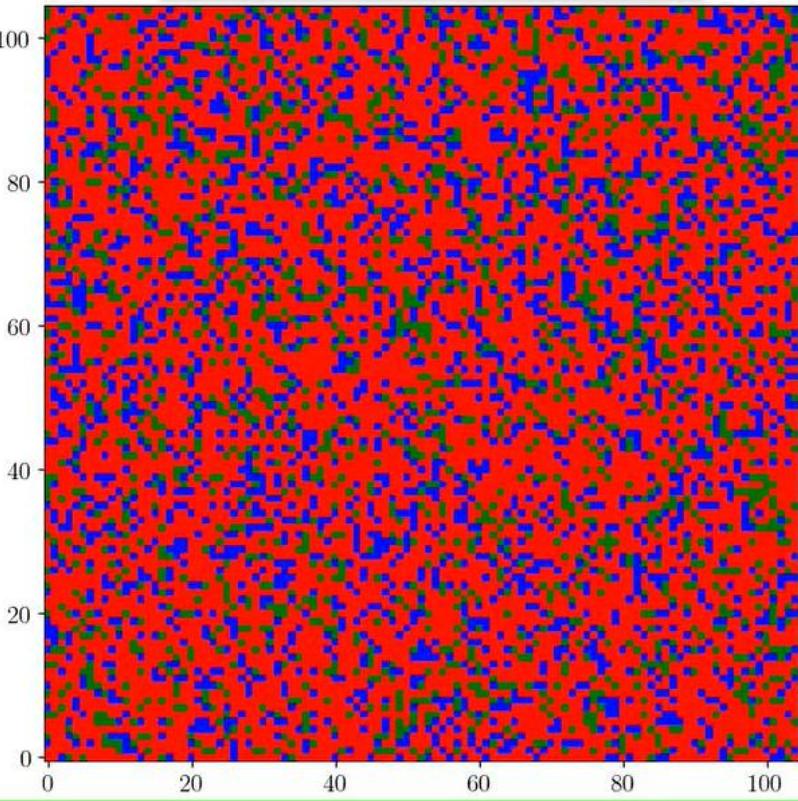
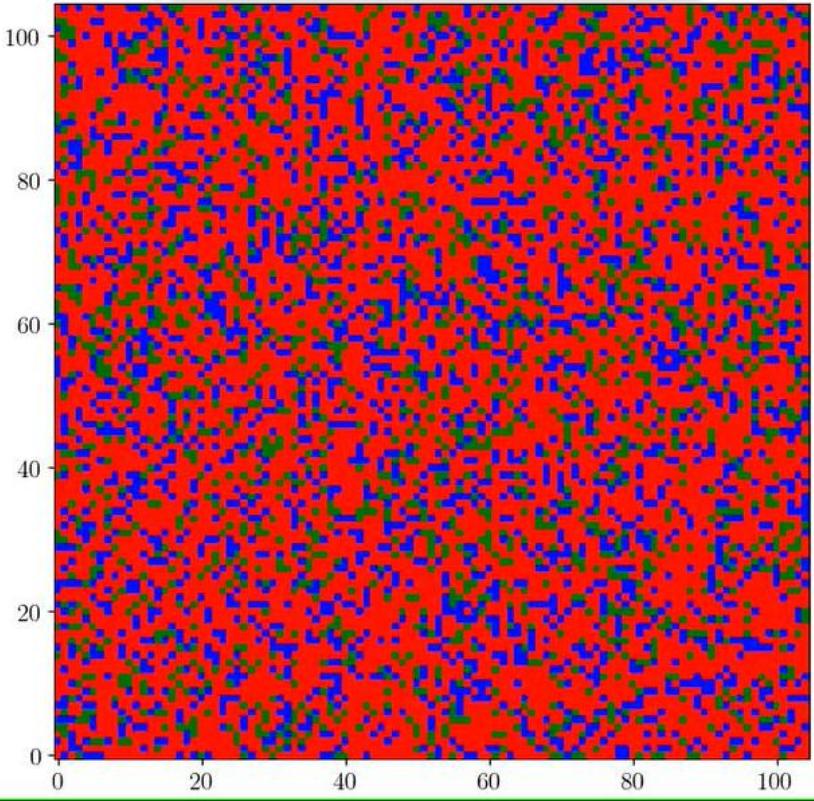




entanglement ( $\gamma=1.2$ )



entanglement ( $\gamma=\pi/2$ )





