

Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

*JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
12.07.2024*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

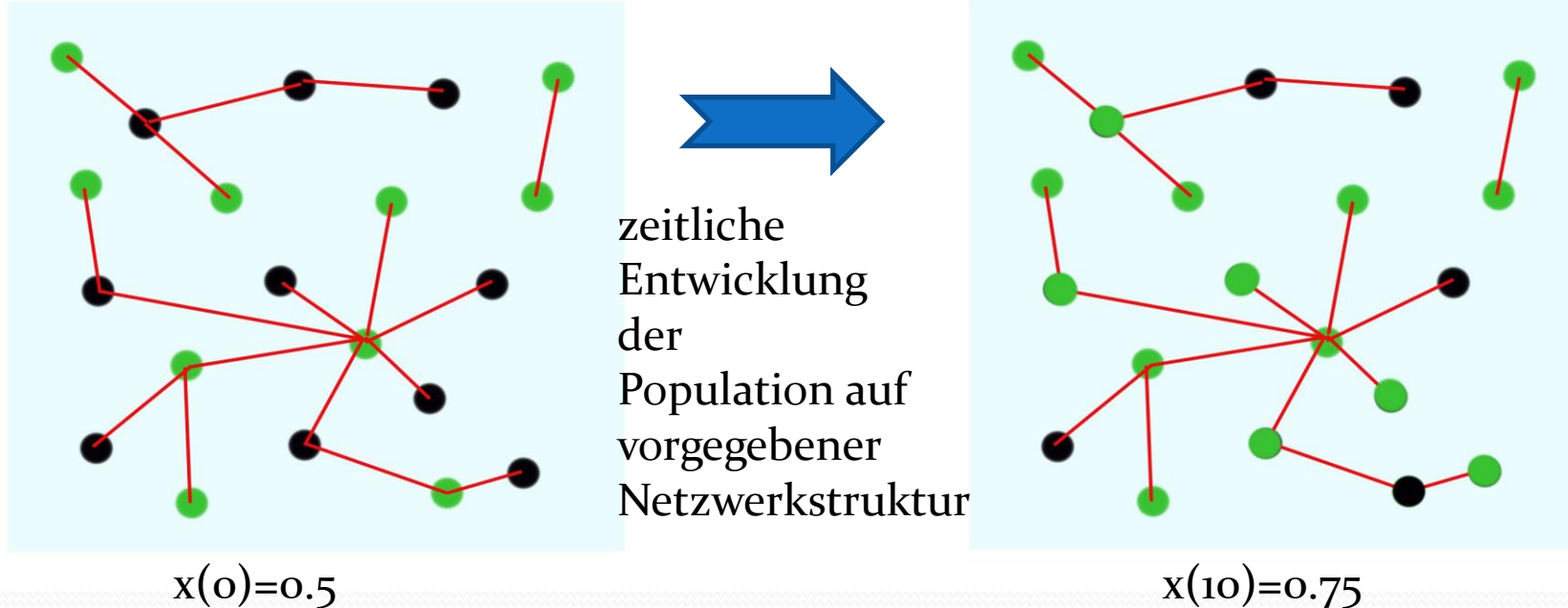
11. Vorlesung

Plan für die heutige Vorlesung

- Kurze Wiederholung
 - Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken
 - Spiele auf einem räumlichen Netzwerk (Spatial Games)
 - Dominante (2 x 2)-Spiele auf einem räumlichen Gitter
 - Räumliche Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele
 - Spiele auf vollständig verbundenen Netzwerken
 - Spiele auf zufälligen, „kleine Welt“ und skalenfreien Netzwerken
- Einführung in die Quanten Spieltheorie
- Vorlesungsprojekte 2024

Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

Viele in der Realität vorkommende evolutionäre Spiele werden auf einer definierten Netzwerkstruktur (Topologie) gespielt. Die Spieler der betrachteten Population sind hierbei nicht gleichwertig, sondern wählen als Spielpartner nur mit ihnen durch das Netzwerk verlinkte (verbundene) Partner aus.



Mögliche Strategien: (grün, schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
 $x(t)$: Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.
Die roten Verbindungslinien beschreiben die möglichen Spielpartner des Spielers

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Sommersemester 2024)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 21.05.2024

Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre räumliche Spiele (spatial games)

Beispiel: Dominante Spiele

Einführung

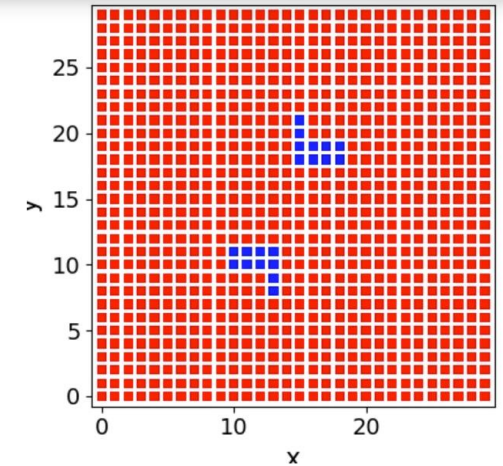
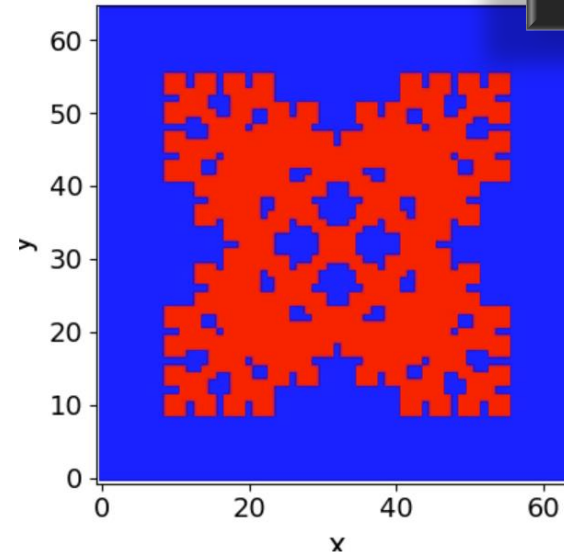
Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II der Vorlesung) mit der evolutionären Spieltheorie (siehe Teil I der Vorlesung) stellt ein vielversprechendes mathematisches Modell dar, welches sowohl der interdisziplinären Grundlagenforschung, als auch der angewandten, empirischen Netzwerkforschung dienen kann. In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise einer Miteinbeziehung komplexer Netzwerktopologien in die evolutionäre Spieltheorie beschrieben. Die dann auf einem solchen komplexen Netzwerk ablaufenden Entscheidungsprozesse können in den meisten Fällen lediglich mittels numerischer, Agenten-basierter Computersimulationen veranschaulicht werden.

In diesem Jupyter Notebook werden die Spieler einer endlich großen Population auf einem räumlichen Gitter angeordnet, wobei jeder Spieler nur mit seinen nächsten Nachbarn spielen kann (*Moore Nachbarschaft*). Das zugrundeliegende Netzwerk der Spielerknoten besitzt somit eine einfache reguläre Struktur und im betrachteten 2-dimensionalen Fall spielt jeder Spieler pro Spielperiode mit acht Spielern (Knotengrad $k_i = 8 \forall i \in \mathcal{I}$). Wir beschränken uns im folgenden auf symmetrische (2x2)-Spiele und benutzen den Ansatz eines allgemeinen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels mit symmetrischer Auszahlungsmatrix und Parametern a, b, c und d. Die Spielerknoten spielen pro Iteration mit jedem ihrer Nachbarn und am Ende von jedem Zeitschritt vergleichen die Spieler ihren summierten Gewinn/Verlust mit den Nachbarspielern ihres Umfeldes. Ist die Auszahlung eines Spielers höher als der eigene Auszahlungswert, so ändern der Spieler in der nächsten Spielperiode seine Strategie; ist sein eigener Wert der höchste, so bleibt er auch in der nächsten Iteration bei seiner gespielten Strategie.

Im Folgenden betrachten wir ein Beispiel, das an das 9. Kapitel des Buches [Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life, 2006](#) angelehnt ist und ein Gefangenendilemma auf einem räumlichen 2-dimensionalen Gitter beschreibt. In Abhängigkeit der Stärke der Dominanz der Strategie und der Anfangskonfiguration der Strategiewahl der Spieler sind unterschiedliche zeitlichen Entwicklungen der Population möglich. Wir nehmen im Folgenden ein dominantes, symmetrisches 2x2-Spiel mit folgender Auszahlungsmatrix an:

$$\hat{\$} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0.01 \end{pmatrix}$$

Jupyter Notebook:
Evolutionäre räumliche Spiele
Klasse der dominanten Spiele



Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Sommersemester 2024)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 21.05.2024

Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre räumliche Spiele (spatial games)

Beispiel: Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele

Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II der Vorlesung) mit der evolutionären Spieltheorie (siehe Teil I der Vorlesung) stellt ein vielversprechendes mathematisches Modell dar, welches sowohl der interdisziplinären Grundlagenforschung, als auch der angewandten, empirischen Netzwerkforschung dienen kann. In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise einer Miteinbeziehung komplexer Netzwerktopologien in die evolutionäre Spieltheorie beschrieben. Die dann auf einem solchen komplexen Netzwerk ablaufenden Entscheidungsprozesse können in den meisten Fällen lediglich mittels numerischer, Agenten-basierter Computersimulationen veranschaulicht werden.

In diesem Jupyter Notebook werden die Spieler einer endlich großen Population auf einem räumlichen Gitter angeordnet, wobei jeder Spieler nur mit seinen nächsten Nachbarn spielen kann (*Moore Nachbarschaft*). Das zugrundeliegende Netzwerk der Spielerknoten besitzt somit eine einfache reguläre Struktur und im betrachteten 2-dimensionalen Fall spielt jeder Spieler pro Spielperiode mit acht Spielern ($k_i = 8 \forall i \in \mathcal{I}$). Wir beschränken uns im folgenden auf symmetrische (2x2)-Spiele und benutzen den Ansatz eines allgemeinen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels mit symmetrischer Auszahlungsmatrix und Parametern a , b , c und d . Die Spielerknoten spielen pro Iteration mit jedem ihrer Nachbarn und am Ende von jedem Zeitschritt vergleichen die Spieler ihren summierten Gewinn/Verlust mit den Nachbarspielern ihres Umfeldes. Ist die Auszahlung eines Spielers höher als der eigene Auszahlungswert, so ändern der Spieler in der nächsten Spielperiode seine Strategie; ist sein eigener Wert der höchste, so bleibt er auch in der nächsten Iteration bei seiner gespielten Strategie.

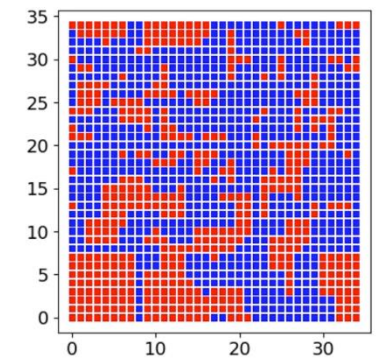
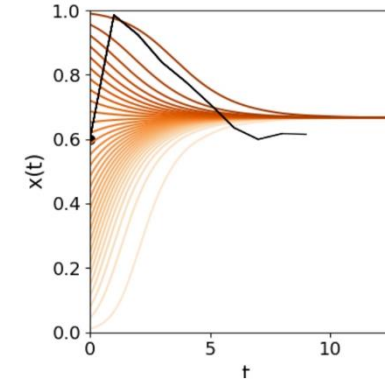
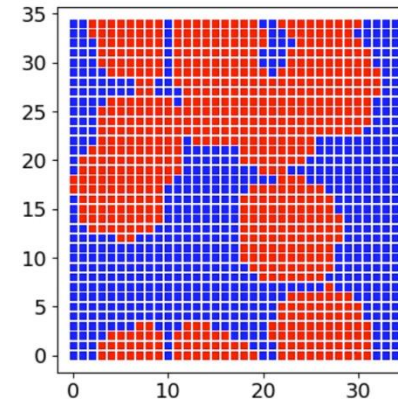
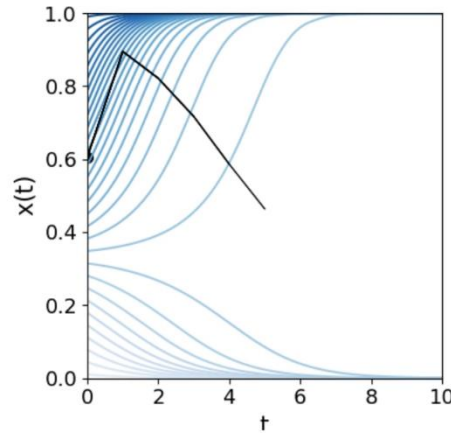
Im Folgenden betrachten wir Beispiele von Koordinations- und Anti-Koordinationsspielen und vergleichen die zeitliche Entwicklung der räumlichen Spiele mit den Ergebnissen der klassischen evolutionären Spieltheorie. In der klassischen evolutionären Spieltheorie (siehe Teil I der Vorlesung) betrachtete man eine unendlich große Population von Spielern, wobei jeder Spieler im Prinzip mit jedem anderen Spieler in Kontakt treten und das Spiel spielen konnte. Mittels der Replikatordynamik konnten wir dann das zeitliche Verhalten des Populationsvektors $x(t)$ (Anteil der Spieler, die die Strategie $s_1 \hat{=} \text{Blau}$ spielen) berechnen.

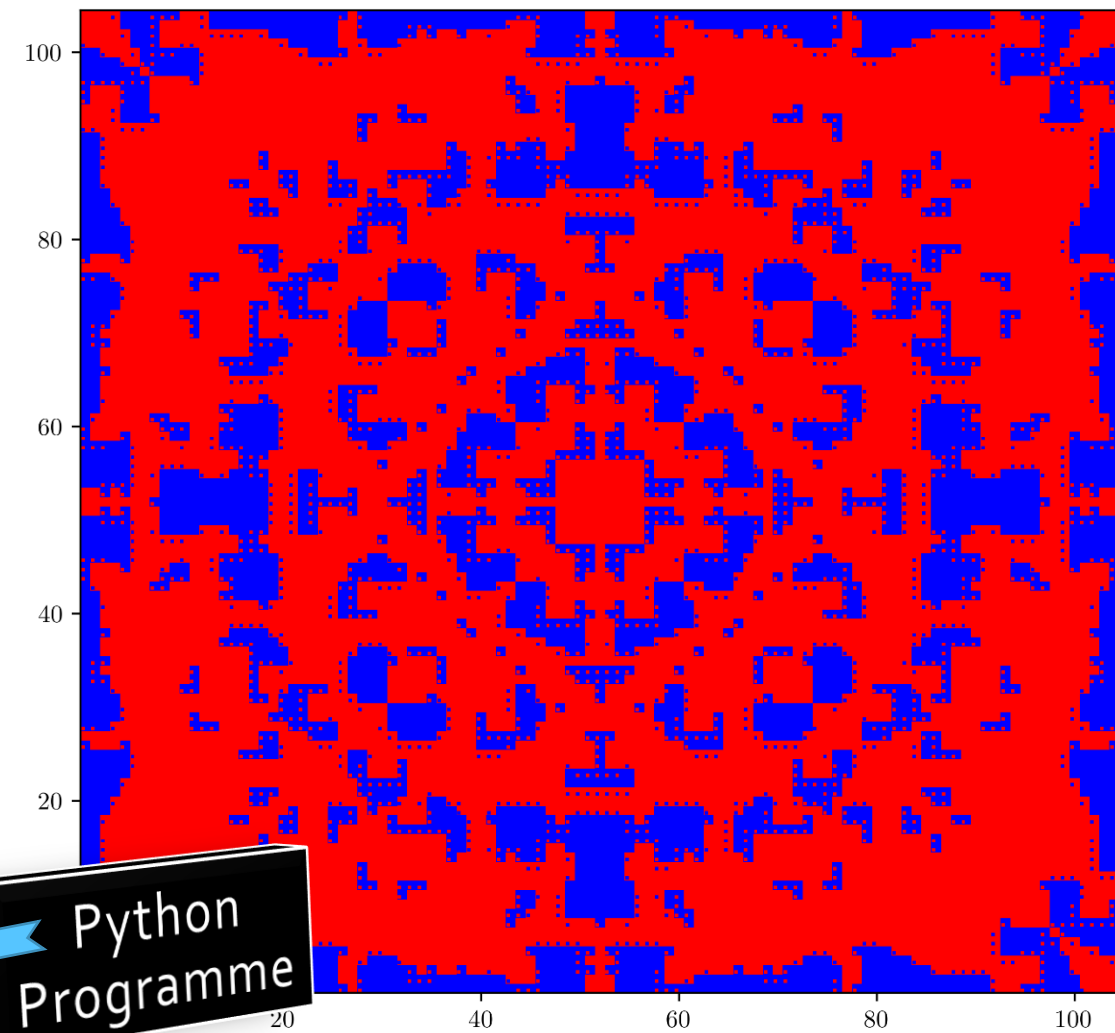
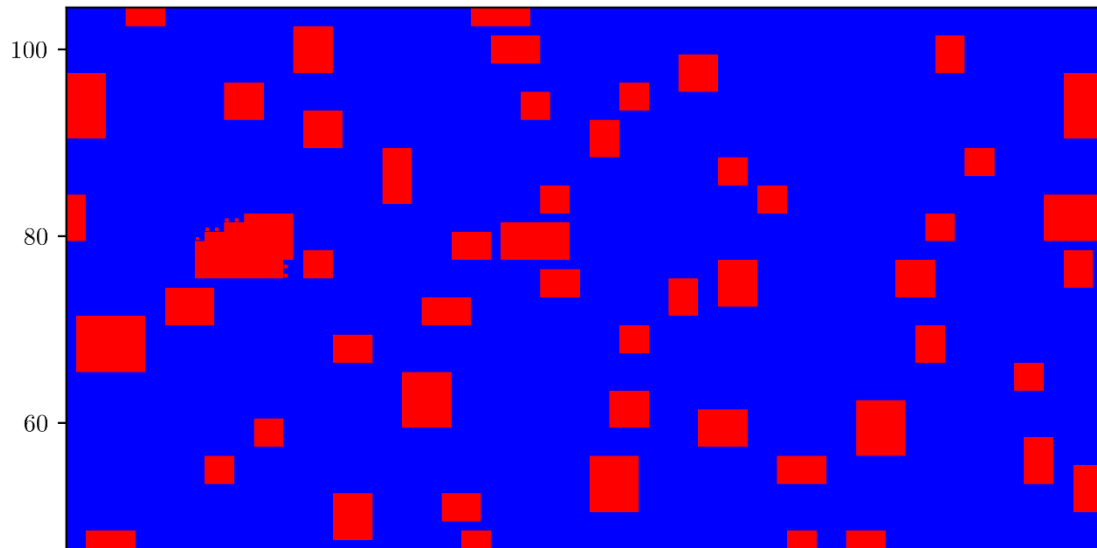
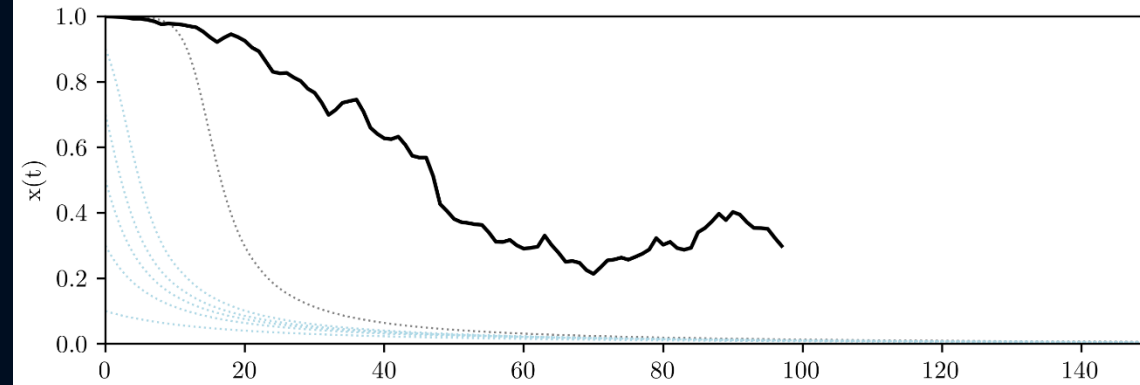
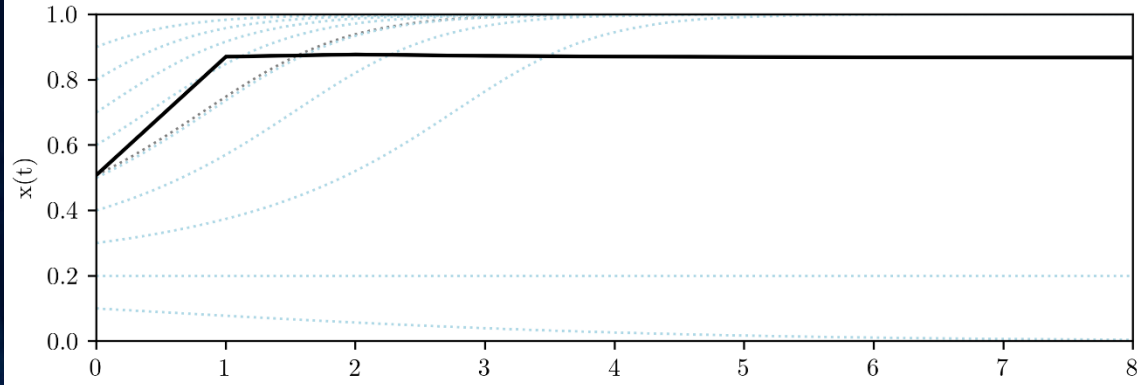
Wir nehmen im Folgenden ein allgemeines symmetrisches (2x2)-Spiel mit folgender Auszahlungsmatrix an:

$$\hat{\$} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Die Klasse der Koordinationsspiele ($a > c$ und $b < d$)

Jupyter Notebook: Evolutionäre räumliche Spiele Klasse der Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele





Weiterführende Links

[Folien der 9. Vorlesung](#)

[Vorlesungsaufzeichnung der 9. Vorlesung: WS 2022/23 bzw. WS 2021/22](#)

[View Jupyter Notebook: Evolutionäre dominante räumliche Spiele](#)

[Download Jupyter Notebook: Evolutionäre dominante räumliche Spiele](#)

[View Jupyter Notebook: Evolutionäre räumliche Spiele: Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele](#)

[Download Jupyter Notebook: Evolutionäre räumliche Spiele: Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele](#)

[Download Python Programm: Räumliches Spiel \(kleines Gitter mit Auszahlungen\)](#)

[Download Python Programm: Räumliches Spiel \(mittleres Gitter, Walker-Anfangskonfiguration\)](#)

[Download Python Programm: Räumliches Spiel \(großes Gitter\)](#)

Python Programme

Jupyter Notebook: Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen komplexen Netzwerken

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
Frankfurt am Main 31.12.2020

