

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*VORLESUNGSREIHE
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
25. MAI, 2023*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

6. Vorlesung

Vorlesung 6

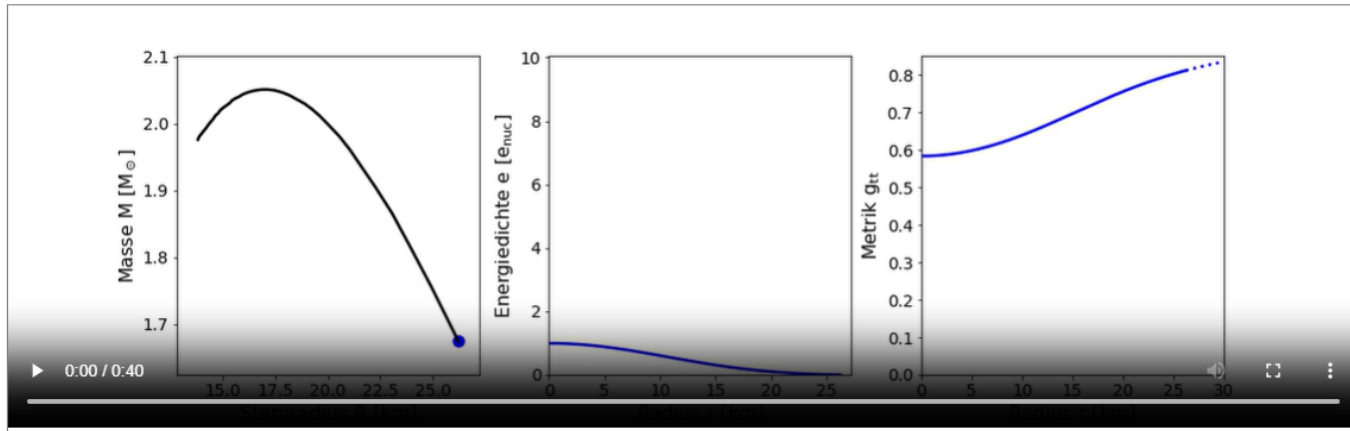
Die im rechten Panel dieser Vorlesung dargestellten TOV-Gleichungen beschreiben das Druck- und Energiedichte-Verhalten innerhalb eines sphärisch symmetrischen Objektes und geben außerdem die Innenraum-Metrik des Objektes an. Außerhalb des Objektes ist die Raumzeit durch die Schwarzschildmetrik definiert, welche aufgrund des Birkhoff-Theorems die einzige sphärisch symmetrische Lösung der Einsteingleichung im Vakuum ($T^{\mu\nu} \equiv 0$) ist. Mittels der TOV-Gleichungen können die unterschiedlichsten Objekte in guter Näherung beschrieben werden. So kann man mit ihnen sowohl das Innere der Sonne, als auch die Eigenschaften von Weißen Zwergen und Neutronensternen gut beschreiben. Nach einer kurzen Einführung in die Astrophysik der Weißen Zwerge, Neutronensternen und Quarksterne werden in einem Python Jupyter Notebook, die TOV-Gleichungen analytisch hergeleitet und ihre numerische Lösung, unter Verwendung einer polytropen Form der Zustandsgleichung der Neutronenstern-Materie behandelt. Zusätzlich werden wir in dieser Vorlesung den Spezialfall des Gravitationsfeldes einer Kugel konstanter Dichte behandeln (siehe rechtes Panel, Arbeiten von Karl Schwarzschild im Jahre 1916) und die gekrümmte Raumzeit eines Neutronensterns in einem eingebetteten Diagramm visualisieren.