Wie ich Prof. Nash kennenlernte

# 3. Weltkongresses der spieltheoretischen Gesellschaft

## **Session 64: Semi-Plenary B1**

**Date:** July 14, 2008

**Time:** 10:45 - 12:15

**Location:** Norris McCormick

**Rational Decisions in Large Worlds**

**JEL codes:** c7

**By semi-plenary**

Presented by: [Kenneth Binmore](#), University College London

**Work on a Project to Study Three-Person Cooperative Games Using the 'Agencies Method' in a Variation Employing Attorney-Agents of an Automatic (or Robotic) Type**

**By semi-plenary**

Presented by: [John Nash](#),

Im Sommer 2008 hatte ich die Möglichkeit meine Ergebnisse zur Quantenspieltheorie auf dem 3. Weltkongresses der spieltheoretischen Gesellschaft in Chicago (USA) vorzustellen. Herr Prof. John Nash war ebenfalls auf der Konferenz und hielt einen Vortrag über seine aktuelle Forschung .



# GAMES 2008

## THIRD WORLD CONGRESS OF THE GAME THEORY SOCIETY

JULY 13 - 17, 2008, EVANSTON, ILLINOIS, USA

Photo courtesy of © [Josh McKinnon](#)

### EDITED - Games 2008 Program - Sunday, 4 PM

Founded in January 1999, the Game Theory society aims to promote the investigation, teaching, and application of game theory.

Game theory studies strategic interaction in competitive and cooperative environments. Half a century old, it has already revolutionized economics, and is spreading rapidly to a wide variety of fields.

Every four years the Society hosts its World Congress. The first was held in Bilbao, Spain in 2000. The second was held in Marseille, France in 2004. The third is to be held on the Evanston Campus of Northwestern University, in the United States.

Please send inquiries to [games2008@kellogg.northwestern.edu](mailto:games2008@kellogg.northwestern.edu)

**SCHEDULE NOW AVAILABLE**  
**Please click here**



**Kellogg**  
School of Management

#### Rhodium

Center for Game Theory  
and Economic Behavior,  
Kellogg School of  
Management

#### Platinum



#### Gold

Managerial Economics and  
Decision Sciences, Kellogg  
School of Management

#### Silver





Aufgenommen  
während des 3.  
Weltkongresses  
der  
spieltheoretischen  
Gesellschaft,  
Sommer 2008,  
Chicago, USA



Aufgenommen  
während des 3.  
Weltkongresses  
der  
spieltheoretisch  
en Gesellschaft,  
Sommer 2008,  
Chicago, USA



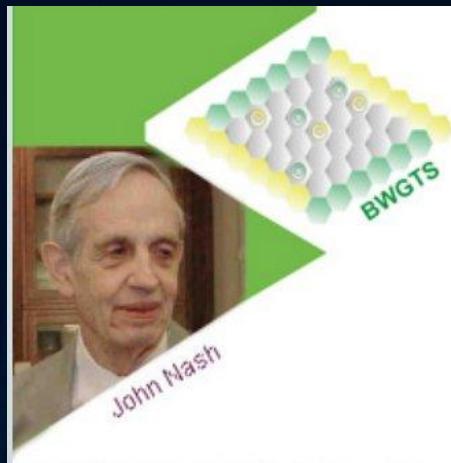
# Prof.Dr. John Nash

aufgenommen  
während des 3.  
Weltkongresses  
der  
spieltheoretische  
n Gesellschaft,  
Sommer 2008,  
Chicago, USA

Am letzten Tag der  
Konferenz sprach ich  
Herrn Nash auf seinen  
Vortrag an und wir  
unterhielten uns - unter  
anderem auch über das  
Einstein-Rosen-Podolsky  
Paradoxon.