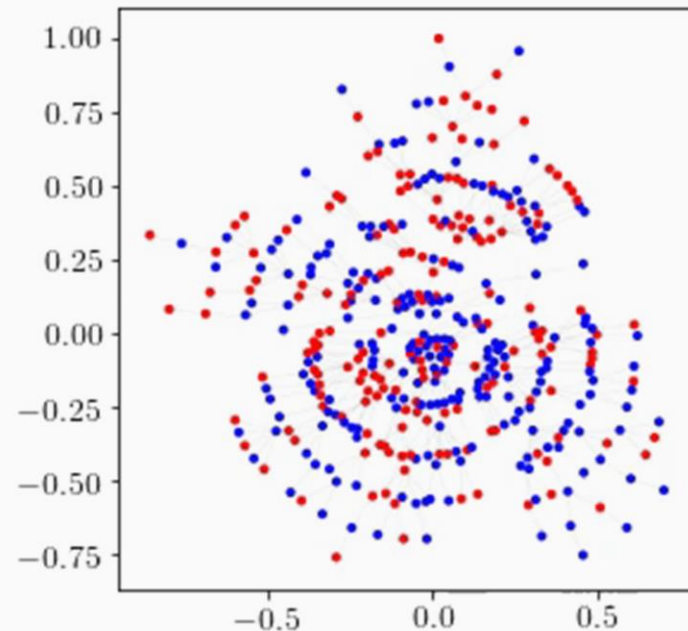
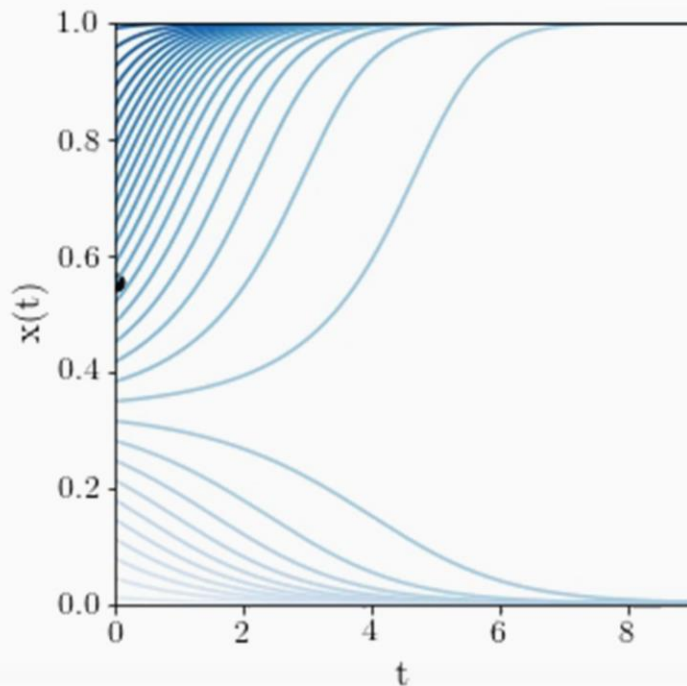
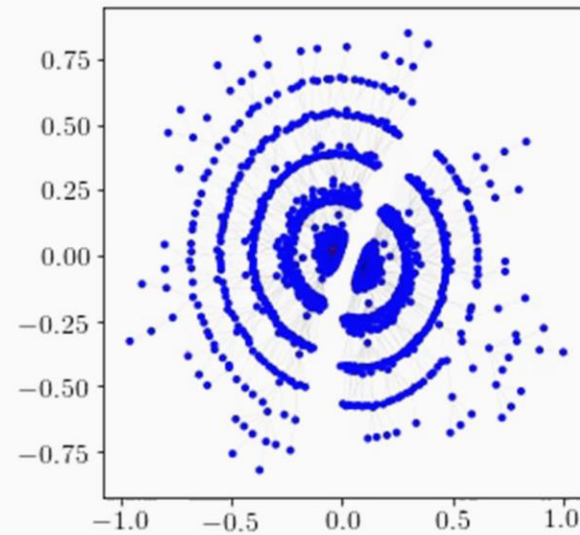
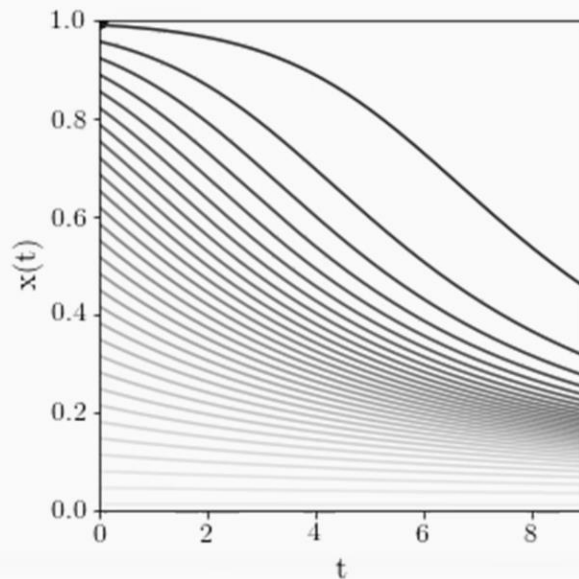
Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre Spiele auf komplexen Netzwerken

Beispiel: Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen Netzwerk-

Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II) mit der Spieltheorie dienen kann. In diesem Kapitel wird die Verknüpfung der Spieltheorie mit der Netzwerktheorie beschrieben. Die dann auf einem solchen komplexen Netzwerk basierender Computersimulationen werden in den letzten Jupyter Notebooks hatten wir die Spieltheorie auf einem nächsten Nachbarn spielen kann (Moore Nachbarn) und in der nächsten 2-dimensionalen Fall spielen



Jupyter Notebook: Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen komplexen Netzwerken

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
Frankfurt am Main 31.12.2020

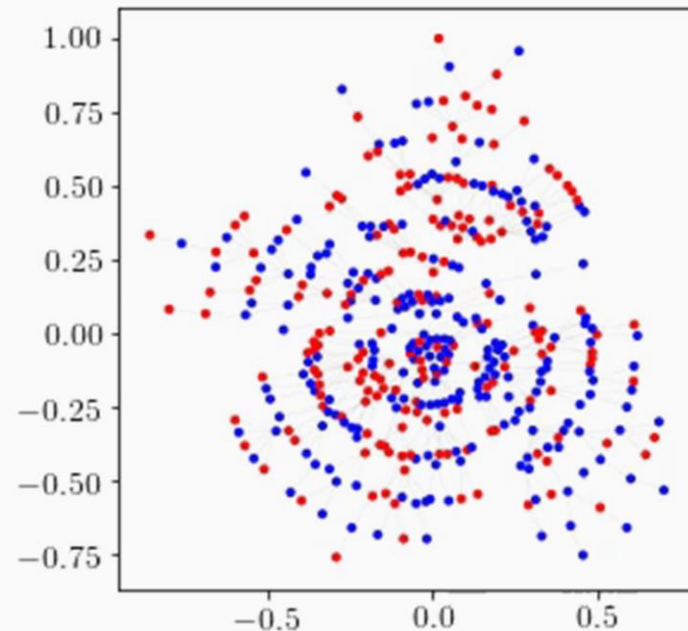
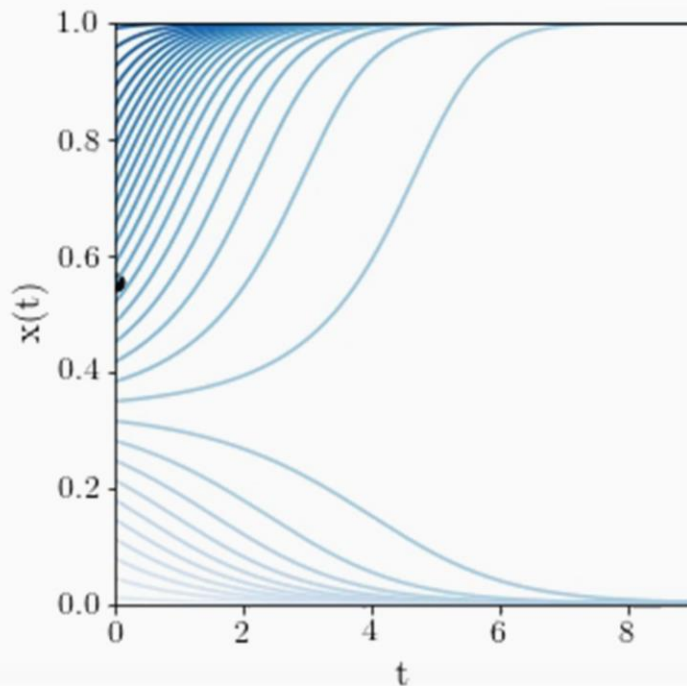
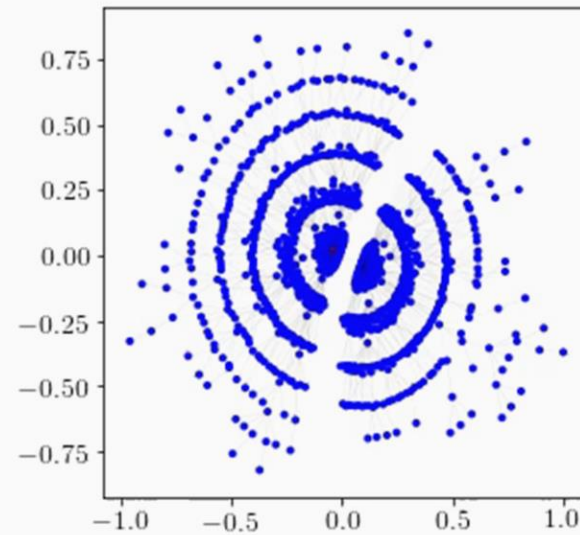
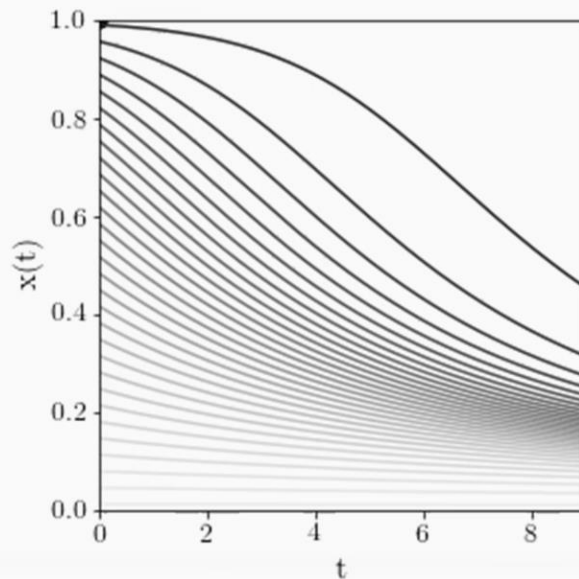
Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre Spiele auf komplexen Netzwerken

Beispiel: Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen Netzwerk-

Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II) mit der Spieltheorie dienen kann. In diesem Kapitel wird die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II) mit der Spieltheorie beschrieben. Die dann auf einem solchen komplexen Netzwerk basierender Computersimulationen werden in den nächsten Jupyter Notebooks hatten wir die Spieltheorie mit den nächsten Nachbarn spielen kann (Moore Nachbarn). In diesem Kapitel wird die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II) mit der Spieltheorie beschrieben. Die dann auf einem solchen komplexen Netzwerk basierender Computersimulationen werden in den nächsten Jupyter Notebooks hatten wir die Spieltheorie mit den nächsten Nachbarn spielen kann (Moore Nachbarn). In diesem Kapitel wird die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II) mit der Spieltheorie beschrieben. Die dann auf einem solchen komplexen Netzwerk basierender Computersimulationen werden in den nächsten Jupyter Notebooks hatten wir die Spieltheorie mit den nächsten Nachbarn spielen kann (Moore Nachbarn).



Einführung in die Objekt-orientierte Programmierung

Die meisten Programmier Techniken, die wir bis jetzt kennengelernt haben, verwendeten den Programmwurfstil der *prozeduralen Programmierung* und wir benutzten meist die Programmiersprache Python bzw. verwendeten Python Jupyter Notebooks. Wir werden nun einerseits den Fokus immer mehr auf die Strukturierung von Programmen legen (das Programmierparadigma der objektorientierten Programmierung) und dies zunächst am Beispiel des in C++ integrierten Klassenkonzept beschreiben.

Das Konzept der objektorientierten Programmierung beruht auf der alltäglichen Erfahrung, dass man Objekte nach zwei Maßstäben beurteilt: Ein Objekt besitzt einerseits messbare Eigenschaften und ist aber auch andererseits über seine Verhaltensweisen definiert. Eine C++ Klasse ist ein benutzerdefinierter neuer Datentyp, der durch das Schlüsselwort 'class' gekennzeichnet wird und die gesamte Idee der objektorientierten Programmierung beruht gänzlich auf diesem Konzept der Klasse. In einer C++ Klasse werden die messbaren Eigenschaften des Objektes in Instanzvariablen (Daten-Member) gespeichert und durch Konstruktoren werden diese Daten-Member dann initialisiert. Die Verhaltensweisen des Objektes werden durch klasseninterne Funktionen, die sogenannten Member-Funktionen beschrieben. In dem folgenden Link werden die Grundlagen der Objekt-orientierten Programmierung und C++ Klassen allgemein vorgestellt und die dort besprochenen Konzepte werden in den nächsten Vorlesungen benutzt, um das Verhalten der Spieler auf einem komplexen Netzwerk in Objekt-orientierter Weise in den C++ und Python Programmen zu implementieren.

Einführung in die Programmierung

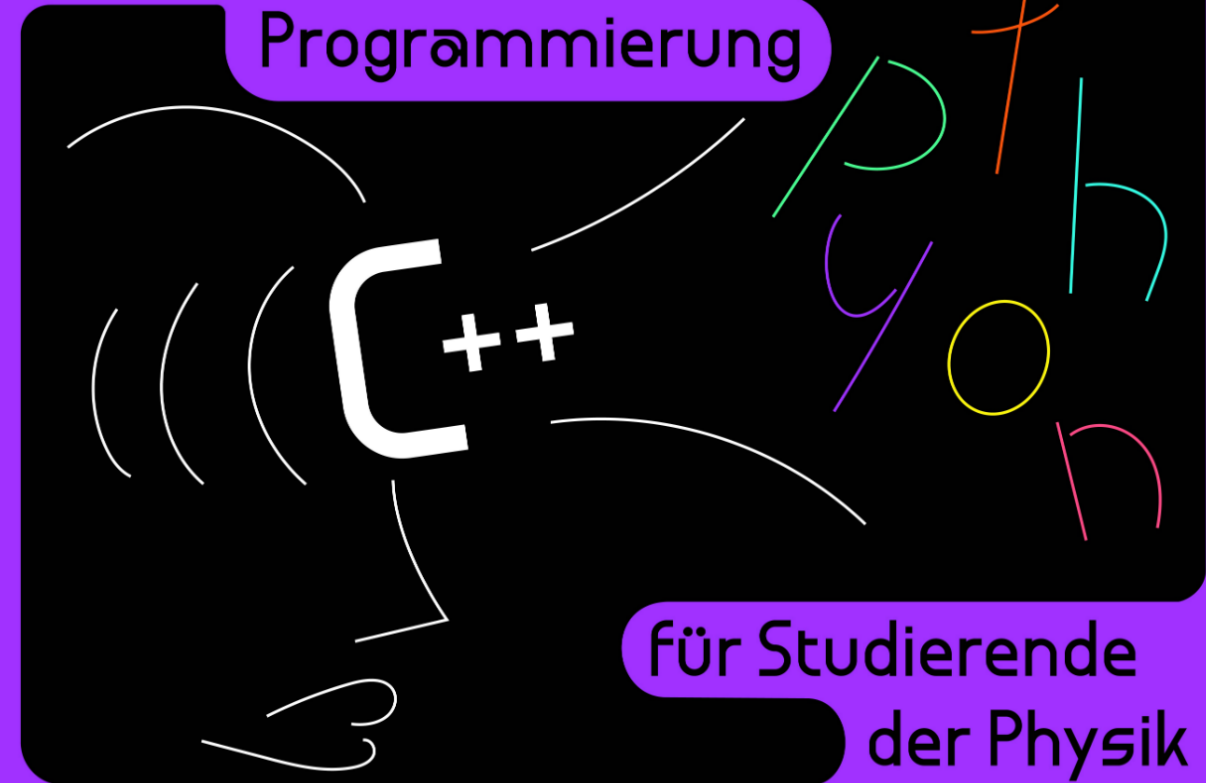


Illustration: Deborah Moldawski

Nächster Zoom Link am 14.07.2022, 14:00-16:00 Uhr: ID: 794 847 5614, PWD: 785453

Die Vorlesung *Einführung in die Programmierung für Studierende der Physik* stellt ein Pflichtmodul im Bachelor Studium Physik der Goethe-Universität Frankfurt dar. Bei regelmäßiger und erfolgreicher Teilnahme an den Übungen/Praktika erhalten Sie eine Zulassung zur Klausur. Den benoteten Schein und sechs Creditpoints erhält man schließlich bei bestandener Klausur. Falls Sie bereits in einem vergangenen Semester (nach der alten Studienordnung) die Zulassung zur Klausur erhalten haben, können Sie direkt an der abschließenden Klausur teilnehmen. Jedoch rate ich Ihnen, die Vorlesung und die Übungen/Praktika trotzdem nochmals zu belegen, da sich die Inhalte und Schwerpunkte zu den vergangenen Vorlesungen unterscheiden könnten.

Einführung in die Quanten Spieltheorie

Complex numbers

G. W. Leibniz (1702)

"...are a subtle and wondrous refuge of the human spirit, almost a hybrid between being and non-being"

"...sind eine feine und wunderbare Zuflucht des menschlichen Geistes, beinahe ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein"

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

The Quantum Wave Function is defined on the space of complex numbers (real numbers and imaginary numbers)

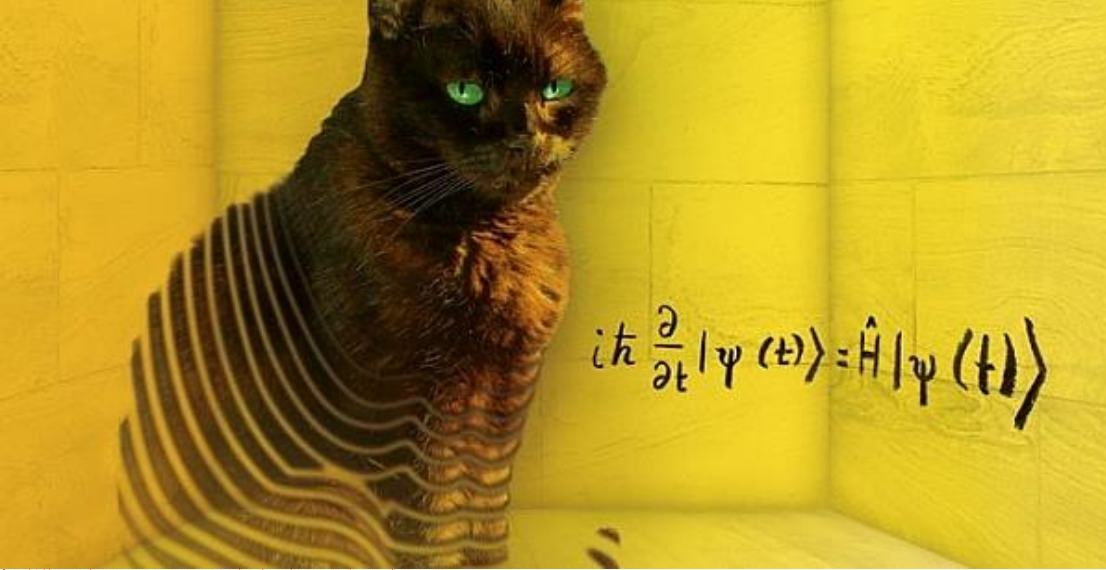
the so-called *Hilbertspace*



© R.J. Bucholt

ψ

Der Quantenzustand und die Schrödinger-Gleichung



Die Quantentheorie stellt eine gänzlich neue Formulierung der Physik dar. Bei der mathematischen Konstruktion dieser neuen Theorie stand man vor dem Dilemma, dass man einerseits daran gebunden ist, jedes physikalische Experiment in den Begriffen der klassischen Physik zu beschreiben, andererseits benötigte man neue, nicht klassische Elemente innerhalb der Theorie, um z.B. den Welle-Teilchen-Dualismus oder nichtlokale Eigenschaften von Teilchen äquivalent zu beschreiben. Am Ende dieser Entwicklung stand ein vollkommen neues Gerüst einer mathematischen Beschreibung, welches z.B. mittels der "Kopenhagener Deutung der Quantentheorie" interpretiert und verstanden wurde.

2) Die Schrödinger-Gleichung

Wie in der Einleitung erläutert, wird in der quantenmechanischen Beschreibung ein apriorischer Zustand Ψ des Teilchens definiert. Wie beschreibt man nun diesen Zustand eines Quantenobjektes mathematisch? Einerseits soll die zeitliche Entwicklung dieses Zustandes keine wirkliche, reale Abfolge von Ereignissen darstellen - eher eine Tendenz der Entwicklung. Der Zustand soll einer Wahrscheinlichkeitsbeschreibung von meßbaren Ereignissen dienen aber paradoxerweise selbst nicht real und empirisch fassbar sein. Die mathematische Beschreibung einer solchen Zustandsfunktion benutzt neben der realen Zahlenwelt auch die imaginären Zahlen und beschreibt den Zustand des Teilchens in einem komplexwertigen sog. Hilbertraum $\Psi \in \mathcal{H}$. Im Moment der Messung kollabiert dieser Zustand zu einer beobachtbaren Eigenschaft des Teilchens und diese observable Größe des Zustandes wird real. In diesem Unterpunkt wird die wichtigste Gleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik (die sog. Schrödinger-Gleichung) vorgestellt und diversen Beispielen erläutert. Die Schrödinger-Gleichung beschreibt wie sich die Zustandsfunktion eines Quantenobjektes $\Psi(\vec{r}, t)$ zeitlich verändert und bestimmt zusätzlich ihr räumliches Verhalten unter Einwirkung einer Kraft, die durch ein Potential $V(\vec{r}, t)$ hervorgerufen wird. Sie besitzt das folgende Aussehen:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t) \quad \text{wobei:} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t)$$

\hat{H} ist der sog. Hamiltonoperator und $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplace-Operator.

Unter der Annahme, dass das Potential nicht von der Zeit abhängt ($V(\vec{r}, t) = V(\vec{r})$), lässt sich die Schrödinger-Gleichung mittels des Produktansatzes $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot f(t)$ in die sog. stationäre (zeitunabhängige) Schrödinger-Gleichung umschreiben:

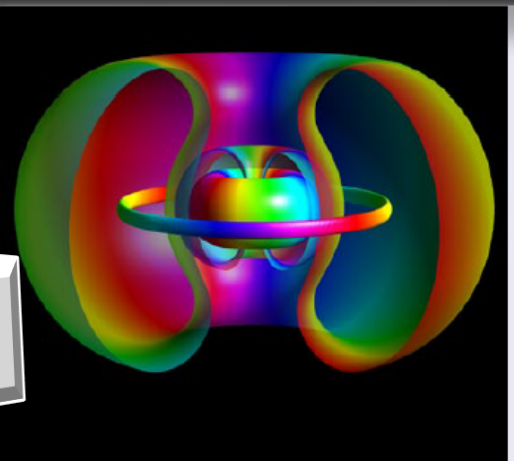
$$\hat{H} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad \text{mit:} \quad \Psi(\vec{r}, t) = \underbrace{\psi(\vec{r})}_{f(t)} e^{-\frac{iE}{\hbar} t},$$

wobei E die Energie des Zustandes darstellt.