Weiße Zwerge, Neutronensterne und Quarksterne

Neutronensterne sind neben weißen Zwergen und stellaren schwarzen Löchern die möglichen Endzustände des Evolutionsprozesses einer Sonne. Neutronensterne werden in gewaltigen Supernova-Explosionen geboren und sie stellen den letzten stabilen Zustand der Materie dar, bevor sie zu einem schwarzen Loch kollabiert. Diese faszinierenden stellaren Objekte besitzen lediglich einen Durchmesser von 20 Kilometern, vereinen dort jedoch auf engstem Raum eine Masse von 500 000 Erdmassen. Von den etwa 100 Millionen Neutronensternen die es in unserer Galaxie, der Milchstraße, vermutlich gibt, sind ca. 3000 als Pulsare bekannt. Pulsare sind schnell rotierende Neutronensterne mit einem starken Magnetfeld (bis zu 10^{11} Tesla), die bevorzugt entlang der Pole elektromagnetische Strahlung aussenden. Einige dieser Neutronensterne, die sogenannten Millisekunden-Pulsare rotieren so schnell, dass sie pro Sekunde mehrere hundert Umdrehungen schaffen. Für diese Millisekunden-Pulsare ist unser sphärisch symmetrischer Ansatz der Metrik nicht mehr erfüllt. Unter den bekannten Neutronensternen gibt es auch einige, die sich in binären Systemen befinden, wobei ihr Begleiter entweder ein normaler Stern, ein Planet, ein weißer Zwerg oder auch wieder ein Neutronenstern sein kann. Diejenigen Neutronensterne, die in Zweiersystem umeinander kreisen, verringern ihren Abstand im Laufe der Zeit, da sie Energie durch Aussendung von Gravitationswellen abgeben. Das derzeit beeindruckendste Binärsystem ist der sogenannte Doppelpulsar: PSR J0737-3039A/B, welches im Jahre 2003 entdeckt wurde. Kollidieren zwei Neutronensterne miteinander wird eine enorme Energie in Form von Gravitationswellen frei gesetzt und eine solche Neutronenstern-Kollision konnte im Jahre 2017 mittels der Gravitationswellen-Detektoren beobachtet werden (siehe [GW170817](#)). Da die Dichte im inneren Bereich des Neutronensterns den mehrfachen Wert der normalen nuklearen Kerndichte erreichen kann, ist es wahrscheinlich, dass ein Phasenübergang zu Quarkmaterie stattfindet - diese Sterne werden als sogenannte hybride, bzw. Quarksterne bezeichnet (siehe [GOETHE-UNI online im Jahre 2021: Gravitational waves could prove the existence of the quark-gluon plasma](#)).

Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichung

Unter der Annahme einer sphärisch symmetrischen Materieverteilung einer idealen Flüssigkeit (z.B. Neutronenstern Materie) kann man die Einsteingleichung in die sogenannten TOV-Gleichungen umschreiben. In diesem Jupyter Notebook wird gezeigt, wie man von der Einsteingleichung zu den TOV-Gleichungen gelangt und ihre numerische Lösung behandelt.



Vorlesung 6

Bis zu dieser Vorlesung hatten wir die raumzeitliche Struktur der Metrik als gegeben vorausgesetzt (Schwarzschild-Metrik bzw. Kerr-Metrik) und die Bewegungen von Probekörpern, im sonst materiefreien Raum, mittels der Geodätengleichung studiert. In dieser Vorlesung betrachten wir den umgekehrten Fall: Wie kann man anhand einer speziellen Materie/Energieverteilung im Raum zu der zugehörigen raumzeitliche Struktur gelangen. Wir betrachten im Folgenden ein statisches, sphärisch symmetrisches Objekt (in Näherung z.B. die Erde, Sonne oder ein Neutronenstern) und setzen die Metrik im Inneren wie folgt an:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen $\phi(r)$ und $m(r)$ an dieser Stelle noch unbekannt sind, später aber eine physikalische Bedeutung erhalten. Die Materie setzen wir als eine ideale Flüssigkeit mit folgendem Energie-Impuls Tensor an:

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} e(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(r) \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen $e(r)$ und $p(r)$ die Energiedichte und den Druck der Materie darstellen. Die raumzeitliche Struktur im Inneren der Materie erhält man mittels der Einstein Gleichung

$$G^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu}_{\nu} R = 8\pi T^{\mu}_{\nu},$$

die im betrachteten Fall ein System von vier gekoppelten Differentialgleichungen darstellt. Zusätzlich folgt aus der Einsteingleichung die kovariante Erhaltung des Energie-Impulses. Diese sogenannten hydrodynamischen Gleichungen sind durch die folgenden vier Gleichungen definiert:

$$\nabla_{\mu} G^{\mu}_{\nu} = 0 \rightarrow \nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0,$$

wobei die kovariante Ableitung eines Tensors zweiter Stufe wie folgt definiert ist:

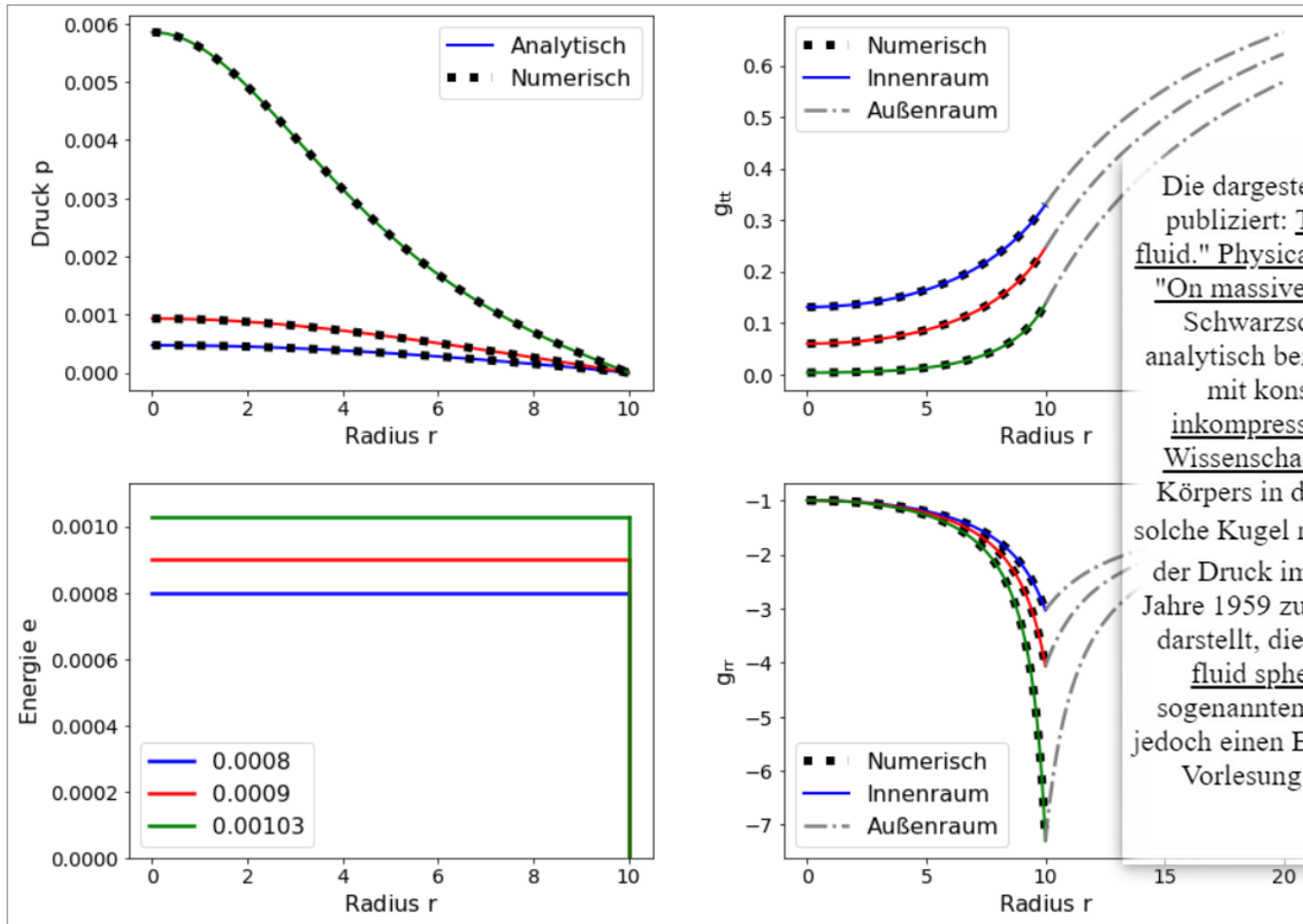
$$\nabla_{\alpha} T^{\mu}_{\nu} = \partial_{\alpha} T^{\mu}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} T^{\rho}_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu} T^{\mu}_{\rho}.$$