# Das Nash-Fest in Sao Paulo (Brasilien, 2010)



## ORGANIZERS



## SECOND BRAZILIAN WORKSHOP OF THE GAME THEORY SOCIETY

in honor of JOHN NASH, on the occasion of the 60th anniversary of Nash equilibrium

[Event](#)[Program](#)[Papers](#)[Registration](#)[Travel & Venue](#)[General Information](#)[Financial Support](#) [Location](#)  
[Sponsors](#) [Committee](#) [Participants](#) [Contact us](#)

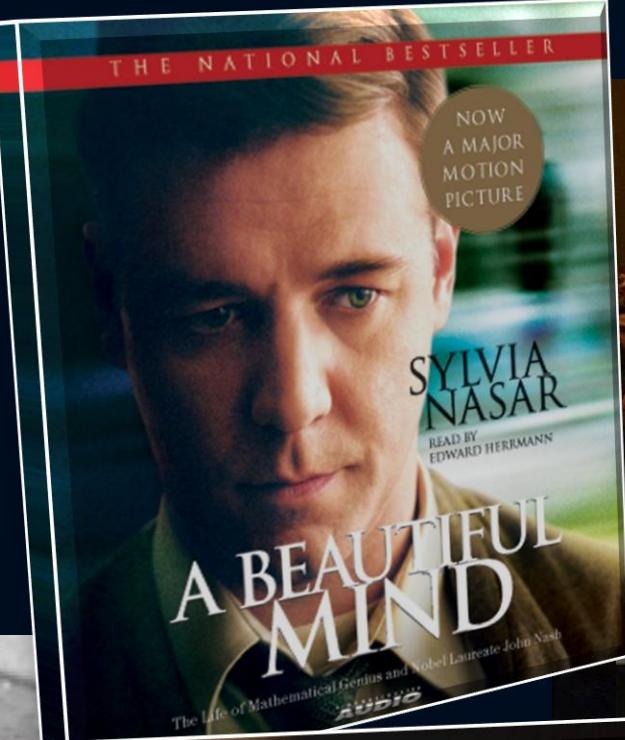
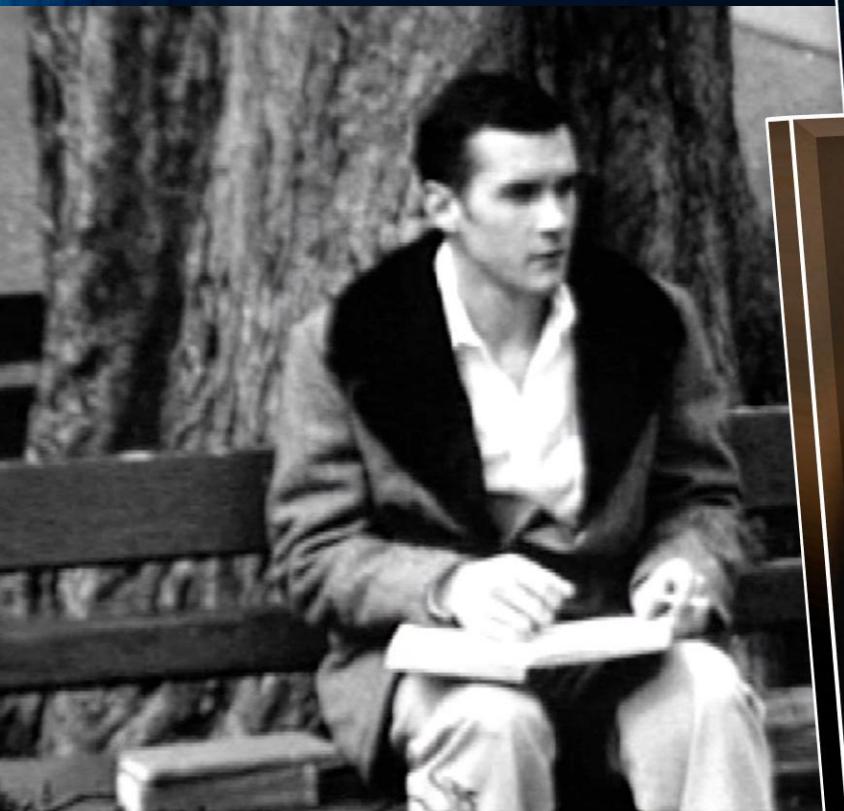
## General Information

It is a great pleasure to invite you to participate in the SECOND BRAZILIAN WORKSHOP OF THE GAME THEORY SOCIETY, the 1st São Paulo School of Advanced Sciences on Game Theory of FAPESP - The State of São Paulo Research Foundation. It will be held at the University of São Paulo, from July 29 to August 4, 2010. The event will honor JOHN NASH, on the occasion of the 60th anniversary of Nash equilibrium.