Quantum Measurement and Reality

$$\langle \hat{M} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \hat{M} \psi^*(x, t) dx$$

At the moment of measurement, the complex-valued state of the quantum object collapses into an observable property:
The observable property of the object becomes real
The decision state of a player collapses to one of the pure strategies

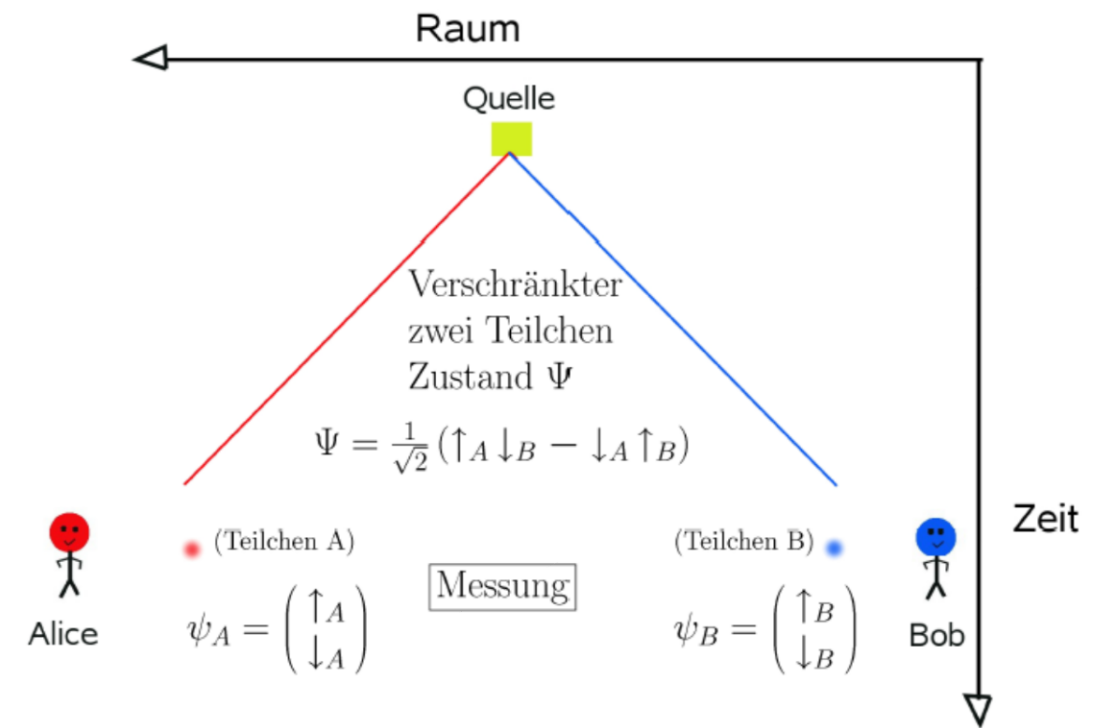


ψ

Quantum Entanglement

Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon

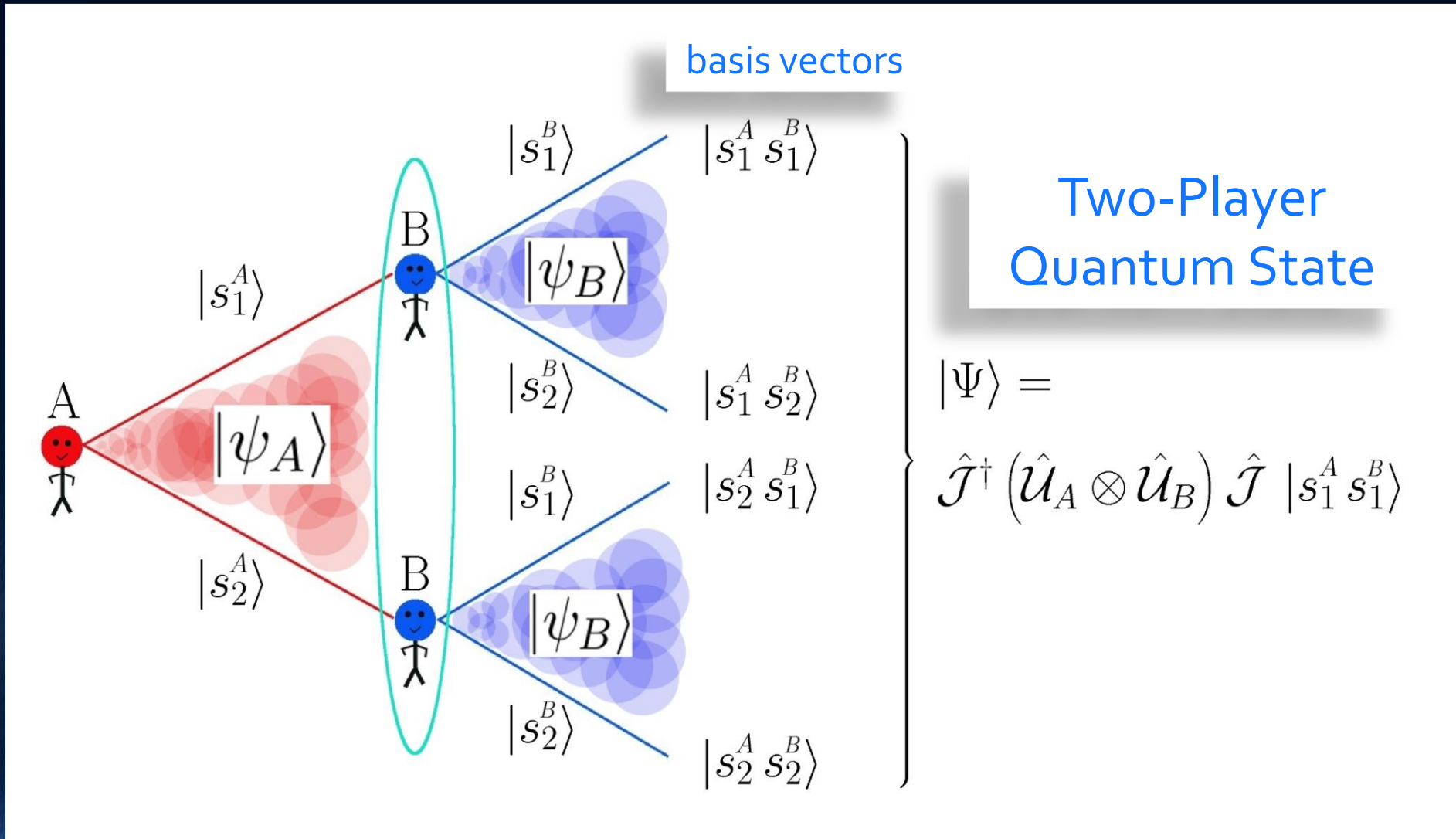
A.Einstein: „Spooky long-distance effect“



Richard Feynman:
 "I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics."

Quantum Games

The entangled Two-Player Quantum-Spinor



Through a quantum-theoretical entanglement of the imaginary decision-making paths within an actor network, a population can succeed in escaping a dilemma-like situation if the value of the entanglement exceeds a certain threshold value.

Spielbaum eines simultanen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels

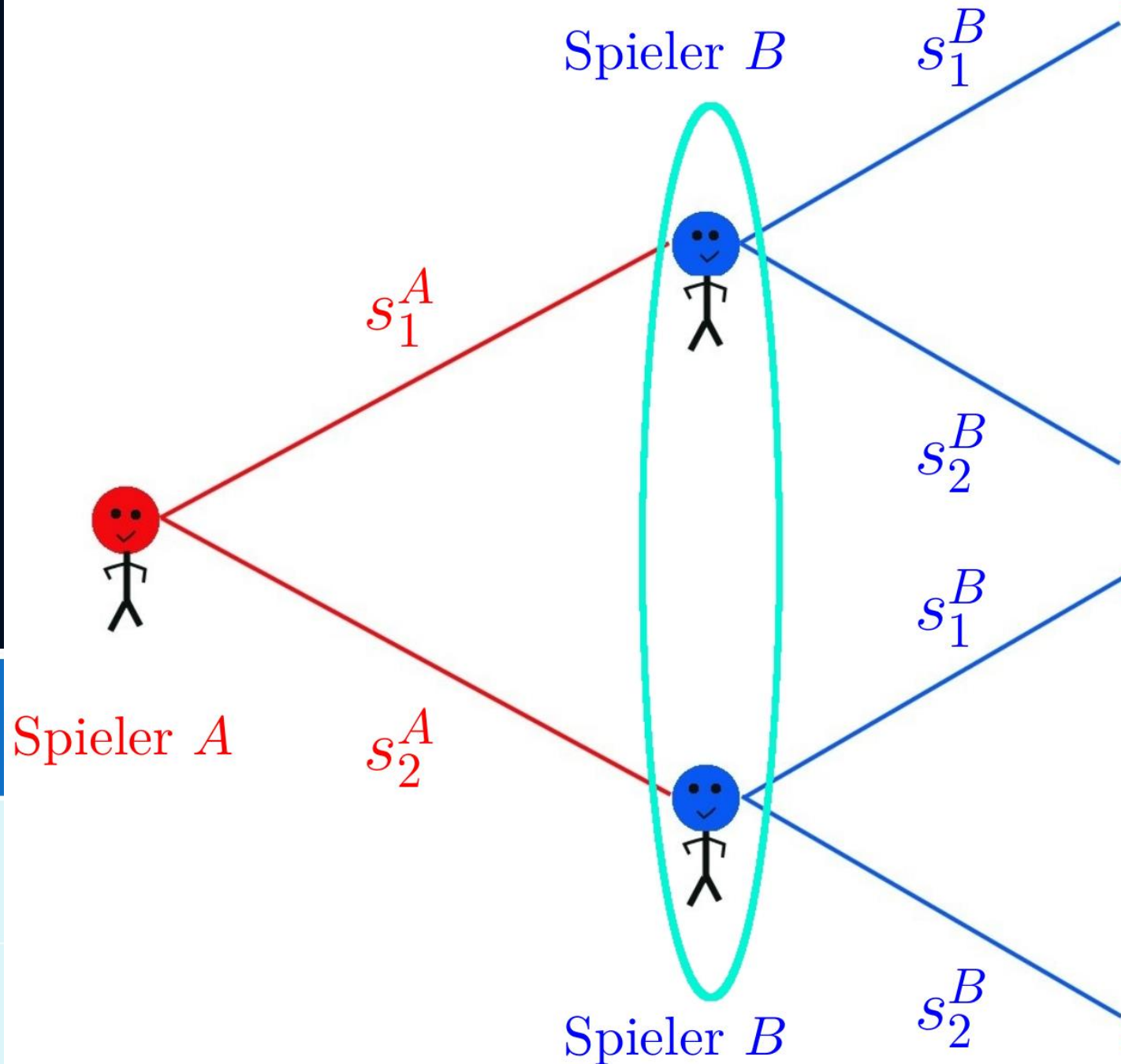
Definition des Spiels:

Menge der Spieler: A und B

Menge der Strategien: 1 und 2

Auszahlungstabelle:

	Spieler B wählt Strategie 1	Spieler B wählt Strategie 2
Spieler A wählt Strategie 1	$(\$_{11}^A, \$_{11}^B)$	$(\$_{12}^A, \$_{12}^B)$
Spieler A wählt Strategie 2	$(\$_{21}^A, \$_{21}^B)$	$(\$_{22}^A, \$_{22}^B)$



Elinor Ostrom (Nobel Prize 2009), “Collective Action and the Evolution of Social Norms”, The Journal of Economic Perspectives, Vol. 14, No. 3 (2000), pp. 137-158

“Face-to-face communication in a public good game-as well as in other types of social dilemmas-produces substantial increases in cooperation that are sustained across all periods including the last period ...Thus, recent developments in evolutionary theory and supporting empirical research provide strong support for the assumption that modern humans have inherited a propensity to learn social norms, similar to our inherited propensity to learn grammatical rules. Social norms are shared understandings about actions that are obligatory, permitted, or forbidden ...”

Ernst Strüngmann Forum (FIAS, May 27–June 1, 2012):

The Cultural Evolution of the Structure of Human Groups

How important are collective decision-making mechanisms compared to individual ones in the evolution of social systems? ...

Formation von „Communities“

<http://networksciencebook.com/chapter/9>

Defining Communities

Our sense of communities rests on a second hypothesis ([Image 9.4](#)):

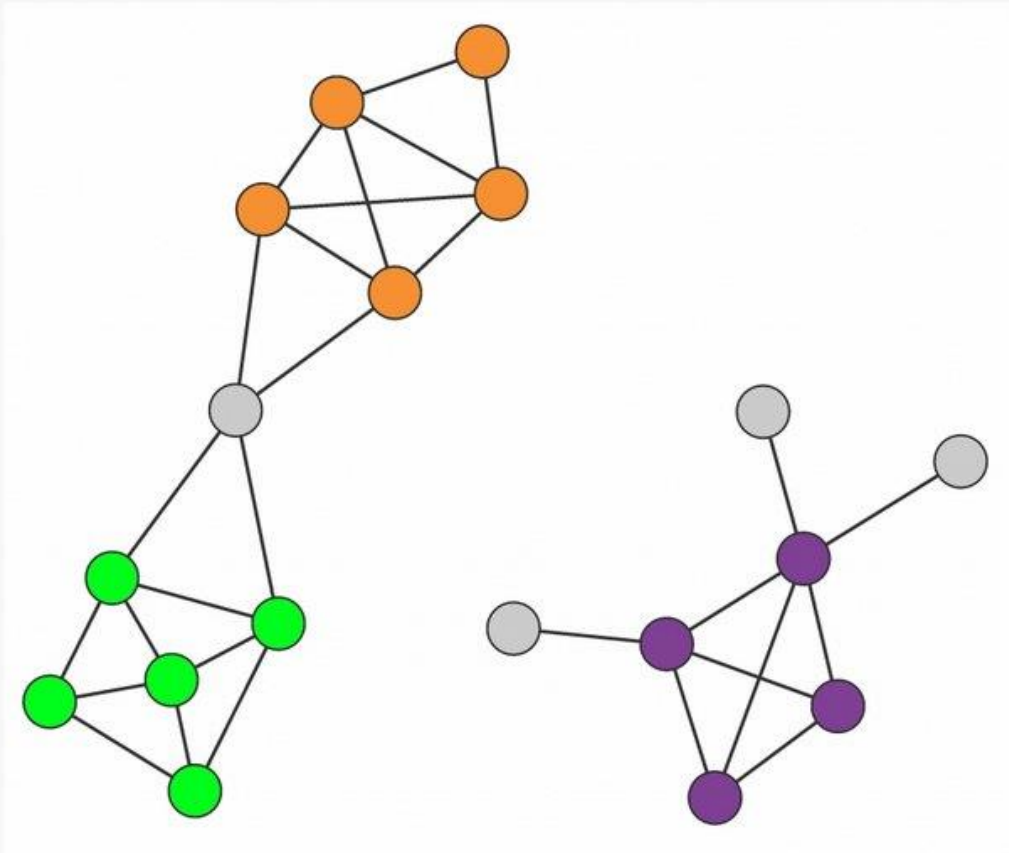


Image 9.4

Connectedness and Density Hypothesis

Communities are locally dense connected subgraphs in a network. This expectation relies on two distinct hypotheses:

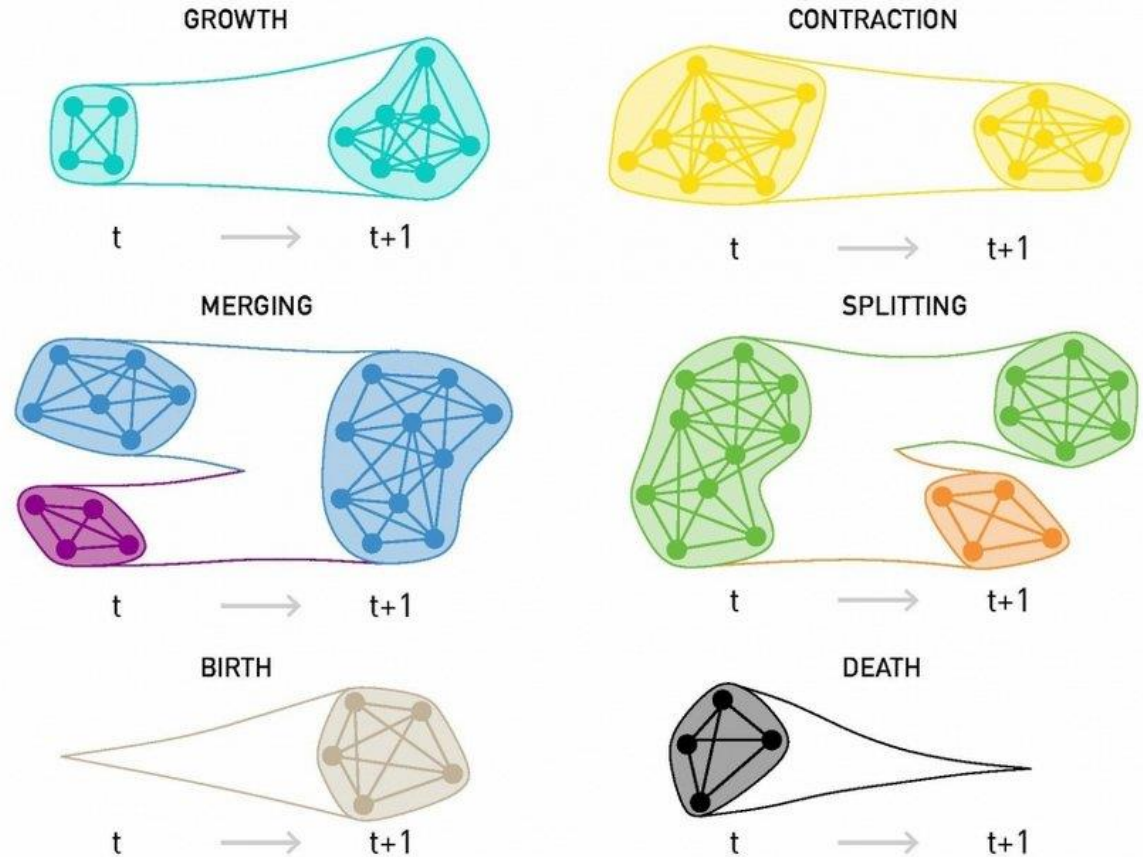


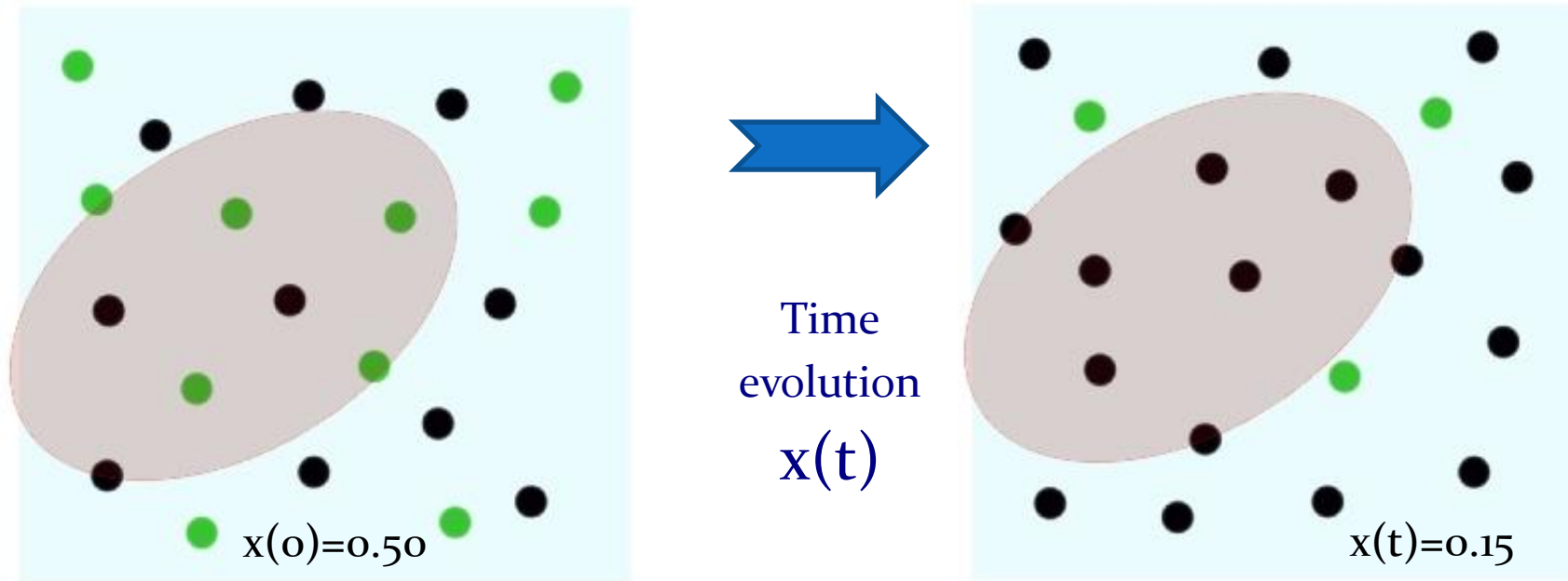
Image 9.31

Evolving Communities

When networks evolve in time, so does the underlying community structure. All changes in community structure are the result of six elementary events in the life of a community, illustrated in the figure: a community can grow or contract; communities can merge or may split; new communities are born while others may disappear. After [50].

Introduction

Die Quanten-Spieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Akteure wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden.



Strategies of each node (of each player): (green , black), $x(t)$: Fraction of player with strategy „green“ as a function of time t
Grey region: Group dependent collective cultural or moral standard

Denkwege im Gefangenendilemma

If A betrays me it is better
if I also betray A.

If A is silent, it is better
if I betray A

Complex space
of all possible ways of thinking



If B betrays me it is better
if I also betray B

If B is silent, it is better
if I betray B



be silent

betray B

	be silent	betray A
A\B	C	D
C	$(-1, -1)$	$(-5, 0)$
D	$(0, -5)$	$(-4, -4)$

Superpositionen von Eigenzuständen

Schrödingers Katze



Figure: Theoretische Versuchsanordnung des Gedankenexperiments.

In einem geschlossenen Kiste befindet sich ein instabiler Atomkern, der innerhalb einer bestimmten Zeitspanne mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zerfällt. Im Falle eines Zerfalls werde Giftgas freigesetzt, was eine im Raum befindliche Katze tötet. Bevor ein Beobachter die Kiste öffnet, schwebt der Zustand ψ der Katze zwischen den Eigenzuständen ' $\psi_1 := \text{Lebend}$ ' und ' $\psi_2 := \text{Tot}$ '.