Durch Umschreiben und Kombination der Gleichungen gelangt man zu einem System von drei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung, die sogenannten *Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichungen*:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 e(r), \\ \frac{dp}{dr} &= -(e(r) + p(r)) \frac{d\Phi}{dr}, \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2m(r))} \end{aligned}$$

Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit (konstante Dichte)

Die TOV-Gleichungen besitzen für den Spezialfall einer sphärisch symmetrischen Materieverteilung konstanter Dichte eine analytische Lösung ("Innere Schwarzschild Lösung", siehe rechtes Panel dieser Vorlesung). Die unteren Abbildungen zeigen die Eigenschaften von drei Körpern mit einem Radius R von 10 km und unterschiedlicher konstanter Dichte ρ_0 .

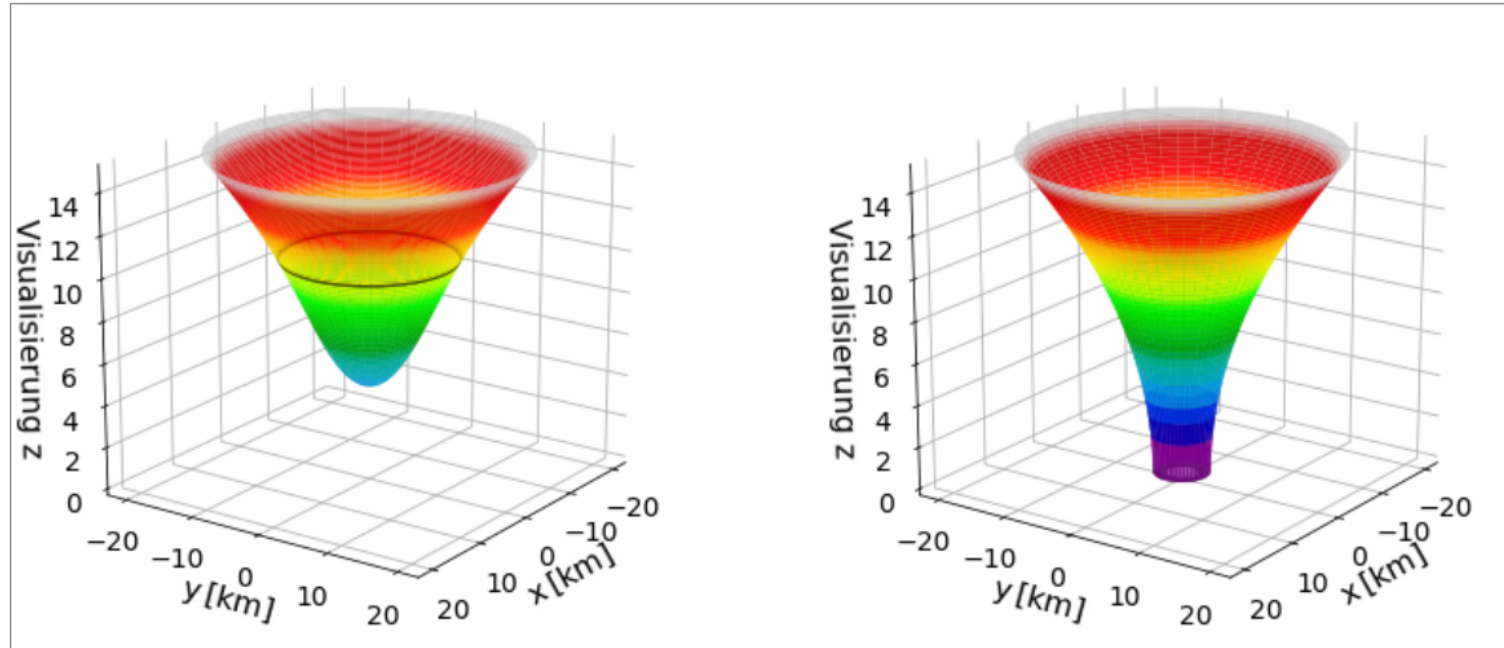


Die dargestellten TOV-Gleichungen wurden im Jahre 1939 in den folgenden zwei Arbeiten publiziert: [Tolman, Richard C. "Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid." *Physical Review* 55.4 \(1939\): 364.](#) und [Oppenheimer, J. Robert, and George M. Volkoff. "On massive neutron cores." *Physical Review* 55.4 \(1939\): 374.](#) Es ist beachtlich, dass Karl Schwarzschild bereits im Jahre 1916 einen wichtigen Spezialfall der TOV-Gleichungen analytisch berechnete. Herr Schwarzschild betrachtete einen sphärisch symmetrischen Körper mit konstanter Dichte (siehe [Karl Schwarzschild, "Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit", *Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Reimer, Berlin 1916, S:424-434](#)) und berechnete die Eigenschaften dieses Körpers in der Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie. In seiner Arbeit zeigte er, dass eine solche Kugel nicht kleiner als $\frac{9}{8}$ seines Schwarzschildradius werden kann ($R > \frac{9}{8} R_S$), da sonst der Druck im Zentrum des Körpers unendlich wird. Hans Adolf Buchdahl gelang es dann im Jahre 1959 zu zeigen, dass dieser Wert eine absolute Grenze der Stabilität von Körpern/Sternen darstellt, die sogenannte "Buchdahl