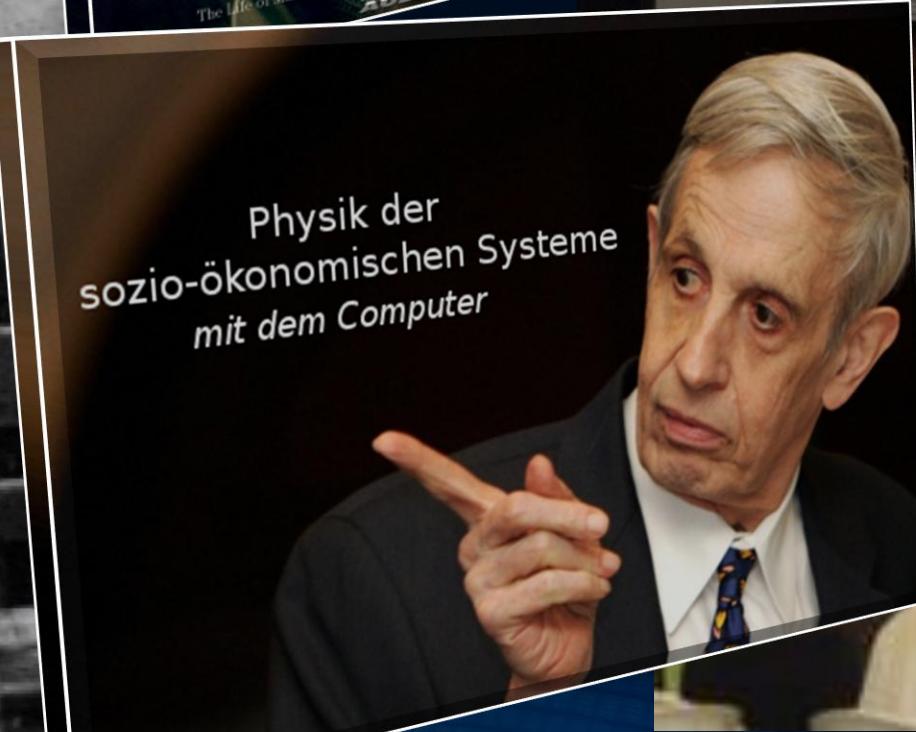
The workshop will offer the participants the opportunity to interact with some of the most productive researchers in Game Theory. The week-long event will consist of conferences, contributed papers sessions and mini-courses which will start at the introductory level and will reach the frontiers of current research. All graduate students should send a recommendation letter from their supervisors to [bwgt2010@usp.br](mailto:bwgt2010@usp.br). Videos des Workshops unter <http://>...

# John Forbes Nash

John Forbes Nash Jr.  
at Princeton university  
in 1949



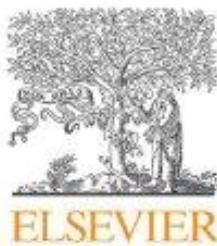
“2nd Brazilian Workshop of the Game Theory Society” in honor of John Nash (27.7. - 04.08.2010, Sao Paulo, Brazil)











Contents lists available at ScienceDirect

Physica A

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/physa](http://www.elsevier.com/locate/physa)



## Doves and hawks in economics revisited: An evolutionary quantum game theory based analysis of financial crises

Matthias Hanauske <sup>a,\*</sup>, Jennifer Kunz <sup>b</sup>, Steffen Bernius <sup>a</sup>, Wolfgang König <sup>c</sup>

<sup>a</sup> Institute of Information Systems, Goethe-University, Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt/Main, Germany

<sup>b</sup> Chair of Controlling & Auditing, Goethe-University, Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt/Main, Germany

<sup>c</sup> House of Finance, Goethe-University, Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt/Main, Germany

---

### ARTICLE INFO

---

#### Article history:

Received 14 April 2009

Received in revised form 22 April 2010

---

### ABSTRACT

The last financial and economic crisis demonstrated the dysfunctional long-term effects of aggressive behaviour in financial markets. Yet, evolutionary game theory predicts that

## Acknowledgements

M.H. would like to thank John Forbes Nash Jr. for the inspiring discussion during the Third Congress of the Game Theory Society (Games 2008). The conversation initiated and motivated the author to broaden his work to an evolutionary context. J.K. would like to thank Carsten Heineke for helpful comments especially regarding the economic interpretation.