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \psi_2)$$

Superpositionen von Eigenzuständen

Schrödingers Katze

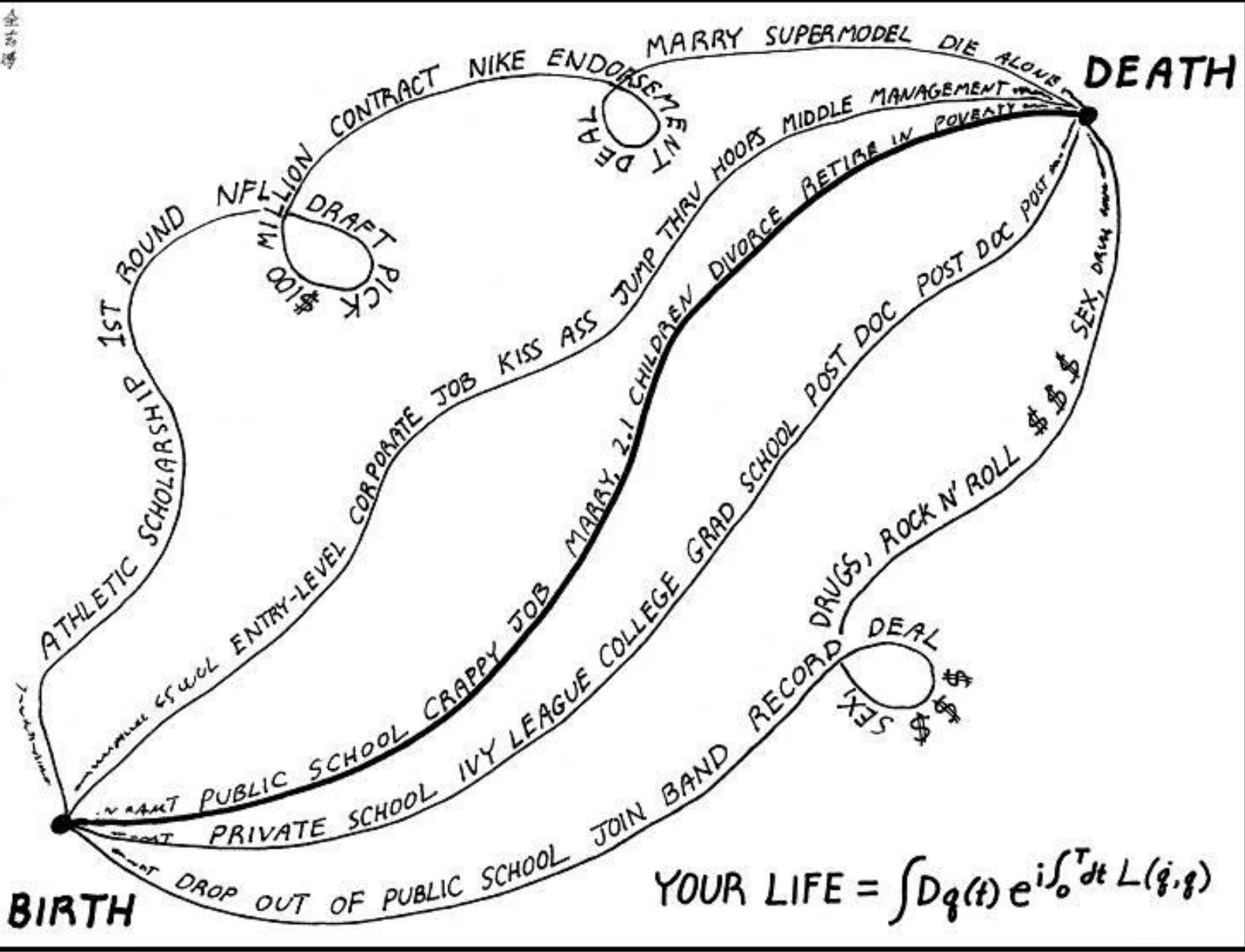


Figure: Theoretische Versuchsanordnung des Gedankenexperiments.



The quantum-mechanical "[Schrödinger's cat](#)" paradox according to the Many-Worlds interpretation. In this interpretation, every quantum event is a branch point; the cat is both alive and dead, even before the box is opened, but the "alive" and "dead" cats are in different branches of the universe, both of which are equally real, but which do not interact with each other.^[a]

金谷



$$\text{YOUR LIFE} = \int Dq(t) e^{i \int_0^T dt L(q, \dot{q})}$$

Parallelwelten Interpretation (H.Everett)

$|s_1^A s_1^B\rangle$  Universum 1

$|s_1^A s_2^B\rangle$  Universum 2

$|s_2^A s_1^B\rangle$  Universum 3

$|s_2^A s_2^B\rangle$  Universum 4

The Path Integral Formulation of Your Life

Beispiel: Das Wasserstoffatom

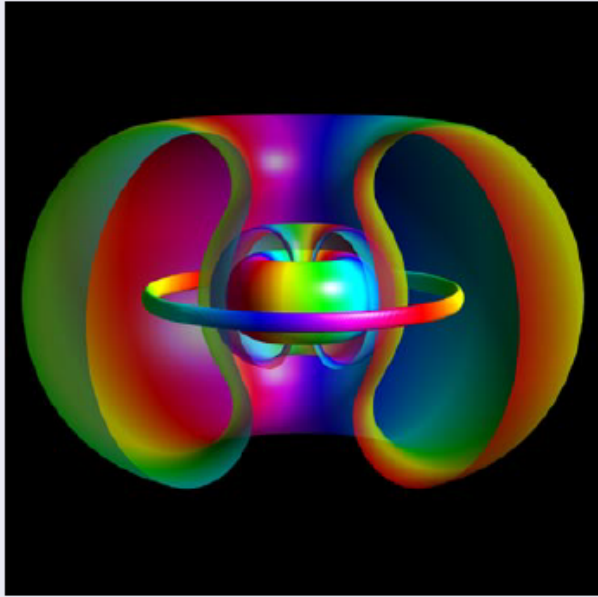


Figure:

Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im Wasserstoffatom ($n=4, l=2, m=2$). Quelle: Bernd Thaller,

Visual Quantum Mechanics

Der Zustand eines Elektrons im Wasserstoffatom wird mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung berechnet. Die messbaren Eigenzustände des Elektrons ($\psi_{nlm}(\vec{r})$) sind durch ihre Quantenzahlen (n, l, m) quantisiert, d.h. Messgrößen wie z.B. die Energie können nur diskrete Werte annehmen. Der allgemeine Elektronenzustand ergibt sich durch Überlagerung (Superposition) der Eigenzustände ($a_{nlm} \in \mathbb{C}$).

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l a_{nlm} \psi_{nlm}$$

Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon

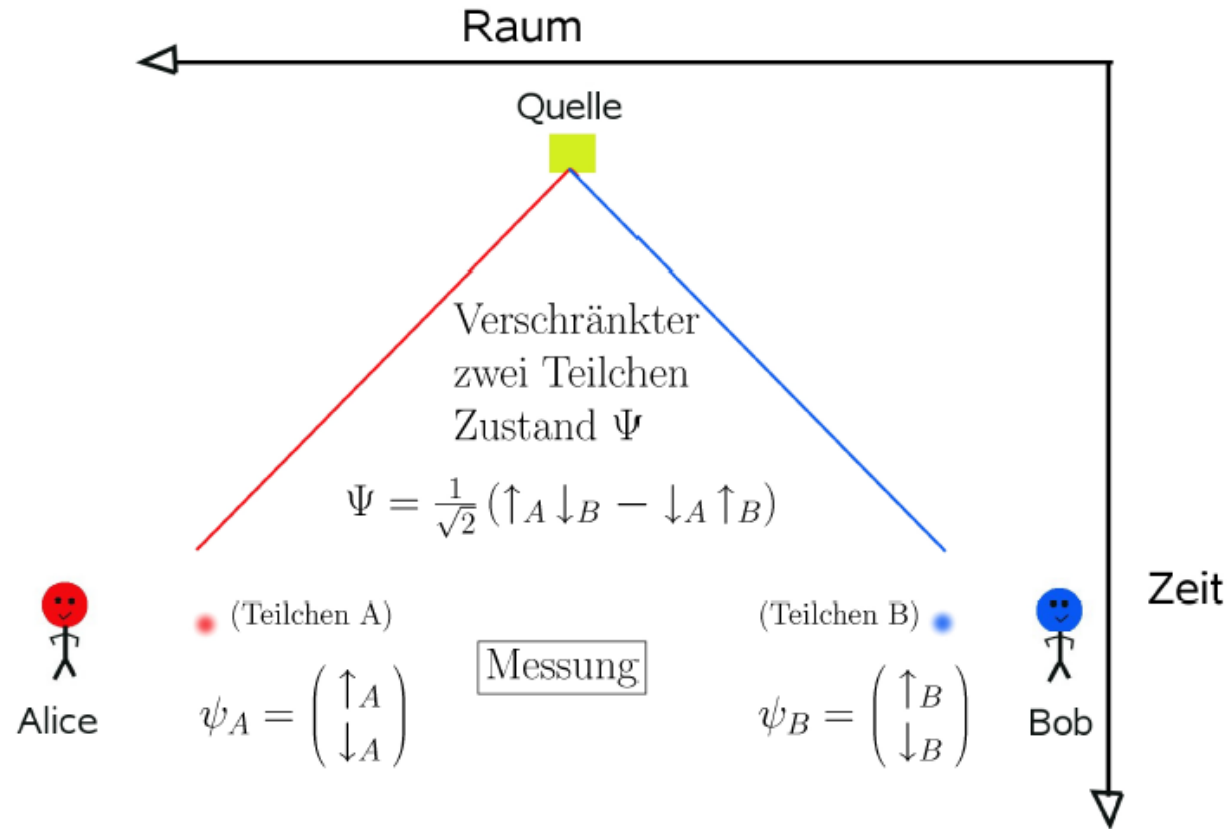


Figure: EPR Gedankenexperiment: Obwohl es keine messbare Wechselwirkung zwischen den Teilchen A und B gibt, sind diese dennoch mittel einer Quantenverschränkung verbunden.

Verschränkte 2-Niveau-Quantensysteme

Zwei Teilchen (A,B) haben die Möglichkeit zwischen zwei Zuständen (\uparrow , \downarrow) zu wählen. Die Basisvektoren der jeweiligen Hilberträume der Teilchen seien wie folgt definiert:

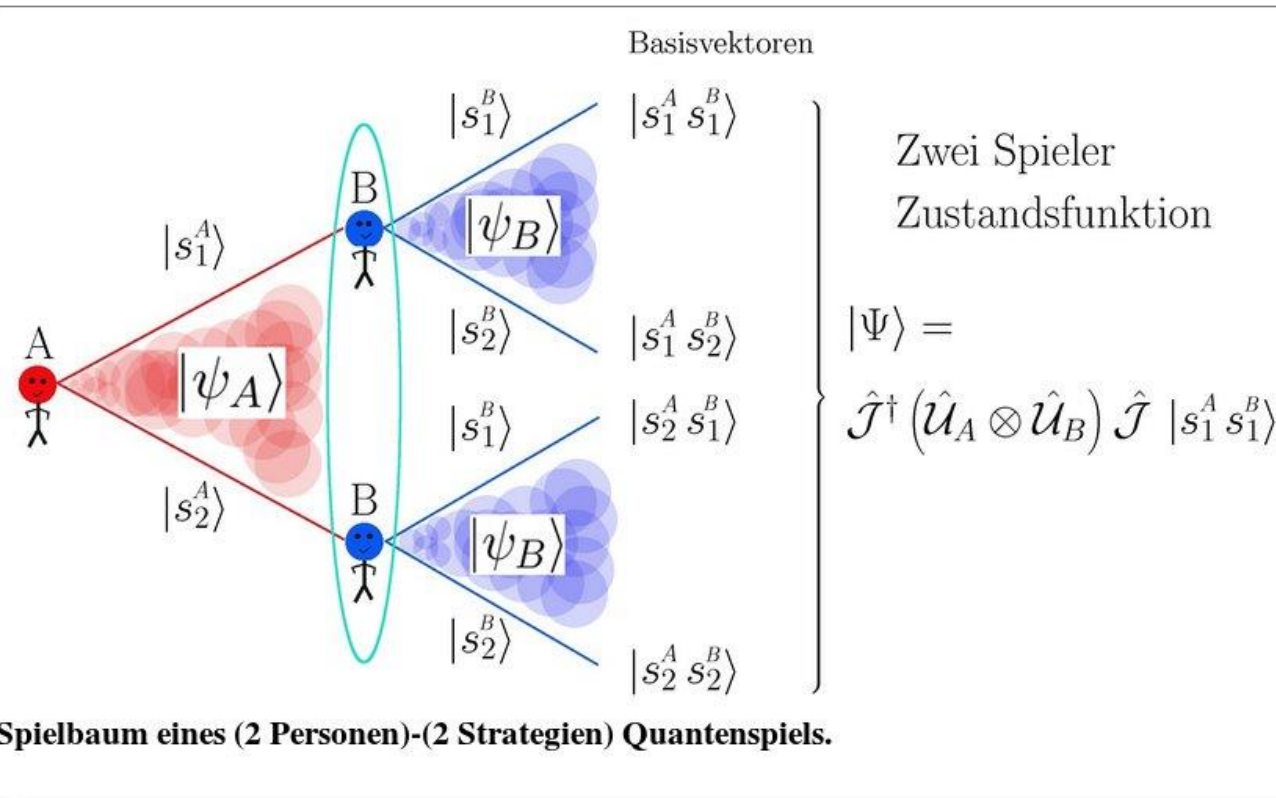
Zustand des Teilchens A: $\psi_A \in \mathcal{H}_A \equiv \mathbb{C}^2$, Basis: $\{\uparrow_A, \downarrow_A\}$

Zustand des Teilchens B: $\psi_B \in \mathcal{H}_B \equiv \mathbb{C}^2$, Basis: $\{\uparrow_B, \downarrow_B\}$

Der Hilbertraum des zusammengesetzten Systems ist ein komplexer vierdimensionaler Raum ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$). Der Gesamtzustand des 2-Teilchen Systems Ψ kann unter Umständen nicht in die jeweiligen Einzelzustände separiert werden.

Verschränkter Zustand (z.B.): $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow_A \downarrow_B - \downarrow_A \uparrow_B)$

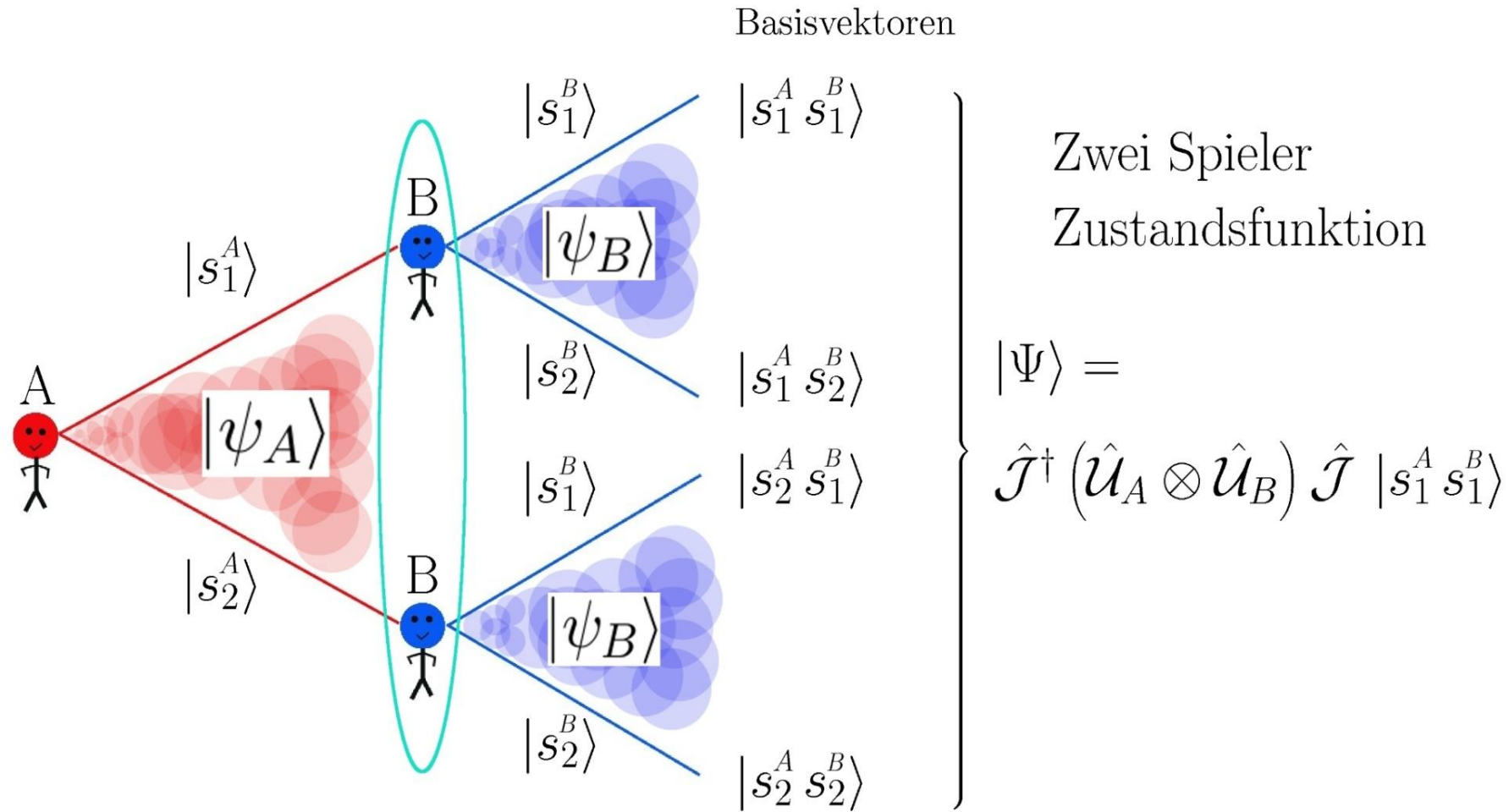
III.2 Quanten Spieltheorie



Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden. Ist die Strategienverschränkung der Spieler im imaginären Raum der denkbaren Entscheidungswege nur genügend groß, so können zusätzliche Nash-Gleichgewichte auftreten und zuvor existente dominante Strategien sich auflösen.

Die Quanten-Spieltheorie beschreibt den Entscheidungszustand eines Spielers $\mu = A, B$, bevor dieser die endgültige Wahl der reinen Strategie getroffen hat, als eine komplexwertige Größe (einen sog. Spinor $|\psi\rangle_A$ bzw. $|\psi\rangle_B$) in einem zweidimensionalen Zustandsraum, dem sogenannten Hilbertraum \mathcal{H}_A bzw. \mathcal{H}_B . Der Zwei-Spielerzustand $|\Psi\rangle$ ist ein

vierkomponentiger Spinor, welcher auf dem gemeinsamen Hilbertraum der Spieler ($\mathcal{H} := \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$) definiert ist. Formal setzt sich dieser aus den Entscheidungsmatrizen (Entscheidungsoperatoren) \hat{U}_A bzw. \hat{U}_B und der Verschränkungsmatrix (bzw. dem Verschränkungsoperator) $\hat{\mathcal{J}}$ zusammen (siehe nebenstehende Abbildung). Die der evolutionären Entwicklung zugrundeliegende Replikatorodynamik besitzt in der evolutionären Quantenspieltheorie eine komplexere Struktur und die jeweiligen evolutionär stabilen Strategien können sich, abhängig vom Maß der Verschränkung, abändern.



Wie geht man in der Physik vor?

Wie beschreibt man in der Physik das Verhalten der untersuchten Dinge?

Nehmen wir z.B. das Elektron als das Ding (der Aktant (Akteur, Knoten, Spieler)) des zu untersuchenden Systems. Mit welcher Theorie beschreiben wir das Verhalten dieses Elektrons?

des Elektrons und seines zugehörigen Antiteilchens als Zustand eines Diracspinors zusammen:

$$\psi_A = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \\ \tilde{e}_L \\ \tilde{e}_R \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} \text{Linkshändiges Elektron} \\ \text{Rechtshändiges Elektron} \\ \text{Linkshändiges Positron} \\ \text{Rechtshändiges Positron} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Man kann dann mit ein und derselben Gleichung sowohl das Teilchen als auch das Antiteilchen beschreiben. Die zutreffende Gleichung nennt man Diracgleichung; sie besitzt die folgende Form:⁶

$$i \gamma^\mu_A{}^B \partial_\mu \psi_B - \frac{m_0 c}{\hbar} \psi_A = 0 \quad (1.2)$$

$i = \sqrt{-1}$: Imaginäre Einheit

c : Lichtgeschwindigkeit

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$: Plank'sches Wirkungsquantum

m_0 : Ruhemasse des Fermions

μ : Raumzeitindex 0...3

A, B : Diracindex 1..4

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$: Partielle Ableitung

ψ_A : Fermionischer Diracspinor

$\gamma^\mu_A{}^B$: Dirac Matrizen

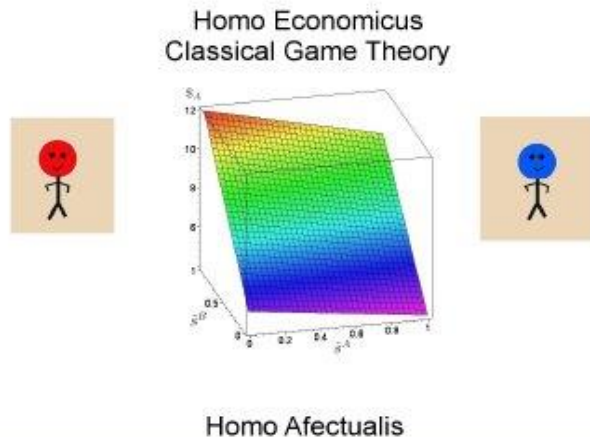
Vergleicht man den Zwei-Spielerzustand der Quanten Spieltheorie mit dem Diracspinor, so repräsentieren die beiden Spieler das Teilchen und das Antiteilchen und der Hängigkeit (links, rechtshändig) die Strategiewahl der Spieler.

Beyond Homo Economicus

Quantum Game Theory
Entanglement Quantum Strategies
Homo Sociologicus Homo Transcendentalis

$$|\Psi\rangle$$

Extended models of classical evolutionary game theory (e.g. [10, 9])



The final 2-player quantum state:

$$|\Psi\rangle = \hat{\mathcal{J}}^\dagger \left(\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B \right) \hat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle$$

$\hat{\mathcal{J}}(\gamma)$: Entangling operator

$\hat{\mathcal{J}}^\dagger(\gamma)$: Disentangling operator

$\gamma \in [0, \pi]$: Strength of entanglement

\hat{U}_A : Decision Operator for player A

\hat{U}_B : Decision Operator for player B

Teil III.2.1 Einführung in die Quanten Spieltheorie

Die Annahme des vollständig verbundenen, zufälligen Netzwerks, welches die Grundlage der deterministischen evolutionären Spieltheorie bildet, ist in realen sozialen Netzwerken oft nicht erfüllt. In realen sozialen Netzwerken bilden sich oft weitgehend abgeschlossene Cluster von miteinander verbundenen Spielern, die zu anderen Clustern nur bedingt bzw. selten Kontakt haben. Diese Art von Cluster- bzw. Cliquesbildung kann zu einer unterschiedlichen Ausprägung von sozialen Normen innerhalb der einzelnen Teilgruppen führen. Soziale Normen können sich somit herausbilden, die den einzelnen Spielern neben ihrem *homo ökonomischen* Interesse auch den Blick auf das Wohl der eigenen Gruppe nahelegen. Eine solche Art von induziertem Gruppeninteresse wird im folgenden mittels des Ansatzes der Quanten-Spieltheorie mathematisch in die deterministischen Gleichungen der evolutionären Spieltheorie eingearbeitet. Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden. Ist die Strategienverschränkung der Spieler im imaginären Raum der denkbaren Entscheidungswege nur genügend groß, so können zusätzliche Nash-Gleichgewichte auftreten und zuvor existente dominante Strategien sich auflösen.