Grenze" (siehe [Buchdahl, Hans A. "General relativistic fluid spheres." *Physical Review* 116.4 \(1959\): 1027.](#)). Die einzige Ausnahme sind die sogenannten "Gravastars", die auch kleiner als diese Grenze werden können. Diese besitzen jedoch einen Bereich im Stern, der eine negative Energiedichte aufweist. Im linken Panel dieser Vorlesung wird die von Schwarzschild gefundene Lösung analytisch hergeleitet und die Ergebnisse numerisch überprüft.

In der linken oberen Abbildung sind die drei analytischen Druckprofile und links unten die Energiedichten der "Sterne" dargestellt, wobei die schwarzen Punkte die numerisch berechneten Vergleichsrechnungen darstellen. Die rechten Abbildungen zeigen die Raumzeit-Eigenschaften im Innen- und Außenraum der Sterne (oben g_{tt} und unten g_{rr}). Der Energiedichte Wert des grünen Sterns ist nahe dem kritischen Wert der "Buchdahl Grenze" (siehe rechtes Panel dieser Vorlesung: $R_{\text{crit}} = \frac{9}{8} R_S = \frac{9}{8} 2M \rightarrow e_{\text{crit}} = \frac{1}{3\pi R^2} \underset{R=10}{\approx} 0.00106$). Der Druck im Zentrum des Sterns hat einen hohen Wert, die Metrik-Komponente g_{tt} im Zentrum ist nahe null und die Metrik-Komponente g_{rr} am Sternrand ist sehr klein. Durch Klicken auf die obere Abbildung gelangt man zu dem entsprechenden Jupyter Notebook.

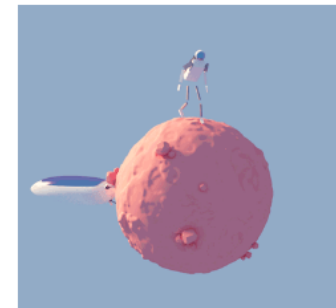
Eingebettetes Diagramm der räumlichen Hypersphäre der Mannigfaltigkeit eines Neutronensterns

Die untere rechte Abbildung zeigt das eingebettete Diagramm der räumlichen Hypersphäre Σ_t der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , die durch ein massives kompaktes Objekt (beschrieben durch die TOV-Gleichungen mit polytropem Ansatz der Zustandsgleichung) gekrümmt ist. Die schwarze Linie markiert die Oberfläche des Körpers und somit die Grenze zwischen der Innenraum- und Außenraum-Metrik (Schwarzschild Metrik). In der rechten Abbildung wird zum Vergleich die räumliche Hypersphäre eines schwarzen Lochs mit gleicher Masse dargestellt. Durch Klicken auf die untere Abbildung gelangt man zu dem entsprechenden Jupyter Notebook.