\*\*\*\*\*

On Mon, 9 Aug 2010 hanauske@wiwi.uni-frankfurt.de wrote:

[Hide Quoted Text]

Dear Professor Nash,

I hope you enjoyed the 'Nash-Fest' at Sao Paulo and you and your family are well arrived back at home - it was very nice meeting you again.

After our short conversation at the end of the 'Games 2008'-conference I wrote an article in which I acknowledged you (see page 18). After more than one year, the article is now going to be published in 'Physica A'; I have attached the article to this E-Mail.

Materials concerning the talk I gave at the 'Second Brazilian Workshop of the Game Theory Society' can be found at:

<http://evolution.wiwi.uni-frankfurt.de/BWGT2010/>

All the best greetings from Frankfurt to you and your son John.

Sincerely Yours,  
Matthias Hanauske

\*\*\*\*\*

Dr. phil. nat. Matthias Hanauske  
Institut für Wirtschaftsinformatik  
Goethe-Universität Frankfurt am Main  
Grüneburgplatz 1

**Date:** Mon, 9 Aug 2010 18:02:29 -0400 [08/10/2010 12:02:29 AM CEST]

**From:** John F. Nash <xkjfnj@Princeton.EDU> 

**To:** hanauske@wiwi.uni-frankfurt.de 

**Subject:** Re: Article in which I acknowledged you



1 unnamed 2.04 KB



This message was written in a character set (X-UNKNOWN) other than your own.

If it is not displayed correctly, click here to open it in a new window.

Dear Dr. Hanauske,

I know nothing, personally, about "Quantum Game Theory".

For example "quantum computing" has been promising (if it could actually be developed to work in a practical sense) truly fabulous accelerations of the speed of computations.

(To me it seems very paradoxical that we would move from the constraint of "Heisenberg uncertainty" to a great ENHANCEMENT of the ability of machines to find the truth through calculations.)

Until it is materially achieved I will probably remain naturally suspicious of the possibility of "magic benefits through quantization".

But, notwithstanding all uncertainties (and the Uncertainty Principle itself!) I want to thank you sincerely for the kind and well-toned acknowledgment that you gave in your recent publication.

Yours Truly,

John F. Nash, Jr.

#####
#####

## Second Brazilian Workshop of the Game Theory Society

Ich lernte Herr Prof. John Nash im Jahre 2008 auf dem 'Third World Congress of the Game Theory Society' an der Northwestern University in der Nähe von Chicago das erste Mal kennen (siehe Bilder im oberen Bereich des rechten Panels) und unterhielt mich auch persönlich mit ihm (über evolutionäre Spieltheorie und das Einstein-Rosen-Podolski Paradoxon). Im Jahre 2010 hatte ich dann das Glück ihn und seine Familie auf einer weiteren Konferenz zu treffen. Die beiden unteren Videos entstanden während des Workshops 'Second Brazilian Workshop of the Game Theory Society', welcher im Jahre 2010 an der Universität Sao Paulo in Brasilien stattfand. Der Workshop wurde anlässlich des 60ten Jubiläums des Nash-Gleichgewichtes veranstaltet und neben Prof. Nash und seiner Familie waren viele berühmte Spieltheoretiker anwesend. Das linke Video entstand am ersten Tag der Vorlesung als Prof. Nash das erste Mal in den Vortragssaal kam und das rechte Video zeigt eine Fragerunde an Prof. Nash, die von Prof. Marilda Sotomayor organisiert wurde.



Im unteren Bereich des rechten Panels finden Sie Bilder, die während eines Barbecue-Essens entstanden sind. Unter folgendem Link finden Sie das gesamte [Programm des Workshops](#).

Da ich das erste Mal in Brasilien war, schaute ich mir das Land auch ein wenig an und die folgenden Bilder wurden von mir in Rio und dem Pantanal aufgenommen.



## Games 2008 - Third World Congress of the Game Theory Society

**Kellogg School of Management at Northwestern University (near Chicago)**  
**from July 13 to July 17, 2008**



## Second Brazilian Workshop of the Game Theory Society

**In honor of John Nash, on the occasion of the 60th anniversary of Nash equilibrium**

**University of Sao Paulo, from July 29 to August 4, 2010**