Die erste formale Beschreibung der Quanten-Spieltheorie wurde im Jahre 1999 von Eisert et al. vorgestellt. Diese oft zitierte Arbeit betrachtet die quantentheoretische Erweiterung eines Gefangenendilemma Spiels und zeigt auf, dass die Spieler dem Dilemma entkommen können, falls der strategische Verschränkungswert oberhalb einer dem Spiel eigenen Grenze liegt. Im selben Jahr (1999) analysierte D. A. Meyer das *Penny Flip* Spiel und erweiterte dieses mittels quantentheoretischer Konzepte. In seinem Artikel betrachtete er den unrealistischen Fall, dass einer der Spieler das im Spiel benutzte Geldstück in einem überlagerten Quantenzustand positionieren könne und zeigte, dass dieser Spieler stets das Spiel gewinnen wird, falls sein Gegenspieler eine rein klassische Strategie benutzt. Im Jahre 2000 kommentierte S.J. van Enk die Arbeit von D. A. Meyer und zeigte, dass Meyer's Behauptung nicht sonderlich beeindruckend ist, da er nur einem der Spieler einen größeren Strategienraum erlaubt. Im Jahre 2000 wendeten Marinatto & Weber die quantentheoretischen Konzepte auf das *Kampf der Geschlechter (battle of sexes)* Spiel an und zeigten, dass durch die Verschränkung der Spielerstrategien ein eindeutiges Gleichgewicht möglich ist. In den folgenden Jahren wurden die quantenspieltheoretischen Konzepte auf weitere Spiele ausgedehnt; so analysierte R.V. Mendes die Quantenversion des *Ultimatum Spiels*, Hogg et al. betrachteten das *Öffentliche Gut* Spiel, eine Version des *Quanten Koordinationsspiels* und analysierten *Quanten Auktionen*. Benjamin & Hayden erweiterten im Jahre 2001 den Formalismus der Quanten-Spieltheorie auf mehr als zwei Spieler. Im Jahre 2002 benutzten Piotrowski & Sladkowsky die quantenspieltheoretischen Konzepte um Eigenschaften im Verhalten von Märkten zu erklären. Im Jahre 2006 analysierten Hanauske et al. das *Open Access*-Publikationsverhalten wissenschaftlicher Autoren mittels des quantentheoretischen Ansatzes. Bereits im Jahre 2001 wurde das erste Quantenspiel auf einem Quantencomputer realisiert, wobei sich die vorhergesagten Eigenschaften bestätigten. Die Resultate dieser Experimente wurden im Jahre 2007 von A. Zeilinger erneut bestätigt. Die ersten Ansätze einer Anwendung der Quanten-Spieltheorie auf sozio-ökonomische Experimente wurden nach 2007 veröffentlicht. Neben diesen Arbeiten, entwickelte sich im Bereich der Psychologie ein weiterer wissenschaftlicher Forschungszweig, welcher quantentheoretische Konzepte zur Erklärung von experimentellen Daten benutzt. Diese Arbeiten zeigen, dass viele, zunächst nicht erklärbare experimentelle Befunde im Bereich der Psychologie, sich mittels quantenlogischer Konzepte beschreiben lassen.



- The *Quantum* Penny Flip Game
1999, D. A. Meyer, *Quantum strategies*, PRL 82 (1052)
- The *Quantum* Prisoner's Dilemma
1999, J. Eisert, M. Wilkens and M. Lewenstein, *Quantum Games and Quantum Strategies*, PRL 83 (3077)
- The *Quantum* Battle of Sexes
2001, L. Marinatto and T. Weber, *A Quantum Approach To Static Games Of Complete Information*, Physics Letters A 272
- The *Quantum* Coordination Game
2003, B. A. Huberman and T. Hogg, *Quantum Solution of Coordination Problems*, Quantum Information Processing 2(6)
- The *Quantum* Ultimatum Game
2005, R. Vilela Mendes, *The Quantum Ultimatum Game*, Quantum Information Processing 4(1)



- Economics and Quantum Game Theory
2002, E. W. Piotrowski and J. Sladkowski, *Quantum Market Games*, Physica A (312) 208
2002, Kay-Yut Chen, T. Hogg and R. Beaulsoleil *A Quantum Treatment of Public Goods Economics*, Quantum Information Processing 1(6)
2004, E. W. Piotrowski and J. Sladkowski *Quantum Game Theory in Finance*, Quantitative Finance 4 (1-7)
2007, T. Hogg, P. Harsha and Kay-Yut Chen *Quantum Auctions*, Int. J. of Quantum Information 5:751-780
2007, M. Hanauske, S. Bernius and B. Dugall, *Quantum Game Theory and Open Access Publishing*, Physica A, Vol.382 (2007), p.650-664 (physics/0612234)



- Quantum Computer and Quantum Game Theory
2002, J. Du, H. Li, X. Xu, M. Shi, J. Wu, X. Zhou and R. Han
Experimental realization of quantum games on a quantum computer, PRL 88 (137902)
2007, R. Prevedel, A. Stefanov, P. Walther and A. Zeilinger
Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer, New Journal of Physics 9 (205)
2008, P. Benicio, Melo de Sousa, R. V. Ramos *Multiplayer Quantum Games and its Application as Access Controller in Architecture of Quantum Computers*, arXiv:0802.3684v2
- Extensions of Quantum Game Theory
2001, S. C. Benjamin and P. M. Hayden, *Multi-Player Quantum Games*, PRA 64 (030301) ...

- Experimental Economics and Quantum Game Theory
2006, Kay-Yut Chen and Tad Hogg *How well do people play a quantum prisoner's dilemma?*, Quantum Information Processing 5(43)
2007, Kay-Yut Chen and Tad Hogg *Experiments with Probabilistic Quantum Auctions*, arXiv:0707.4195v1
2007, M. Hanauske, S. Bernius, W. König and B. Dugall *Experimental Validation of Quantum Game Theory*, Accepted Paper at the Conference *LOFT 2008*
- and reviews in Physics World and Nature ...

Quantum Game Theory and Scientific Communication

M. Hanauske, S. Bernius und B. Dugall “Quantum Game Theory and Open Access Publishing” (in *Physica A* 382 (2007) 650-664)

Matthias Hanauske, Wolfgang König und Berndt Dugall “Evolutionary Quantum Game Theory and Scientific Communication” (Beitrag auf der Konferenz “Second Brazilian Workshop of the Game Theory Society” (2010))

Matthias Hanauske “Evolutionary Game Theory and Complex Networks of Scientific Information” (Chapter in the Springer Book “Models of science dynamics—Encounters between complexity theory and information science” (2011))

Quantum Game Theory and Financial Crises

M. Hanauske, J. Kunz, S. Bernius und W. König “Doves and hawks in economics revisited: An evolutionary quantum game theory-based analysis of financial crises” (in *Physica A* 389 (2010) 5084 – 5102)

Quantum Game Theory and Experimental Economics

M. Hanauske, S. Bernius, W. König und B. Dugall “Experimental Validation of Quantum Game Theory” (Beitrag auf der Konferenz “Logic and the Foundations of Game and Decision Theory” (2008))

Quantum Game Theory and Networks of Software Firms

Quantum Game Theory and Social Norms in Firms



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

Journal of Mathematical Psychology 50 (2006) 220–241

Journal of
Mathematical
Psychology

www.elsevier.com/locate/jmp

Quantum dynamics of human decision-making

Jerome R. Busemeyer*, Zheng Wang, James T. Townsend

Indiana University, USA

Received 10 December 2004; received in revised form 11 January 2006

Available online 15 March 2006

Abstract

A quantum dynamic model of decision-making is presented, and it is compared with a previously established Markov model. Both the quantum and the Markov models are formulated as random walk decision processes, but the probabilistic principles differ between the two approaches. Quantum dynamics describe the evolution of complex valued probability amplitudes over time, whereas Markov models describe the evolution of real valued probabilities over time. Quantum dynamics generate interference effects, which are not possible with Markov models. An interference effect occurs when the probability of the union of two possible paths is smaller than each individual path alone. The choice probabilities and distribution of choice response time for the quantum model are derived, and the predictions are contrasted with the Markov model.

© 2006 Elsevier Inc. All rights reserved.

Keywords: Quantum; Markov; Dynamics; Decision-making; Random-walk; Diffusion; Choice; Response-time

A Brief Introduction to Quantum Formalism
Emmanuel Haven and Andrei Khrennikov

**Quantization in Financial Economics:
An Information-Theoretic Approach**
Raymond J. Hawkins and B. Roy Frieden

Quantum Game Theoretical Frameworks in Economics
Edward W. Piotrowski and Jan Sładkowski

The Intrinsic Quantum Nature of Classical Game Theory
Y. Pelosse

**Decision-Making and Cognition Modeling from the
Theory of Mental Instruments**
Irina Basieva and Andrei Khrennikov

Adaptive Dynamics and an Optical Illusion
Masanori Ohya and Yoshiharu Tanaka

Strategic Choice in Hilbert Space
Charles E. Smith Jr. and Christopher Zorn

1 **Voters' Preferences in a Quantum Framework** 141
Polina Khrennikova and Emmanuel Haven

19 **Quantum Structure in Cognition Origins, Developments,
Successes, and Expectations** 157
Diederik Aerts and Sandro Sozzo

39 **Quantum Cognition, Neural Oscillators, and Negative Probabilities** 195
J. Acacio de Barros and Gary Oas

59 **Quantum-Like Type Indeterminacy: A Constructive
Approach to Preferences à la Kahneman and Tversky** 229
A. Lambert-Mogiliansky

Quantum Models of Human Causal Reasoning 251
Jennifer S. Trueblood and Percy K. Mistry

**A Quantum Probability Model for the Constructive
Influence of Affective Evaluation** 267
Lee C. White, Emmanuel M. Pothos, and Jerome R. Busemeyer

**Is there Room in Quantum Ontology for a Genuine
Causal Role for Consciousness?** 293
Paavo Pyllkkänen

Big Challenges Section 319

Why Quantum? 321
Andrei Khrennikov

**Quantum Principles and Mathematical Models
in Physics and Beyond** 335
Arkady Plotnitsky

Emmanuel Haven • Andrei Khrennikov
Editors

The Palgrave Handbook of Quantum Models in Social Science

Applications and Grand Challenges

Quantum cognition: a new theoretical approach to psychology

Peter D. Bruza¹, Zheng Wang², and Jerome R. Busemeyer³

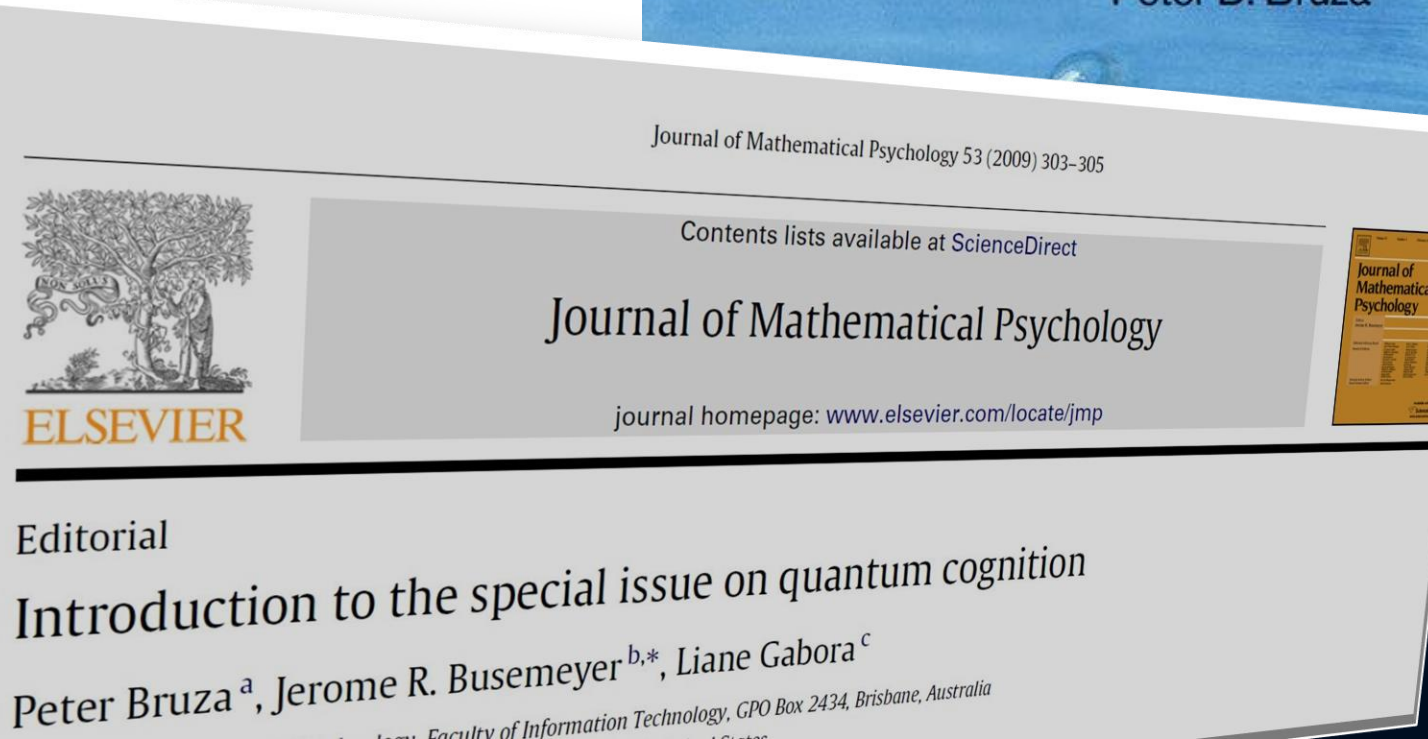
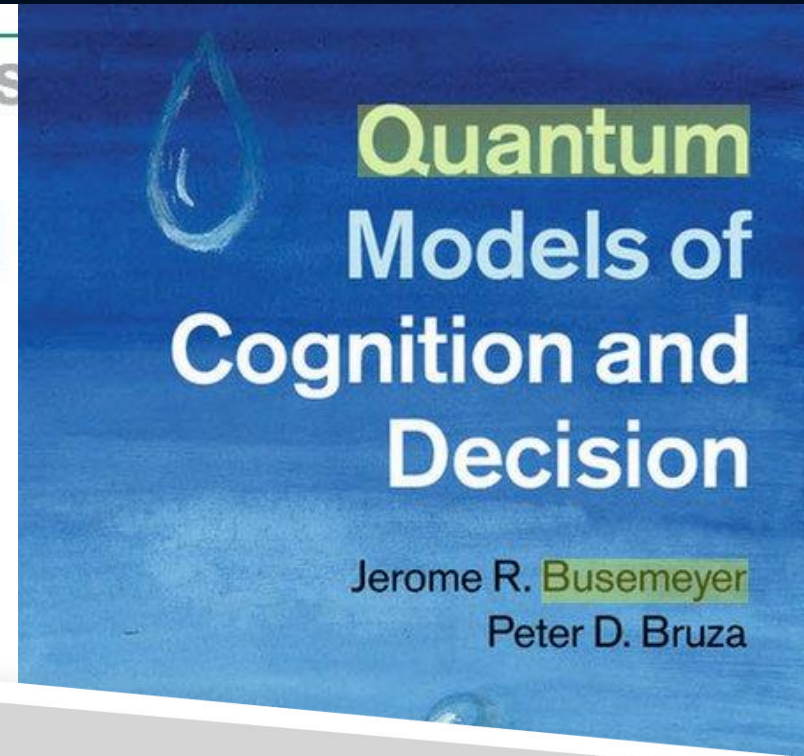
¹Information Systems School, GPO Box 2434, Queensland University of Technology, Brisbane 4001, Australia

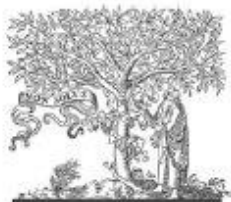
²School of Communication, 3145 Derby Hall, 154 North Oval Mall, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA

³Department of Psychological and Brain Sciences, 1101 East 10th Street, Indiana University, Bloomington, IN 48705, USA

What type of probability theory best describes the way humans make judgments under uncertainty and decisions under conflict? Although rational models of cognition have become prominent and have achieved much success, they adhere to the laws of classical probability theory despite the fact that human reasoning does not always conform to these laws. For this reason we have seen the recent emergence of models based on an alternative probabilistic framework drawn from quantum theory. These quantum models show promise in addressing cognitive phenomena that have proven recalcitrant to modeling by means of classical probability theory. This review compares and contrasts probabilistic models based on Bayesian or classical versus quantum principles, and highlights the advantages and disadvantages of each approach.

maker is rational and derived from. However, the Bayesian model does not describe the way humans make decisions. To what extent can quantum theory be used to describe human decision making? This review compares and contrasts probabilistic models based on Bayesian or classical versus quantum principles, and highlights the advantages and disadvantages of each approach.





ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Mathematical Psychology

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jmp



Quantum structure in cognition

Diederik Aerts*

*Center Leo Apostel for Interdisciplinary Studies, Vrije Universiteit Brussel, 1160 Brussels, Belgium
Department of Mathematics, Vrije Universiteit Brussel, 1160 Brussels, Belgium
Department of Psychology, Vrije Universiteit Brussel, 1160 Brussels, Belgium*

ARTICLE INFO

Article history:

Received 27 May 2008

Received in revised form

17 April 2009

Available online 31 May 2009

Keywords:

Concept theories

Concept conjunction

Guppy effect

Overextension

Quantum mechanics

Interference

Superposition



Hilbert space

Fock space

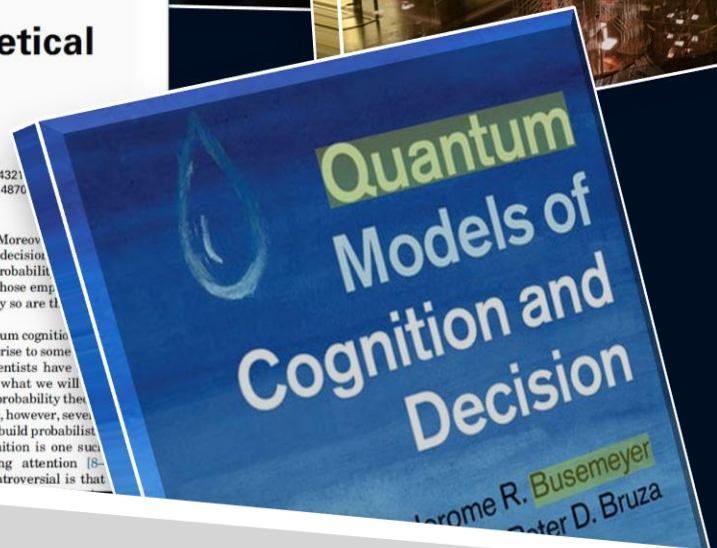
ABSTRACT

The broader scope of our investigations is the search for the way in which concepts and their combinations carry and influence meaning and what this implies for human thought. More specifically, we examine the use of the mathematical formalism of quantum mechanics as a modeling instrument and propose a general mathematical modeling scheme for the combinations of concepts. We point out that quantum mechanical principles, such as superposition and interference, are at the origin of specific effects in cognition related to concept combinations, such as the guppy effect and the overextension and underextension of membership weights of items. We work out a concrete quantum mechanical model for a large set of experimental data of membership weights with overextension and underextension of items with respect to the conjunction and disjunction of pairs of concepts, and show that no classical model is possible for these data. We put forward an explanation by linking the presence of quantum aspects that model concept combinations to the basic process of concept formation. We investigate the implications of our quantum modeling scheme for the structure of human thought, and show the presence of a two-layer structure consisting of a classical logical layer and a quantum conceptual layer. We consider connections between our findings and phenomena such as the disjunction effect and the conjunction fallacy in decision theory, violations of the sure thing principle, and the Allais and Elsborg paradoxes in economics.

© 2009 Elsevier Inc. All rights reserved.

Available online at www.sciencedirect.com


 Journal of Mathematical Psychology 50 (2006) 220–241
www.elsevier.com/locate/jmp
Journal of Mathematical Psychology
Quantum dynamics of human decision-making
 Jerome R. Busemeyer^{*}, Zheng Wang, James T. Townsend
 Indiana University, USA
 December 2004; received in revised form 11 January 2006
 Available online 15 March 2006


Feature Review
CellPress
Quantum cognition: a new theoretical approach to psychology
 Peter D. Bruza¹, Zheng Wang², and Jerome R. Busemeyer³
¹Information Systems School, GPO Box 2434, Queensland University of Technology, Brisbane 4001, Australia
²School of Communication, 3145 Derby Hall, 154 North Oval Mall, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA
³Department of Psychological and Brain Sciences, 1875 University Avenue, Bloomington, IN 47406, USA



Emmanuel Haven • Andrei Khrennikov
 Editors
The Palgrave Handbook of Quantum Models in Social Science
 Applications and Grand Challenges

y. Moreov
 or decisio
 i probabilit
 n those emp
 tly so are th
 ntum cognitio
 rprise to some
 cientists have
 – what we will
 i probability the
 re, however, sever
 o build probabilist
 gnition is one such
 ing attention [8-
 ntroversial is that

- The Quantum Penny Flip Game**
 1999, D. A. Meyer, *Quantum strategies*, PRL 82 (1052)
- The Quantum Prisoner's Dilemma**
 1999, J. Eisert, M. Wilkens and M. Lewenstein, *Quantum Games and Quantum Strategies*, PRL 83 (3077)
- The Quantum Battle of Sexes**
 2001, L. Marinatto and T. Weber, *A Quantum Approach To Static Games Of Complete Information*, Physics Letters A 272
- The Quantum Coordination Game**
 2003, B. A. Huberman and T. Hogg, *Quantum Solution of Coordination Problems*, Quantum Information Processing 2(6)
- The Quantum Ultimatum Game**
 2005, R. Vilela Mendes, *The Quantum Ultimatum Game*, Quantum Information Processing 4(1)


ELSEVIER
 Journal of Mathematical Psychology 53 (2009) 303–305
 Contents lists available at ScienceDirect
Journal of Mathematical Psychology
 journal homepage: www.elsevier.com/locate/jmp

Editorial
Introduction to the special issue on quantum cognition
 Peter Bruza^a, Jerome R. Busemeyer^{b,*}, Liane Gabora^c
^a Queensland University of Technology, Faculty of Information Technology, GPO Box 2434, Brisbane, Australia
^b Indiana University, Department of Psychology, Bloomington, IN, United States
^c Columbia University, Department of Psychology, Kelowna, Canada

Teil III.2.2 Mathematischer Formalismus der die Quanten Spieltheorie

Die bei der quantentheoretischen Formulierung benutzten mathematischen Ansätze können grob in zwei Hauptströme gegliedert werden. Der Dichtematrix Ansatz der Quantenspieltheorie (siehe Marinatto & Weber) und den quanten-informationstheoretischen Ansatz von Eisert et al. Der auf quanteninformationstheoretischen Konzepten aufbauende Ansatz hat einerseits den Vorteil, dass die neu entstehenden Quantenstrategien in einem reduzierten Quanten-Strategienraum visualisiert und interpretiert werden können, andererseits baut der Ansatz die Möglichkeit einer Quantenverschränkung in mathematisch eleganter Weise in die Theorie ein, so dass man die Stärke einer möglichen Strategienverschränkung der Spieler mittels eines zusätzlichen Parameters (γ) im Modell variieren kann. In den ersten Jahren nach seiner Veröffentlichung wurde der Eisert'sche Ansatz von Benjamin & Hayden und S.J. van Enk angegriffen und kritisch diskutiert. Die damals erhobenen Vorwürfe stellten sich jedoch im Laufe der Zeit als nicht auf die Eisert'sche Theorie anwendbar heraus. Im Folgenden wird das Konzept der Quanten-Spieltheorie (in der Eisert'schen, quanten-informationstheoretischen Nomenklatur) im Detail beschrieben.

In der Quanten-Spieltheorie kann der Entscheidungszustand der beteiligten Akteure, im Gegensatz zur klassischen Spieltheorie, eine gemeinsame Strategienverschränkung aufweisen. Durch das Konzept dieser möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen, mit in die klassische Theorie einbezogen werden. Eine der grundlegenden Folgerungen aus einer solchen gemeinsamen Strategienverschränkung ist, dass die beteiligten Akteure eine erhöhte Kooperationsbereitschaft aufweisen, da sie dann eine Optimierung des gemeinsamen Zwei-Spielerzustandes $|\Psi\rangle$ anstreben.

Um die mathematische Beschreibung eines evolutionären, quantenspieltheoretischen Modells zu verdeutlichen, wird im Folgenden zunächst ein (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspiel betrachtet. Der spieltheoretische, binäre Entscheidungsprozess der Akteure soll durch eine allgemeine Auszahlungsmatrix bestimmt sein (siehe nebenstehende Auszahlungstabelle). Die Quanten-Spieltheorie beschreibt den Entscheidungszustand eines Spielers $\mu = A, B$, bevor dieser die endgültige Wahl der reinen Strategie getroffen hat, als eine komplexwertige Größe (Spinor) in einem zweidimensionalen Zustandsraum, dem sogenannten Hilbertraum \mathcal{H}_μ . Die in dieser Arbeit verwendete mathematische Repräsentation dieses Spinors wird mit Hilfe des Entscheidungsoperators $\hat{U}_\mu(\theta_\mu, \varphi_\mu)$ konstruiert, der auf einen Anfangszustand (hier speziell $|s_1^\mu\rangle$) wirkt. Ein allgemeiner Entscheidungszustand des Spielers A wird somit wie folgt mathematisch konstruiert:

The Quantum State of Player A and the Decision Operator

$$|\psi_A\rangle = \psi_1^A |s_1^A\rangle + \psi_2^A |s_2^A\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1^A \\ -\psi_2^A \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_A$$

$$|s_1^A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s_2^A\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \psi_1^A = e^{i\varphi_A} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right), \quad \psi_2^A = \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)$$

$$|\psi_A\rangle = \widehat{\mathcal{U}}(\theta_A, \varphi_A) |s_1^A\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_A} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Die reinen Zustände $|s_1^A\rangle$ und $|s_2^A\rangle$ bilden die Basis des Hilbertraums \mathcal{H}_A des Spielers A und repräsentieren die reinen Strategien s_1^A und s_2^A des Spiels. Der Entscheidungsoperator des Spielers μ hängt von den beiden Entscheidungswinkeln θ_μ und φ_μ ab und ist explizit wie folgt definiert:

$$\widehat{\mathcal{U}}_\mu(\theta_\mu, \varphi_\mu) := \begin{pmatrix} e^{i\varphi_\mu} \cos\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) & e^{-i\varphi_\mu} \cos\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \forall \quad \theta_\mu \in [0, \pi] \wedge \varphi_\mu \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad .$$

The Entanglement Operator and the 2-Player Quantum State

Der finale Zwei-Spielerzustand eines simultanen Zwei-Strategien-'One Shot'-Quantenspiels wird somit durch den vierkomponentigen Quantenzustand $|\Psi\rangle$ beschrieben, welcher sich in der Eisert'schen Repräsentation wie folgt aus dem Anfangszustand $|\Psi_0\rangle = \widehat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle$ entwickelt

$$|\Psi\rangle = \widehat{\mathcal{J}}^\dagger (\widehat{U}_A \otimes \widehat{U}_B) \widehat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle, \quad |\Psi_0\rangle = \widehat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) \\ 0 \\ 0 \\ -i \sin(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix},$$

wobei $\widehat{\mathcal{J}} := (J_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = 1 \dots 4$ die von dem Parameter γ abhängige Verschränkungsmatrix (bzw. den Verschränkungsoperator) beschreibt

$$\widehat{\mathcal{J}} := e^{-i \frac{\gamma}{2} (\widehat{s}_2^A \otimes \widehat{s}_2^B)} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) & 0 & 0 & -i \sin(\frac{\gamma}{2}) \\ 0 & \cos(\frac{\gamma}{2}) & i \sin(\frac{\gamma}{2}) & 0 \\ 0 & i \sin(\frac{\gamma}{2}) & \cos(\frac{\gamma}{2}) & 0 \\ -i \sin(\frac{\gamma}{2}) & 0 & 0 & \cos(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix} \mathbb{I}, \quad \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

$\widehat{U}_A := (U_{\alpha\beta}^A)$, $\alpha, \beta = 1 \dots 2$ und $\widehat{U}_B := (U_{\alpha\beta}^B)$, $\alpha, \beta = 1 \dots 2$ stellen die von den Winkeln θ_A, φ_A und θ_B, φ_B abhängigen Entscheidungsmatrizen (Entscheidungsoperatoren) der Spieler A und B dar.

The Quantum Version of the Payoff Function

Der Erwartungswert der Auszahlungen der Spieler wird zusätzlich durch die Spielmatrix (siehe nebenstehende Auszahlungstabelle) mitbestimmt:

$$\$A = \$_{11}^A P_{11} + \$_{12}^A P_{12} + \$_{21}^A P_{21} + \$_{22}^A P_{22}$$

$$\$B = \$_{11}^B P_{11} + \$_{21}^B P_{12} + \$_{12}^B P_{21} + \$_{22}^B P_{22}$$

mit: $P_{kl} = |\langle s_k^A s_l^B | \Psi \rangle|^2$, $k, l = \{1, 2\}$

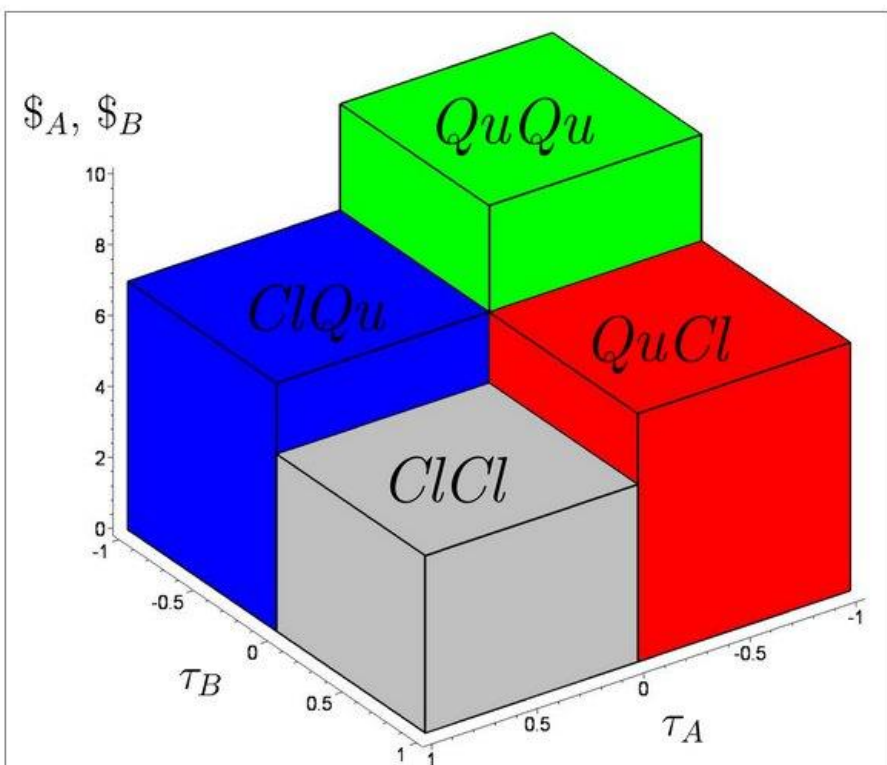
A \ B	s_1^B	s_2^B
s_1^A	$(\$_{11}^A, \$_{11}^B)$	$(\$_{12}^A, \$_{21}^B)$
s_2^A	$(\$_{21}^A, \$_{12}^B)$	$(\$_{22}^A, \$_{22}^B)$

Allgemeine Auszahlungsmatrix eines (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels.

Dieser Erwartungswert der Auszahlungen stellt eine Erweiterung des aus der klassischen Spieltheorie bekannten Konzepts der Auszahlungsfunktion in gemischten Strategien dar.

Um die Auswirkungen des quantenspieltheoretischen Konzepts auf die dem Spieler ratsame Wahl der Entscheidung zu untersuchen, wird im Folgenden die Struktur der quantenspieltheoretisch erweiterten gemischten Auszahlungsfunktion untersucht. Im Unterschied zur klassischen Auszahlungsfunktion ($\tilde{\$}^\mu(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)$), die lediglich von den gemischten Strategien des Spielers A (\tilde{s}^A) und des Spielers B (\tilde{s}^B) abhängt, hängt die quantentheoretische Erweiterung der Auszahlungsfunktion im Allgemeinen von fünf Parametern ab: Die vier Winkel der Entscheidungsoperatoren ($\theta_A, \varphi_A, \theta_B$ und φ_B) und der Parameter γ , welcher die Stärke der Strategienverschränkung quantifiziert.

Visualization and the Reduced Set of Quantum Strategies



Visualisierungsraum der quantentheoretisch erweiterten Auszahlung $\$$ als Funktion der reduzierten s_1 -Quantenstrategien τ_A des Spielers A und τ_B des Spielers B.

Um die Auszahlungsfunktion dennoch als Fläche in einem dreidimensionalen Raum zu visualisieren, reduziert man deren Abhängigkeiten, indem man einerseits den Verschränkungsparameter γ fixiert und die Menge der Quantenstrategien auf diejenigen beschränkt, die vom Ursprung der reinen, klassischen s_1 -Strategie starten. Die Abhängigkeiten des vierkomponentigen Zwei-Spieler Quantenzustand $|\Psi\rangle$ werden durch die Einführung zweier neuer Parameter (τ_A und τ_B) reduziert:

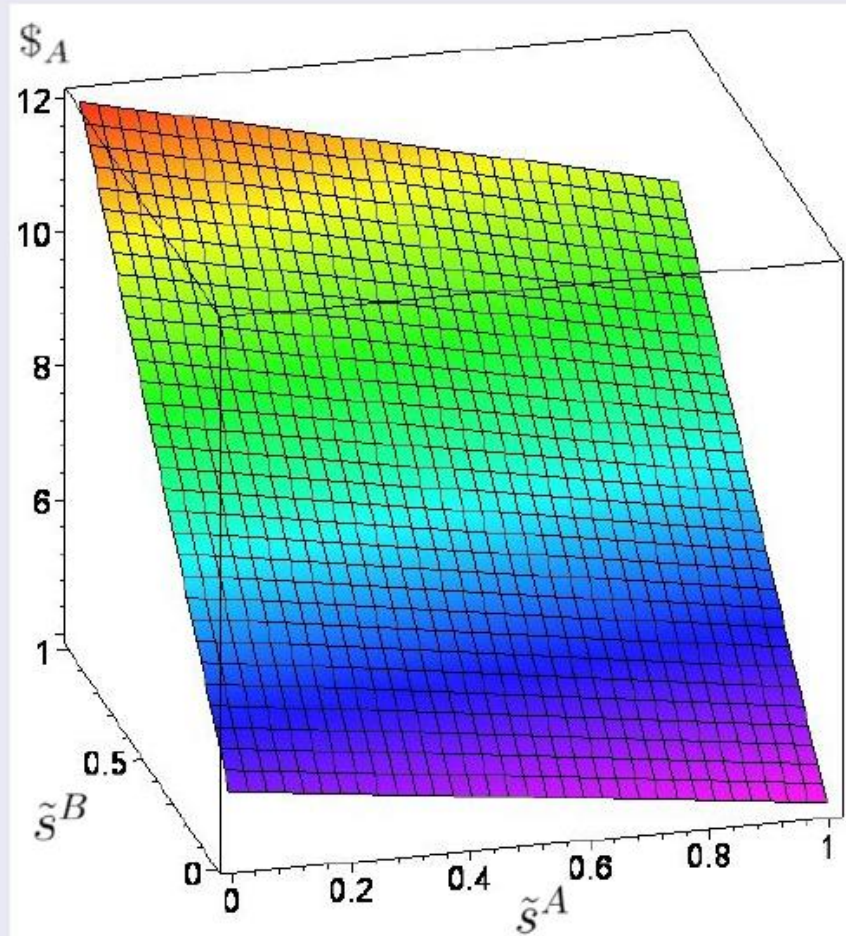
$|\Psi\rangle = |\Psi(\theta_A, \varphi_A, \theta_B, \varphi_B)\rangle \rightarrow |\Psi(\tau_A, \tau_B)\rangle$. Die für jeden Spieler wählbaren Entscheidungswinkel θ und φ werden dadurch auf einen einzigen Parameter $\tau \in [-1, 1]$ reduziert. Positive τ -Werte entsprechen den klassischen gemischten Strategien, wohingegen negative τ -Werte Quantenstrategien mit $\theta = 0$ und $\varphi > 0$ repräsentieren. Der gesamte quantentheoretische Strategienraum wird dadurch in vier separate Regionen unterteilt: in den absolut klassischen Bereich (ClCl: $\tau_A, \tau_B \geq 0$), den absoluten Quantenbereich (QuQl: $\tau_A, \tau_B < 0$) und in die beiden semi-klassischen Quantenbereiche (ClQl: $\tau_A \geq 0 \wedge \tau_B < 0$ und QlCl: $\tau_A < 0 \wedge \tau_B \geq 0$). Durch diese (τ_A, τ_B) -Repräsentation wird die Menge der möglichen Quantenstrategien auf die folgende Untermenge reduziert:

$$\underbrace{\{(\tau \pi, 0) \mid \tau \in [0, 1]\}}_{\text{klassischer Bereich Cl}} \quad \wedge \quad \underbrace{\{(0, \tau \frac{\pi}{2}) \mid \tau \in [-1, 0]\}}_{\text{Quantenbereich Ql}}$$

Die nebenstehende Abbildung stellt die vier Regionen des Visualisierungsraums der quantentheoretischen Auszahlungsfunktion dar. Die absolut klassische Region (ClCl, $\varphi_A, \varphi_B \equiv 0$) befindet sich im vorderen Bereich, die Region in welchem beide Spieler eine Quantenstrategie

Quantum extension of dominant class games

Classical payoff for player A



A \ B	s_1^B	s_2^B
s_1^A	(10,10)	(4,12)
s_2^A	(12,4)	(5,5)

Table: Payoffmatrix of a dominant, prisoners dilemma like game.

This dominant, prisoners dilemma like game has only one pure, symmetric Nash equilibrium (s_2^A, s_2^B) which is the only ESS of the evolutionary game.

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 26.01.2021

Ditter Vorlesungsteil: Quanten Spieltheorie

Jupyter Notebook:
Quanten Spieltheorie

Einführung

Die Annahme des vollständig verbundenen, zufälligen Netzwerks, welches die Grundlage der deterministischen evolutionären Spieltheorie bildet, ist in realen sozialen Netzwerken oft nicht erfüllt. In realen sozialen Netzwerken bilden sich oft weitgehend abgeschlossene Cluster von miteinander verbundenen Spielern, die zu anderen Clustern nur bedingt bzw. selten Kontakt haben. Diese Art von Cluster- bzw. Cliquenbildung kann zu einer unterschiedlichen Ausprägung von sozialen Normen innerhalb der einzelnen Teilgruppen führen. Soziale Normen können sich somit herausbilden, die den einzelnen Spielern neben ihrem *homo ökonomischen* Interesse auch den Blick auf das Wohl der eigenen Gruppe nahelegen. Eine solche Art von induziertem Gruppeninteresse wird im folgenden mittels des Ansatzes der Quanten-Spieltheorie mathematisch in die deterministischen Gleichungen der evolutionären Spieltheorie eingearbeitet. Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden. Ist die Strategienverschränkung der Spieler im imaginären Raum der denkbaren Entscheidungswege nur genügend groß, so können zusätzliche Nash-Gleichgewichte auftreten und zuvor existente dominante Strategien sich auflösen.

Die erste formale Beschreibung der Quanten-Spieltheorie wurde im Jahre 1999 von Eisert et al. vorgestellt. Diese oft zitierte Arbeit betrachtet die

Teil III.2.3 Symmetrische (2x2)-Quantenspiele

Parametersätze	Spielklasse	$\$_{11}$	$\$_{12}$	$\$_{21}$	$\$_{22}$	Nash-Gleichgewichte
Set_A	Dominantes Spiel	10	4	12	5	Ein reines Nash-Gleichgewicht (s_2^A, s_2^B)
Set_B	Koordinationsspiel	10	4	9	5	Zwei reine NEs, ein internes NE $(s^* = \frac{1}{2})$
Set_C	Anti-Koordinationsspiel	10	7	12	5	Zwei reine NEs, ein internes NE $(s^* = \frac{1}{2})$

Parameterwerte der drei symmetrischen Beispielspiele.

Die auf der rechten Seite dargestellte Abbildung stellt die quantentheoretisch erweiterte Auszahlung $\$_A$ des Spielers A (untransparente Fläche) und $\$_B$ des Spielers B (transparente Fläche) als Funktion der reduzierten s_1 -Quantenstrategien τ_A des Spielers A und τ_B des Spielers B dar. Als zugrundeliegender Parametersatz wurde Set_A verwendet und die Stärke der Quantenverschränkung der Spielerstrategien wurde auf null gesetzt ($\gamma = 0$). Als Visualisierungsraum wurde der in der oberen Abbildung beschriebene reduzierte Raum verwendet, wobei der absolute Quantenbereich QuQu, bei dem beide Spieler eine Quantenstrategie benutzen,

im hinteren Teil des Diagramms zu finden ist und die rein klassische Region ClCl nach vorne projiziert wurde. Die Abbildung zeigt deutlich, dass das unverschränkte Quantenspiel identisch mit der klassischen Version des Spiels ist. Im Bereich, in dem beide Spieler eine Quantenstrategie wählen ($\tau_A < 0 \wedge \tau_B < 0$),

ist die Auszahlung der Spieler gleich der Auszahlung, als wenn die Spieler die klassische Strategie s_1 gewählt hätten ($\$_A(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10, \$_B(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10$). Das Nash-Gleichgewicht des klassischen Spiels ((s_2^A, s_2^B) , die dominante Strategie) entspricht den folgenden τ -Werten:

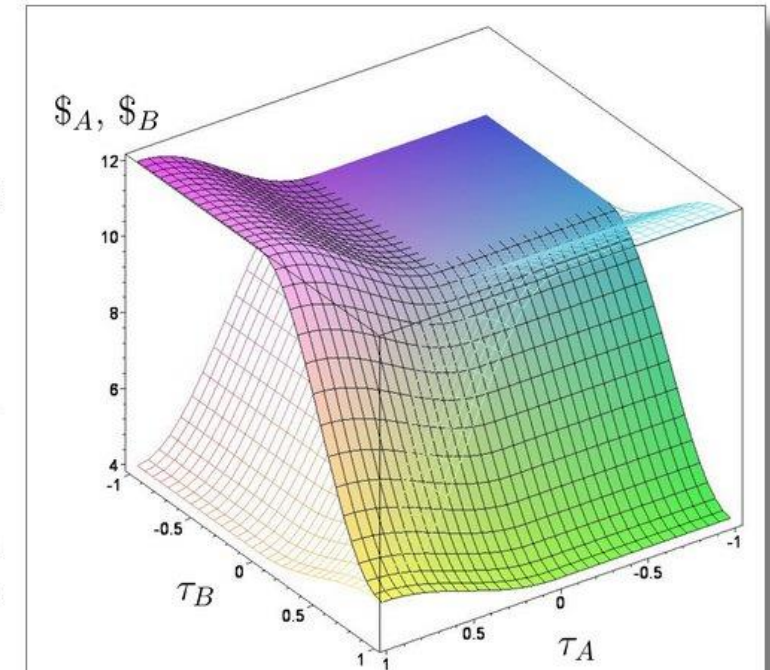
$(s_2^A, s_2^B) \hat{=} (\tau_A = 1, \tau_B = 1)$ und bleibt auch im unverschränkten Quantenspiel bestehen.

Die beiden Diagramme in der linken unteren Abbildung stellen die quantentheoretisch erweiterte Auszahlungsfunktion bei einem mittleren und dem maximalen Verschränkungswert dar. Die Struktur der Auszahlungsflächen innerhalb der vollständig klassischen Region ClCl verändert ihr Erscheinungsbild bei

Symmetrische (2 Personen)-(2 Strategien) Spiele lassen sich formal in drei unterschiedliche Spielklassen separieren (siehe Teil I).

Dominante Spiele (Set_A)

Das durch Parametersatz Set_A definierte Spiel gehört der Klasse der dominanten Spiele an. Das Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien befindet sich bei der Strategienkombination, bei welcher beide Spieler die Strategie s_2 spielen (s_2^A, s_2^B).

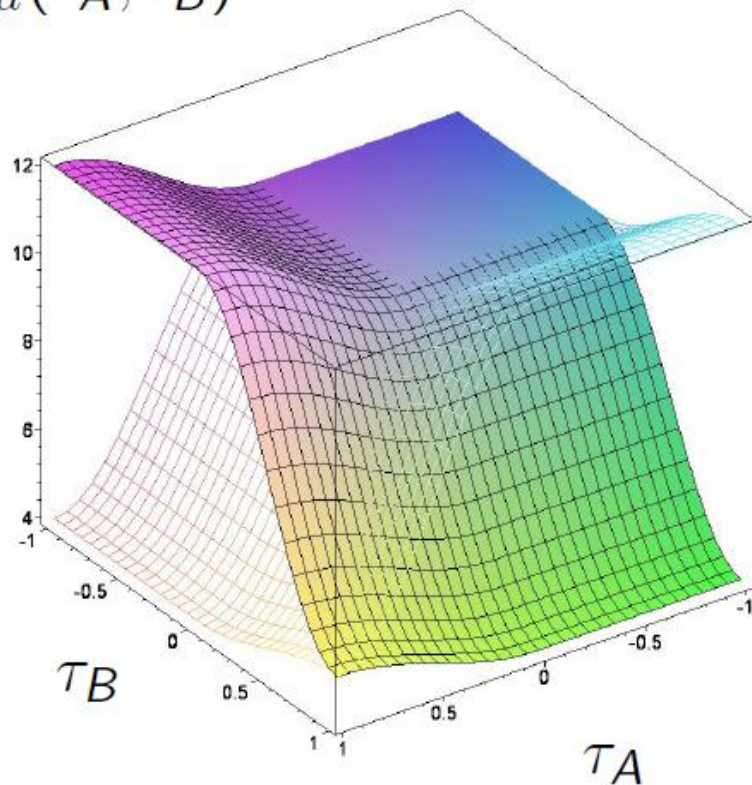


Quantentheoretisch erweiterte Auszahlung $\$_A$ des Spielers A (untransparente Fläche) und $\$_B$ des Spielers B (transparente Fläche) als Funktion der reduzierten s_1 -Quantenstrategien τ_A des Spielers A und τ_B des Spielers B in einem unverschränkten Quantenspiel ($\gamma = 0$) unter Verwendung des Parametersatzes Set_A .

Quantum extension of dominant class games

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for $\gamma = 0$ (no entanglement)

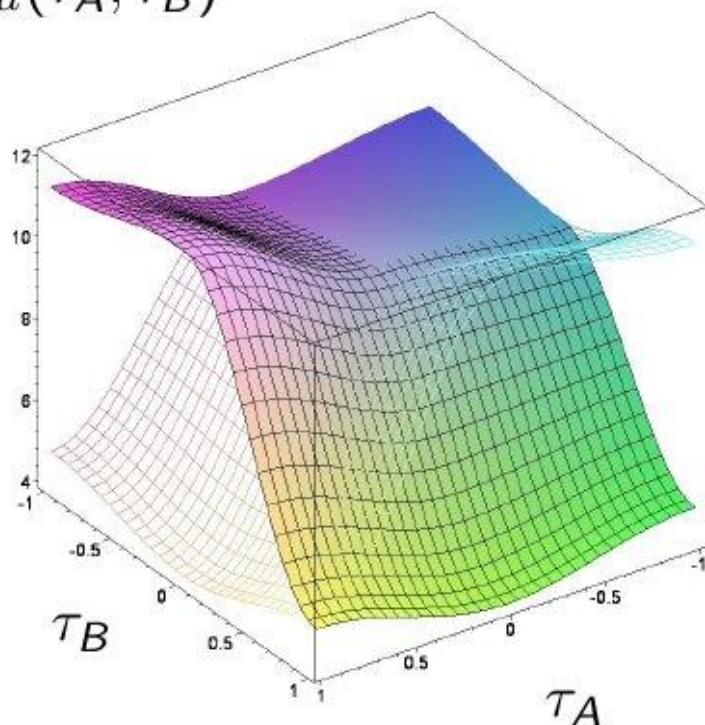
$$\$_{\mu}(\tau_A, \tau_B)$$



The diagram clearly exhibits that the non-entangled quantum game simply describes the classical version of the prisoner's dilemma game. For the case, that both players decide to play a quantum strategy ($\tau_A < 0 \wedge \tau_B < 0$) their payoff is equal to the case where both players choose the classical pure strategy s_1 ($\$A(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10$). The classical Nash equilibrium ((s_2^A, s_2^B) , the dominant strategy) corresponds to the following τ -values: $(s_2^A, s_2^B) \hat{=} (\tau_A = 1, \tau_B = 1)$.

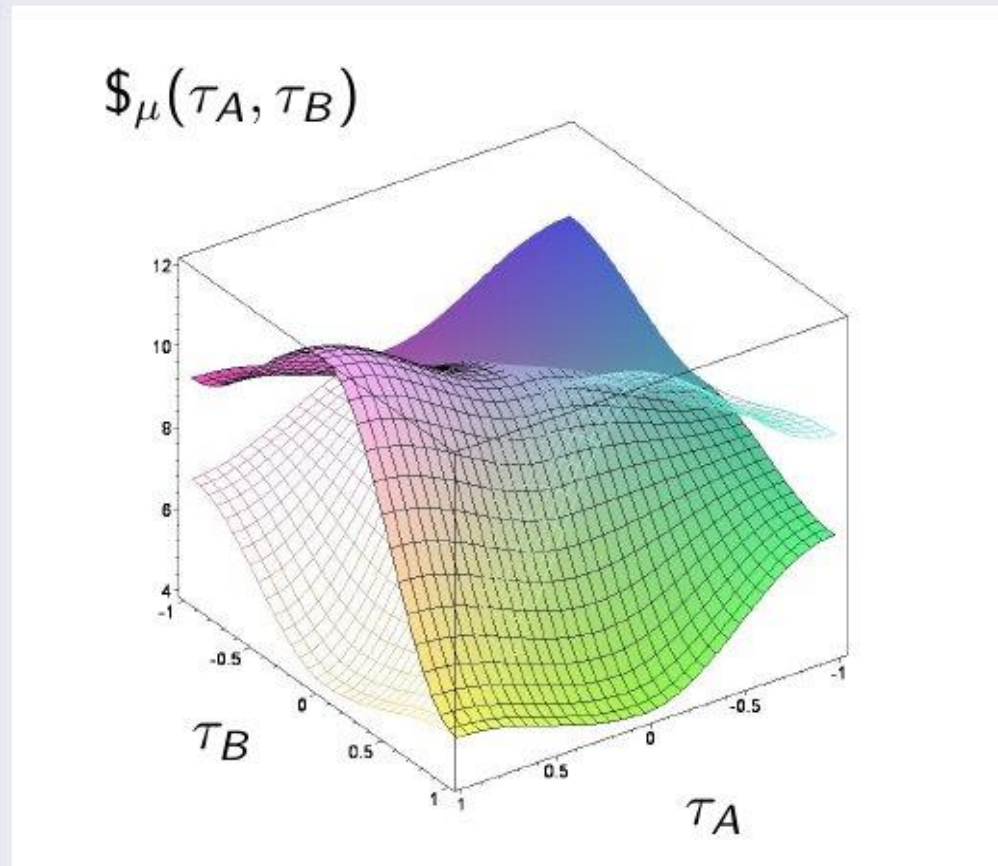
Payoff of player A (colored) and player B (wired) for $\gamma = \frac{\pi}{10} \approx 0.31$

$$\mathcal{S}_\mu(\tau_A, \tau_B)$$



For the absolute classical region $CI|C|$ the shape of the surfaces does not change, whereas for the partially classical-quantum ($CIQu$ and $QuCI$) and absolute quantum region regions $QuQu$ the payoff structure changes due to a possible interference of quantum strategies within Hilbertspace. The structure of Nash-equilibria does not change for the left picture, whereas for the following pictures the previously present dominant strategy of the prisoner's dilemma game has disappeared and a new, advisable quantum Nash-equilibrium will appear at $(\hat{Q}, \hat{Q} \hat{=} (\tau_A = -1, \tau_B = -1))$. During the transition from this figure to the next picture two separate phenomena occur. At first, for an entanglement value $\gamma_1 \approx 0.37$, the best response for player A to the strategy $s_2^B \hat{=} \tau_B = 1$ is no longer the strategy $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$, as $\mathcal{S}_A(\tau_A = -1, \tau_B = 1) \approx 5.05$ is now higher than $\mathcal{S}_A(\tau_A = 1, \tau_B = 1) = 5$. Secondly, for an entanglement value $\gamma_2 \approx 0.53$, the best response for player A to the strategy $\hat{Q}_B \hat{=} \tau_B = -1$ is no longer the strategy $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$, as $\mathcal{S}_A(\tau_A = 1, \tau_B = -1) \approx 9.96$ is for $\gamma_2 = 0.53$ lower than $\mathcal{S}_A(\tau_A = -1, \tau_B = -1) = 10$.

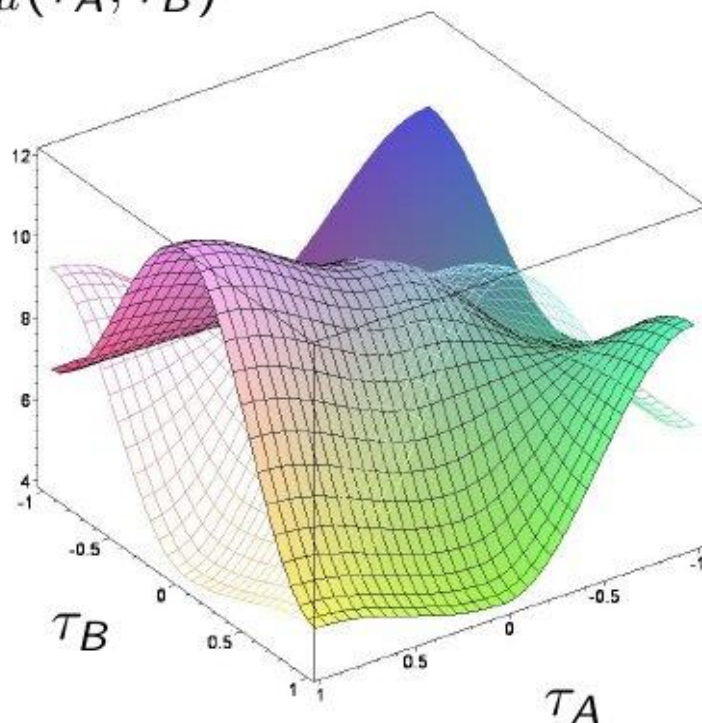
Payoff of player A (colored) and player B (wired) for $\gamma = \frac{\pi}{8} \approx 0.52$



For the absolute classical region $CI|C|$ the shape of the surfaces does not change, whereas for the partially classical-quantum ($CIQu$ and $QuCI$) and absolute quantum region regions $QuQu$ the payoff structure changes due to a possible interference of quantum strategies within Hilbertspace. The structure of Nash-equilibria did not change for the last figure, whereas for this and the following pictures the previously present dominant strategy of the prisoner's dilemma game has disappeared and a new, advisable quantum Nash-equilibrium has appeared ($\hat{Q}, \hat{Q} \hat{=} (\tau_A = -1, \tau_B = -1)$). During the transition from the last picture to this figure two separate phenomena occurred. At first, for an entanglement value $\gamma_1 \approx 0.37$, the best response for player A to the strategy $s_2^B \hat{=} \tau_B = 1$ is no longer the strategy $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$, as $\$A(\tau_A = -1, \tau_B = 1) \approx 5.05$ is now higher than $\$A(\tau_A = 1, \tau_B = 1) = 5$. Secondly, for an entanglement value $\gamma_2 \approx 0.53$, the best response for player A to the strategy $\hat{Q}_B \hat{=} \tau_B = -1$ is no longer the strategy $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$, as $\$A(\tau_A = 1, \tau_B = -1) \approx 9.96$ is for $\gamma_2 = 0.53$ lower than $\$A(\tau_A = -1, \tau_B = -1) = 10$.

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for $\gamma = \frac{\pi}{6} \approx 0.94$

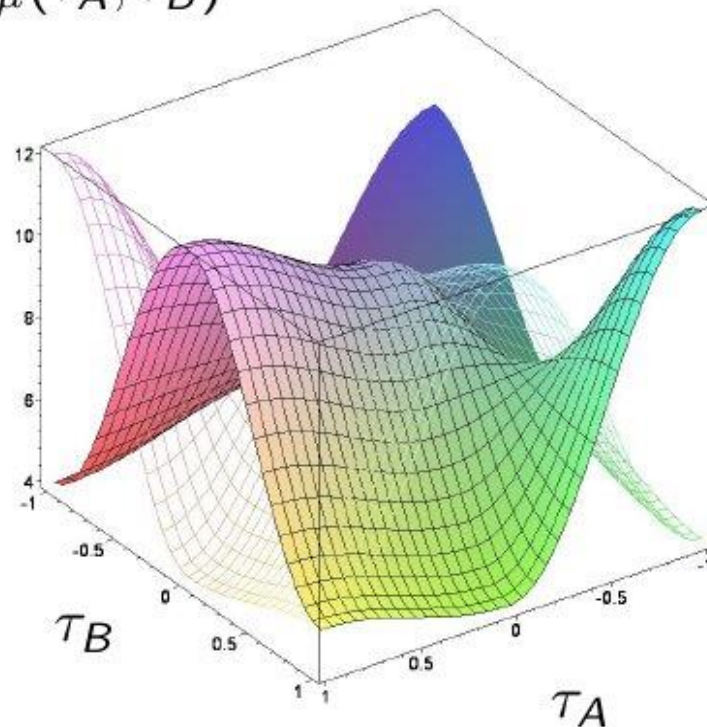
$$S_{\mu}(\tau_A, \tau_B)$$



The results show, that a quantum extension of a classical prisoner's dilemma game is able to change the structure of Nash-equilibria, and even previously present dominant strategies could become nonexistent, if the value of entanglement increases further than a defined γ -threshold. Players with a higher strategic entanglement value γ escape the dilemma as they see the advantage of the quantum strategy combination (\hat{Q}_A, \hat{Q}_B) , which is measured as if both are playing the classical strategy s_2 .

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for $\gamma = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$

$$S_{\mu}(\tau_A, \tau_B)$$



The results show, that a quantum extension of a classical prisoner's dilemma game is able to change the structure of Nash-equilibria, and even previously present dominant strategies could become nonexistent, if the value of entanglement increases further than a defined γ -threshold. Players with a higher strategic entanglement value γ escape the dilemma as they see the advantage of the quantum strategy combination (\hat{Q}_A, \hat{Q}_B) , which is measured as if both are playing the classical strategy s_2 .

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

Jupyter Notebook

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2020/21)

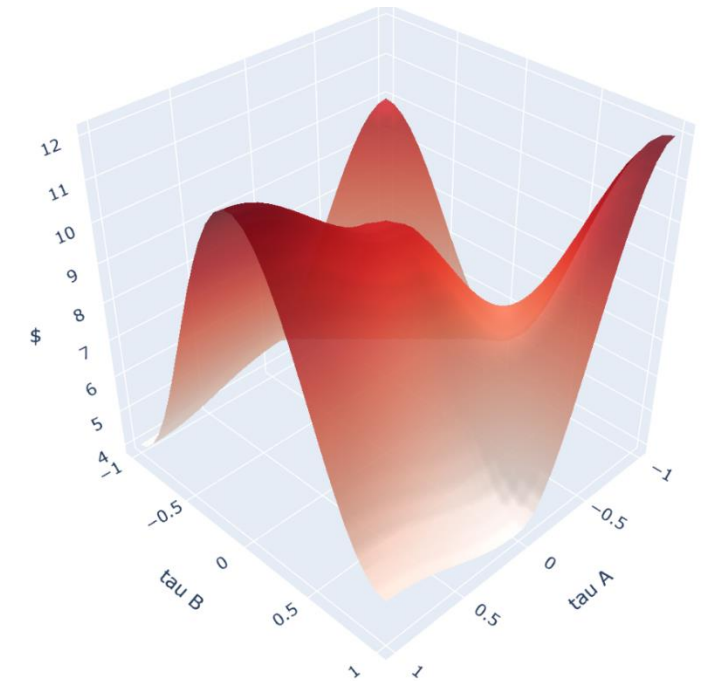
von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 26.01.2021

Ditler Vorlesungsteil: Quanten Spieltheorie

Einführung

Die Annahme des vollständig verbundenen, zufälligen Netzwerks, welches die Grundlage der deterministischen evolutionären Spieltheorie bildet, ist in realen sozialen Netzwerken oft nicht erfüllt. In realen sozialen Netzwerken bilden sich oft weitgehend abgeschlossene Cluster von miteinander verbundenen Spielern, die zu anderen Clustern nur bedingt bzw. selten Kontakt haben. Diese Art von Cluster- bzw. Cliquenbildung kann zu einer unterschiedlichen Ausprägung von sozialen Normen innerhalb der einzelnen Teilgruppen führen. Soziale Normen können sich somit herausbilden, die den einzelnen Spielern neben ihrem *homo ökonomischen* Interesse auch den Blick auf das Wohl der eigenen Gruppe nahelegen. Eine solche Art von induziertem Gruppeninteresse wird im folgenden mittels des Ansatzes der Quanten-Spieltheorie mathematisch in die deterministischen Gleichungen der evolutionären Spieltheorie eingearbeitet. Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch



Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

Physics of Socio-Economic Systems with the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Wintersemester 2017/18)
 von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
 Frankfurt am Main 10.01.2018

Dritter Vorlesungsteil: Symmetrische (2 x 2) Quantenspiele

Die Quanten Spieltheorie und der verschränkte Zwei-Spieler Zustand

Dieses Maple-Worksheet illustriert das Konzept der Quanten-Spieltheorie an mehreren Beispielen.

```

> restart:
with(linalg):
with(LinearAlgebra):
with(plots):
with(RandomTools):
with(networks):
with(stats[statplots]):
with(plottools):
with(ColorTools):
    
```

Die Quanten-Spieltheorie beschreibt den Entscheidungsraum eines Spielers, bevor dieser die endgültige Zustandsraum, dem sogenannten Hilbertraum. Die in diesem Worksheet verwendete mathematische Repräsentation wirkt. Die Entscheidungsoperatoren der Spieler A und B sind wie folgt definiert:

```

> UA:=subs({theta=ta,phi=pa},matrix(2,2,[exp(I*phi)*cos(theta/2),sin(theta/2),-sin(theta/2),exp(I*phi)*cos(theta/2)]);
UB:=subs({theta=tb,phi=pb},matrix(2,2,[exp(I*phi)*cos(theta/2),sin(theta/2),-sin(theta/2),exp(I*phi)*cos(theta/2)]);
    
```

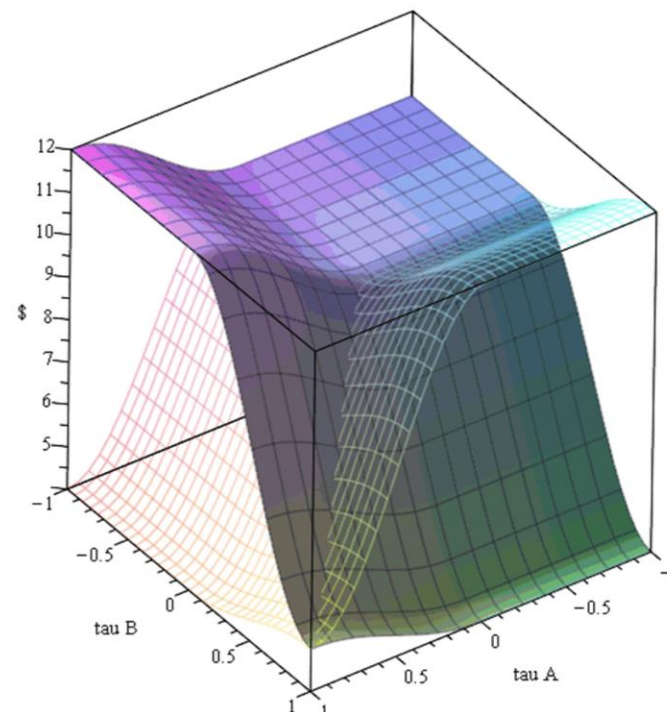
$$UA := \begin{bmatrix} e^{i p_a} \cos\left(\frac{t_a}{2}\right) & \sin\left(\frac{t_a}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{t_a}{2}\right) & e^{i p_a} \cos\left(\frac{t_a}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$UB := \begin{bmatrix} e^{i p_b} \cos\left(\frac{t_b}{2}\right) & \sin\left(\frac{t_b}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{t_b}{2}\right) & e^{i p_b} \cos\left(\frac{t_b}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Mittels des äusseren Produktes erhält man den gemeinsamen (4x4)-Entscheidungsoperator:

```

> UA_T_UB:=matrix(4,4,[
UA[1,1]*UB[1,1],UA[1,1]*UB[1,2],UA[1,2]*UB[1,1],UA[1,2]*UB[1,2],
    
```



Quantum Game Theory and Financial Crises (Anti-Coordination Class)

M. Hanauske, J. Kunz, S. Bernius und W. König "Doves and hawks in economics revisited: An evolutionary quantum game theory-based analysis of financial crises" (in Physica A 389 (2010) 5084 – 5102)

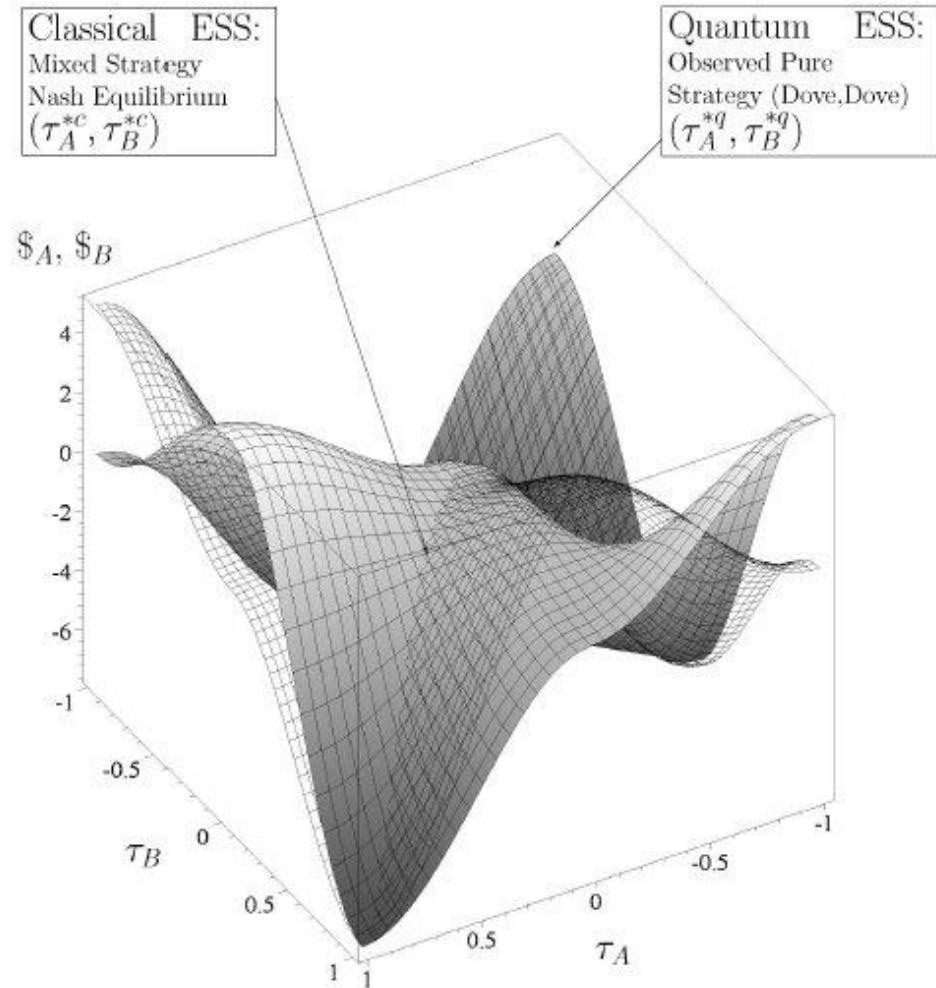


Figure 5.10.: Same description as Figure 5.7, whereas the results were calculated within a maximally entangled quantum game ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) using parameter set $P3$.

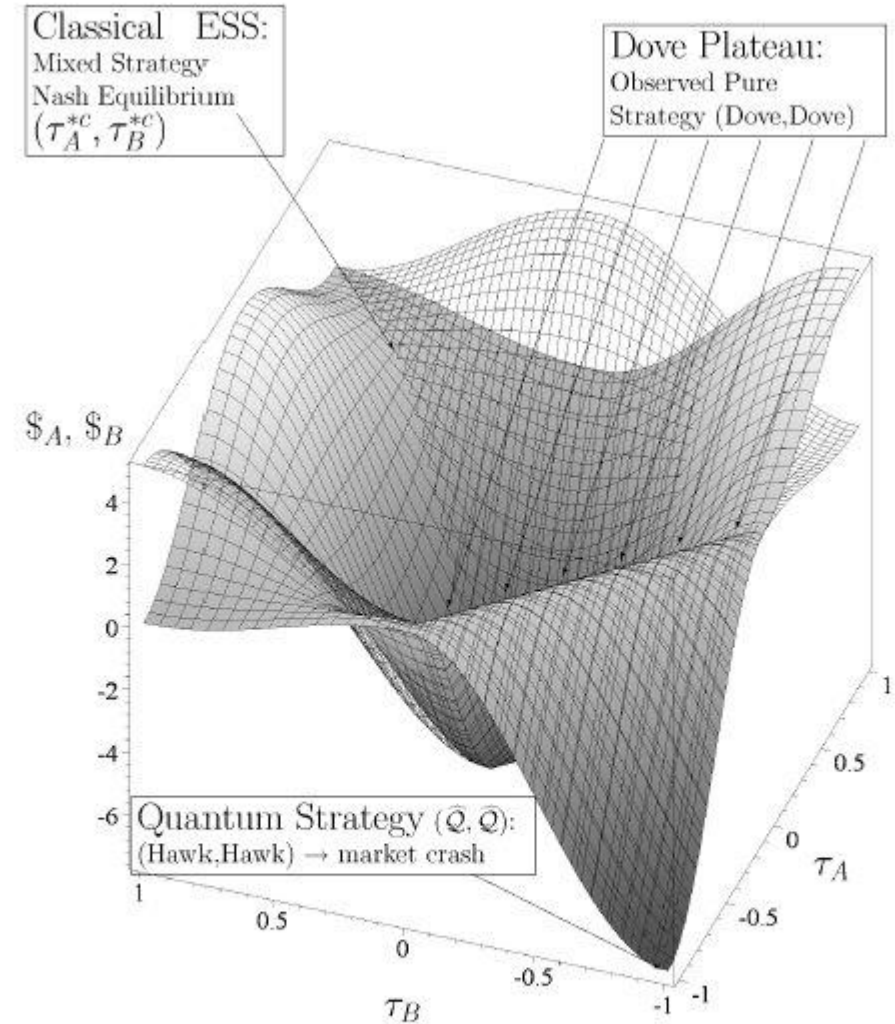


Figure 5.13.: Same description as Figure 5.12, whereas the results were calculated within a maximally entangled quantum game ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) using parameter set $P3$.

Social dilemmas can be resolved with the entangled strategic decision paths of quantum game theory.

For vanishing values of entanglement ($\gamma=0$) quantum games are identical to classical games.

Dominant Class:

Games with a dilemma: The dilemma resolves if the value of entanglement is above a defined γ -barrier.

Games without a dilemma: No further Nash-equilibria, dominant strategy remains.

Class of coordination games:

The coordination problem resolves if the value of entanglement is above a defined γ -barrier.

Class of anti-coordination games:

An additional Nash-Equilibrium appears if the value of entanglement is above a defined γ -barrier.

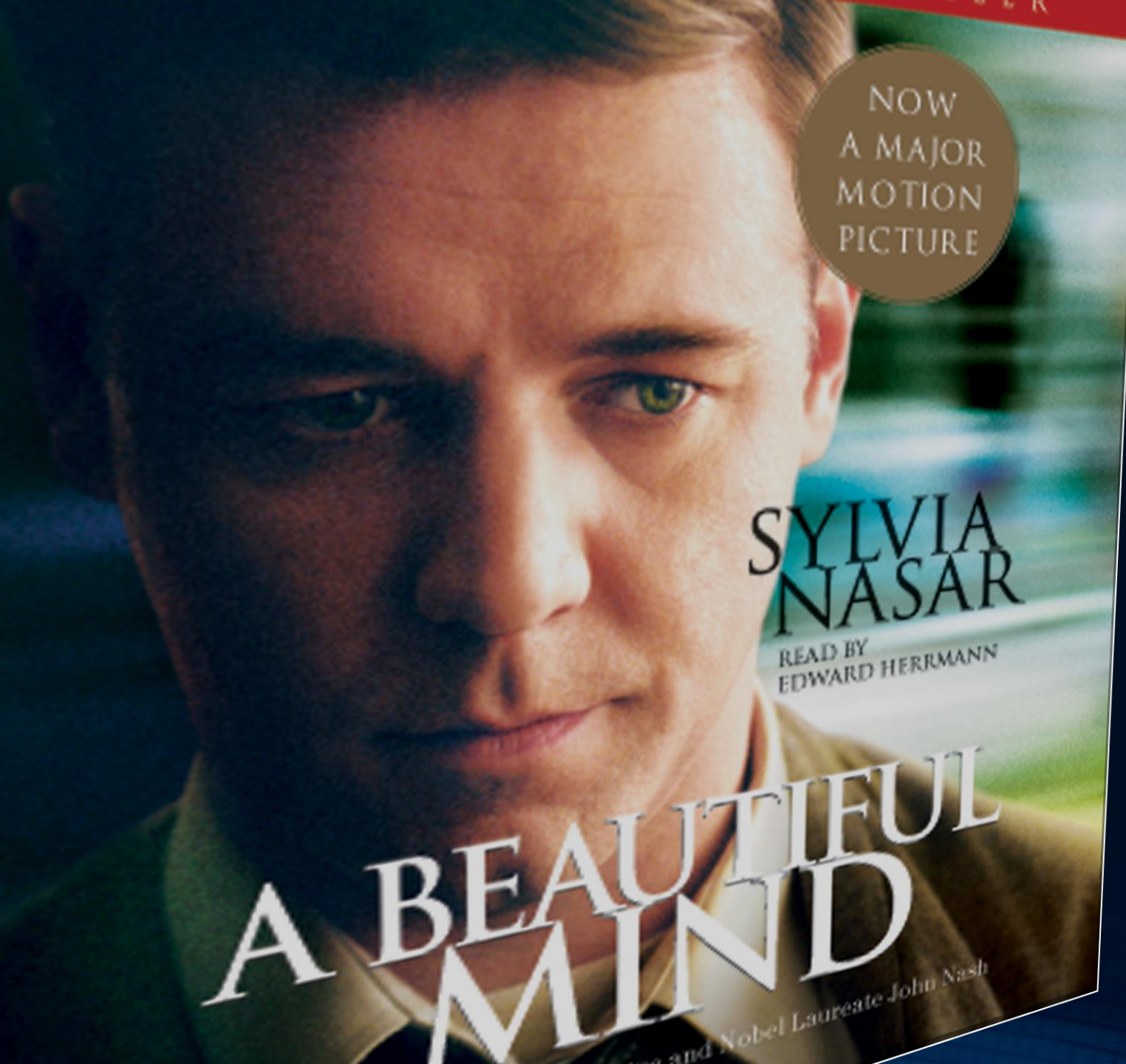
In General: If the strategy entanglement is large enough, then additional Nash equilibria can occur, previously present, not favorable dominant or evolutionary stable strategies could become nonexistent and new, favorable evolutionary stable strategies do appear for some game classes.

Vorlesungsprojekte

In den folgenden Vorlesungs- und Übungsterminen werden Sie an selbst gewählten Vorlesungsprojekten arbeiten. Diese studentischen Projekte können alleine oder in Gruppen (bis zu drei Personen) durchgeführt werden.

Mögliche Projektthemen:

- Erzeugung eines skalenfreien Netzwerkes mittels eines Jupyter Notebooks
- Evolutionäre räumliche Spiele mit drei Strategien Spiele (symmetrische (2×3) -Spiele)
- Erstellen eines C++ Programms zur numerischen Lösung der deterministischen Differentialgleichung von unsymmetrischen (2×2) -Spielen (symmetrischen (2×3) -Spielen) und Vergleich mit den Lösungen von Python (bzw. falls vorhanden mit analytischen Lösungen)
- Visualisierung und Analyse eines realen komplexen Netzwerkes



Wie ich Prof. Nash kennenlernte

3. Weltkongresses der spieltheoretischen Gesellschaft

Session 64: Semi-Plenary B1

Date: July 14, 2008

Time: 10:45 - 12:15

Location: Norris McKormick

Rational Decisions in Large Worlds

JEL codes: c7

By semi-plenary

Presented by: [Kenneth Binmore](#), University College London

Work on a Project to Study Three-Person Cooperative Games Using the 'Agencies Method' in a Variation Employing Attorney-Agents of an Automatic (or Robotic) Type

By semi-plenary

Presented by: [John Nash](#),

Im Sommer 2008 hatte ich die Möglichkeit meine Ergebnisse zur Quantenspieltheorie auf dem 3. Weltkongresses der spieltheoretischen Gesellschaft in Chicago (USA) vorzustellen. Herr Prof. John Nash war ebenfalls auf der Konferenz und hielt einen Vortrag über seine aktuelle Forschung .



GAMES 2008



THIRD WORLD CONGRESS OF THE GAME THEORY SOCIETY

JULY 13 - 17, 2008, EVANSTON, ILLINOIS, USA

Photo courtesy of © [Josh McKinnon](#)

[EDITED - Games 2008 Program - Sunday, 4 PM](#)

Founded in January 1999, the Game Theory society aims to promote the investigation, teaching, and application of game theory.

Game theory studies strategic interaction in competitive and cooperative environments. Half a century old, it has already revolutionized economics, and is spreading rapidly to a wide variety of fields.

Every four years the Society hosts its World Congress. The first was held in Bilbao, Spain in 2000. The second was held in Marseille, France in 2004. The third is to be held on the Evanston Campus of Northwestern University, in the United States.

Please send inquiries to games2008@kellogg.northwestern.edu

[SCHEDULE NOW AVAILABLE](#)

[Please click here](#)

Rhodium

Center for Game Theory
and Economic Behavior,
Kellogg School of
Management

Platinum



Gold

Managerial Economics and
Decision Sciences, Kellogg
School of Management

Silver



HOME

COMMITTEE MEMBERS

PLENARY SPEAKERS

SPEAKER INFORMATION





Aufgenommen
während des 3.
Weltkongresses
der
spieltheoretischen
Gesellschaft,
Sommer 2008,
Chicago, USA



Aufgenommen
während des 3.
Weltkongresses
der
spieltheoretisch
en Gesellschaft,
Sommer 2008,
Chicago, USA



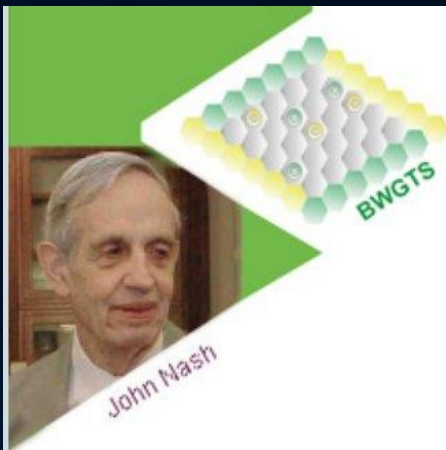
Prof.Dr. John Nash

aufgenommen
während des 3.
Weltkongresses
der
spieltheoretische
n Gesellschaft,
Sommer 2008,
Chicago, USA

Am letzten Tag der
Konferenz sprach ich
Herrn Nash auf seinen
Vortrag an und wir
unterhielten uns - unter
anderem auch über das
Einstein-Rosen-Podolsky
Paradoxon.



Das Nash-Fest in Sao Paulo (Brasilien, 2010)



John Nash

SECOND BRAZILIAN WORKSHOP OF THE GAME THEORY SOCIETY

in honor of JOHN NASH, on the occasion of the 60th anniversary of Nash equilibrium



Event

Program

Papers

Registration

Travel & Venue

[General Information](#) [Financial Support](#) [Location](#)
[Sponsors](#) [Committee](#) [Participants](#) [Contact us](#)

General Information

It is a great pleasure to invite you to participate in the SECOND BRAZILIAN WORKSHOP OF THE GAME THEORY SOCIETY, the 1st São Paulo School of Advanced Sciences on Game Theory of FAPESP - The State of São Paulo Research Foundation. It will be held at the University of São Paulo, from July 29 to August 4, 2010. The event will honor JOHN NASH, on the occasion of the 60th anniversary of Nash equilibrium.

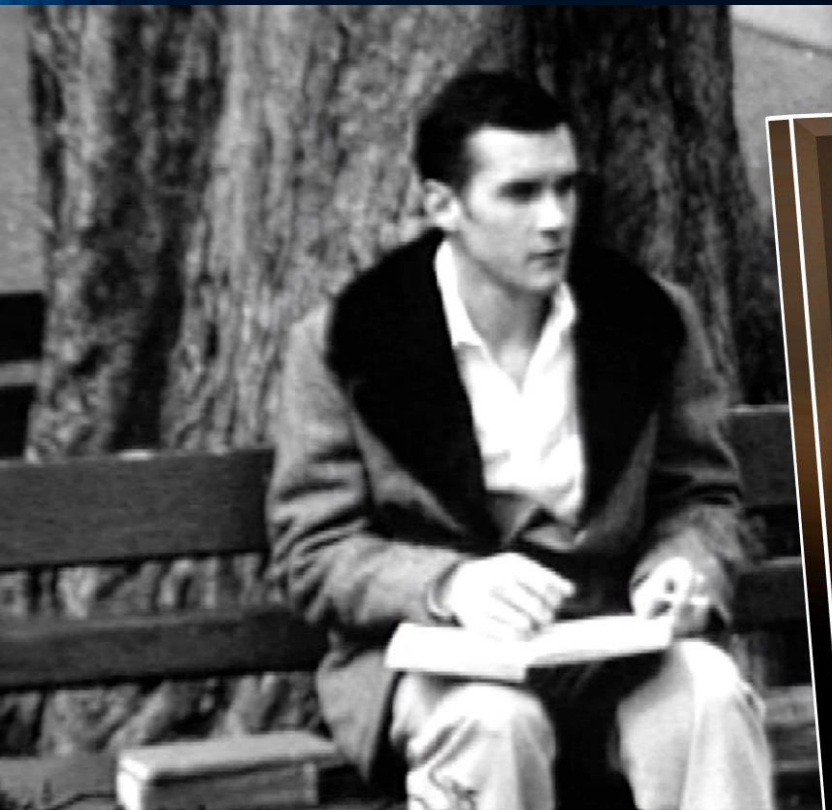
The workshop will offer the participants the opportunity to interact with some of the most productive researchers in Game Theory. The week-long event will consist of conferences, contributed papers sessions and mini-courses which will start at the introductory level and will reach the frontiers of current research. All graduate students should send a recommendation letter from their supervisors to bwgt2010@usp.br. Videos des Workshops unter [http//..](http://..)

ORGANIZERS

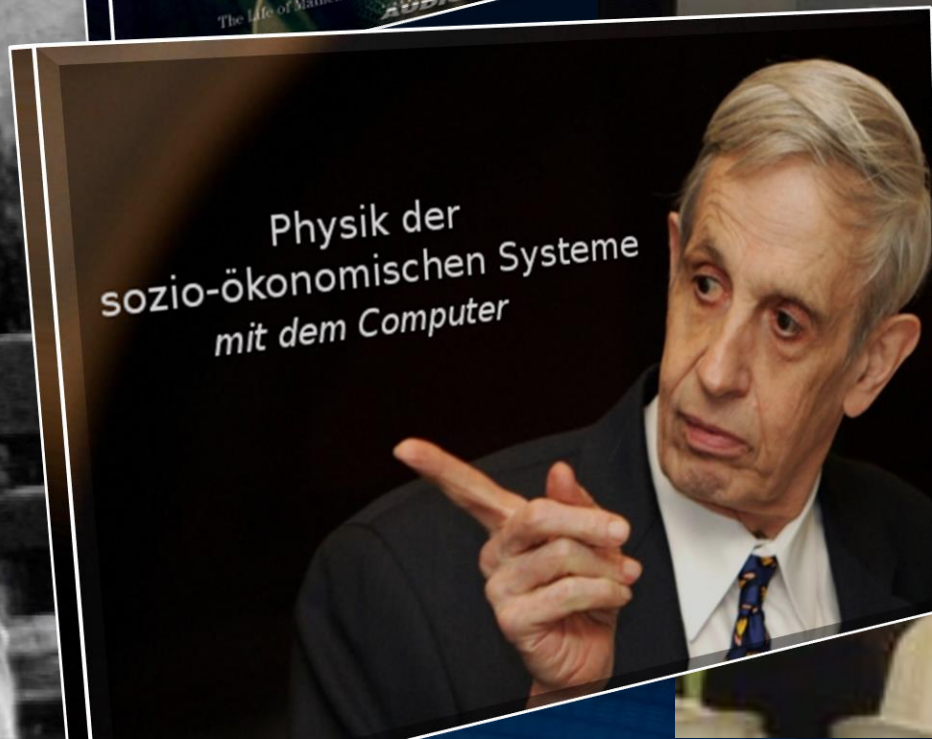


John Forbes Nash

John Forbes Nash Jr.
at Princeton university
in 1949



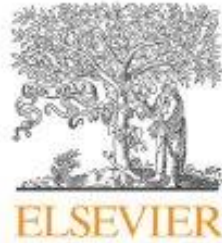
"2nd Brazilian Workshop of the Game Theory Society" in honor of John Nash (27.7. - 04.08.2010, Sao Paulo, Brazil)











Contents lists available at ScienceDirect

Physica A

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physa



Doves and hawks in economics revisited: An evolutionary quantum game theory based analysis of financial crises

Matthias Hanauske^{a,*}, Jennifer Kunz^b, Steffen Bernius^a, Wolfgang König^c

^a Institute of Information Systems, Goethe-University, Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt/Main, Germany

^b Chair of Controlling & Auditing, Goethe-University, Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt/Main, Germany

^c House of Finance, Goethe-University, Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt/Main, Germany

ARTICLE INFO

Article history:

Received 14 April 2009

Received in revised form 22 April 2010

ABSTRACT

The last financial and economic crisis demonstrated the dysfunctional long-term effects of aggressive behaviour in financial markets. Yet, evolutionary game theory predicts that

Acknowledgements

M.H. would like to thank John Forbes Nash Jr. for the inspiring discussion during the Third Congress of the Game Theory Society (Games 2008). The conversation initiated and motivated the author to broaden his work to an evolutionary context. J.K. would like to thank Carsten Heineke for helpful comments especially regarding the economic interpretation.

#####

On Mon, 9 Aug 2010 hanauske@wiwi.uni-frankfurt.de wrote:

[Hide Quoted Text]

Dear Professor Nash,

I hope you enjoyed the 'Nash-Fest' at Sao Paulo and you and your family are well arrived back at home - it was very nice meeting you again.

After our short conversation at the end of the 'Games 2008'-conference I wrote an article in which I acknowledged you (see page 18). After more than one year, the article is now going to be published in 'Physica A'; I have attached the article to this E-Mail.

Materials concerning the talk I gave at the 'Second Brazilian Workshop of the Game Theory Society' can be found at:

<http://evolution.wiwi.uni-frankfurt.de/BWGT2010/>

All the best greetings from Frankfurt to you and your son John.

Sincerely Yours,
Matthias Hanauske

Dr. phil. nat. Matthias Hanauske
Institut für Wirtschaftsinformatik
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Grüneburgplatz 1

Date: Mon, 9 Aug 2010 18:02:29 -0400 [08/10/2010 12:02:29 AM CEST]

From: John F. Nash <xkjfnj@Princeton.EDU>

To: hanauske@wiwi.uni-frankfurt.de

Subject: Re: Article in which I acknowledged you

1 unnamed 2.04 KB 

This message was written in a character set (X-UNKNOWN) other than your own.

If it is not displayed correctly, [click here](#) to open it in a new window.

Dear Dr. Hanauske,

I know nothing, personally, about "Quantum Game Theory".

For example "quantum computing" has been promising (if it could actually be developed to work in a practical sense) truly fabulous accelerations of the speed of computations.

(To me it seems very paradoxical that we would move from the constraint of "Heisenberg uncertainty" to a great ENHANCEMENT of the ability of machines to find the truth through calculations.)

Until it is materially achieved I will probably remain naturally suspicious of the possibility of "magic benefits through quantization".

But, notwithstanding all uncertainties (and the Uncertainty Principle itself!) I want to thank you sincerely for the kind and well-toned acknowledgment that you gave in your recent publication.

Yours Truly,

John F. Nash, Jr.

#####

Second Brazilian Workshop of the Game Theory Society

Ich lernte Herr Prof. John Nash im Jahre 2008 auf dem 'Third World Congress of the Game Theory Society' an der Northwestern University in der Nähe von Chicago das erste Mal kennen (siehe Bilder im oberen Bereich des rechten Panels) und unterhielt mich auch persönlich mit ihm (über evolutionäre Spieltheorie und das Einstein-Rosen-Podolski Paradoxon). Im Jahre 2010 hatte ich dann das Glück ihn und seine Familie auf einer weiteren Konferenz zu treffen. Die beiden unteren Videos entstanden während des Workshops 'Second Brazilian Workshop of the Game Theory Society', welcher im Jahre 2010 an der Universität Sao Paulo in Brasilien stattfand. Der Workshop wurde anlässlich des 60ten

Jubiläums des Nash-Gleichgewichtes veranstaltet und neben Prof. Nash und seiner Familie waren viele berühmte Spieltheoretiker anwesend. Das linke Video entstand am ersten Tag der Vorlesung als Prof. Nash das erste Mal in den Vortragsaal kam und das rechte Video zeigt eine Fragerunde an Prof. Nash, die von Prof. Marilda Sotomayor organisiert wurde.



Im unteren Bereich des rechten Panels finden Sie Bilder, die während eines Barbecue-Essens entstanden sind. Unter folgendem Link finden Sie das gesamte [Programm des Workshops](#).

Da ich das erste Mal in Brasilien war, schaute ich mir das Land auch ein wenig an und die folgenden Bilder wurden von mir in Rio und dem Pantanal aufgenommen.



Games 2008 - Third World Congress of the Game Theory Society

Kellogg School of Management at Northwestern University (near Chicago)

from July 13 to July 17, 2008



Second Brazilian Workshop of the Game Theory Society

In honor of John Nash, on the occasion of the 60th anniversary of Nash equilibrium

University of Sao Paulo, from July 29 to August 4, 2010