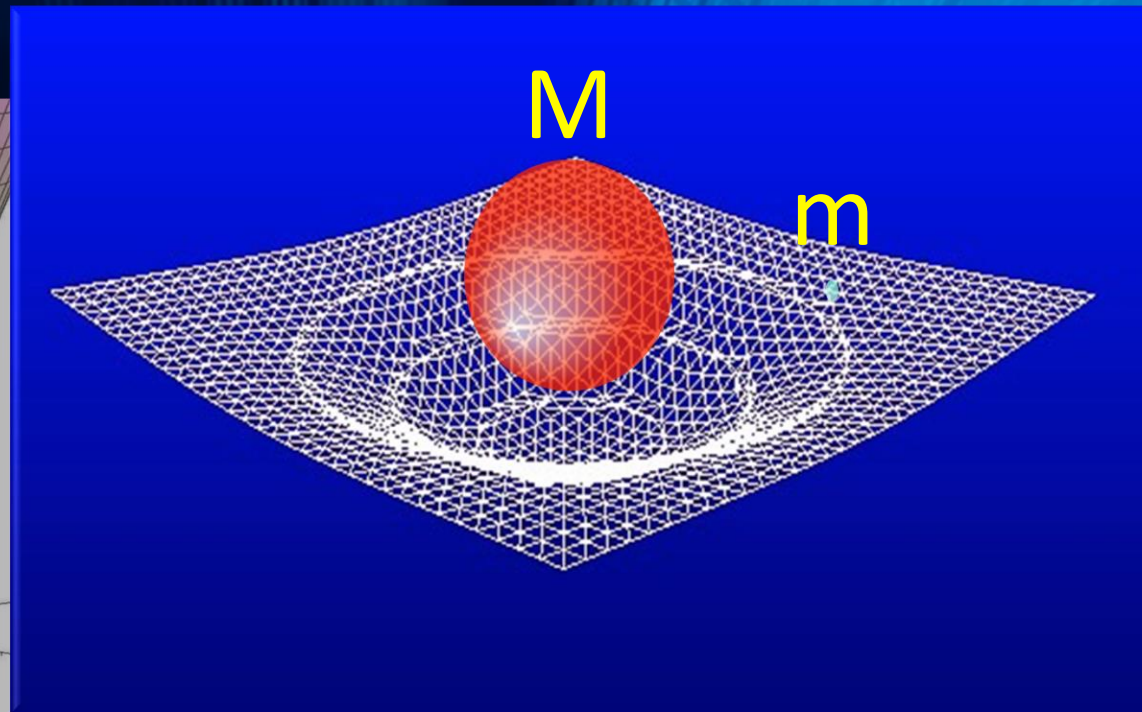
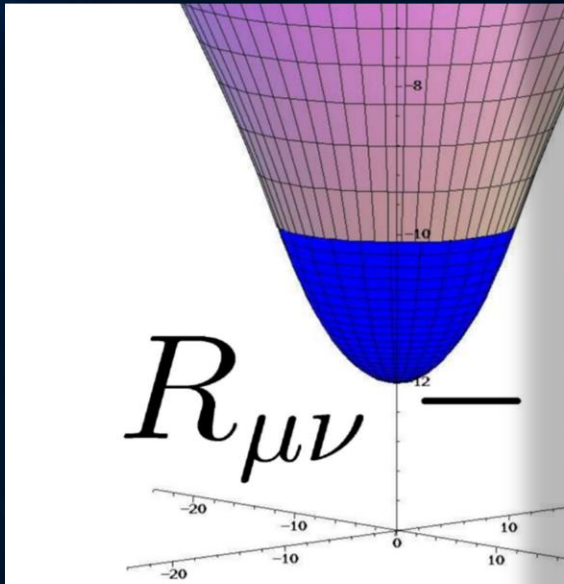
Weiterführende Links

- [Folien der 6.Vorlesung](#)
- [Vorlesungsaufzeichnung der 6.Vorlesung](#)
- [View Jupyter Notebook: Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff \(TOV\) Gleichung](#)
- [Download Jupyter Notebook: Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff \(TOV\) Gleichung \(2023\)](#)
- [View Jupyter Notebook: Die TOV-Gleichung: Zusätzliche Betrachtungen](#)
- [Download Jupyter Notebook: Die TOV-Gleichung: Zusätzliche Betrachtungen](#)
- [NASA's Neutron star Interior Composition Explorer \(NICER\)](#)
- [Realistische Zustandsgleichungen auf CompOSE](#)



Allgemeinen Relativitätstheorie

Die Einsteingleichung



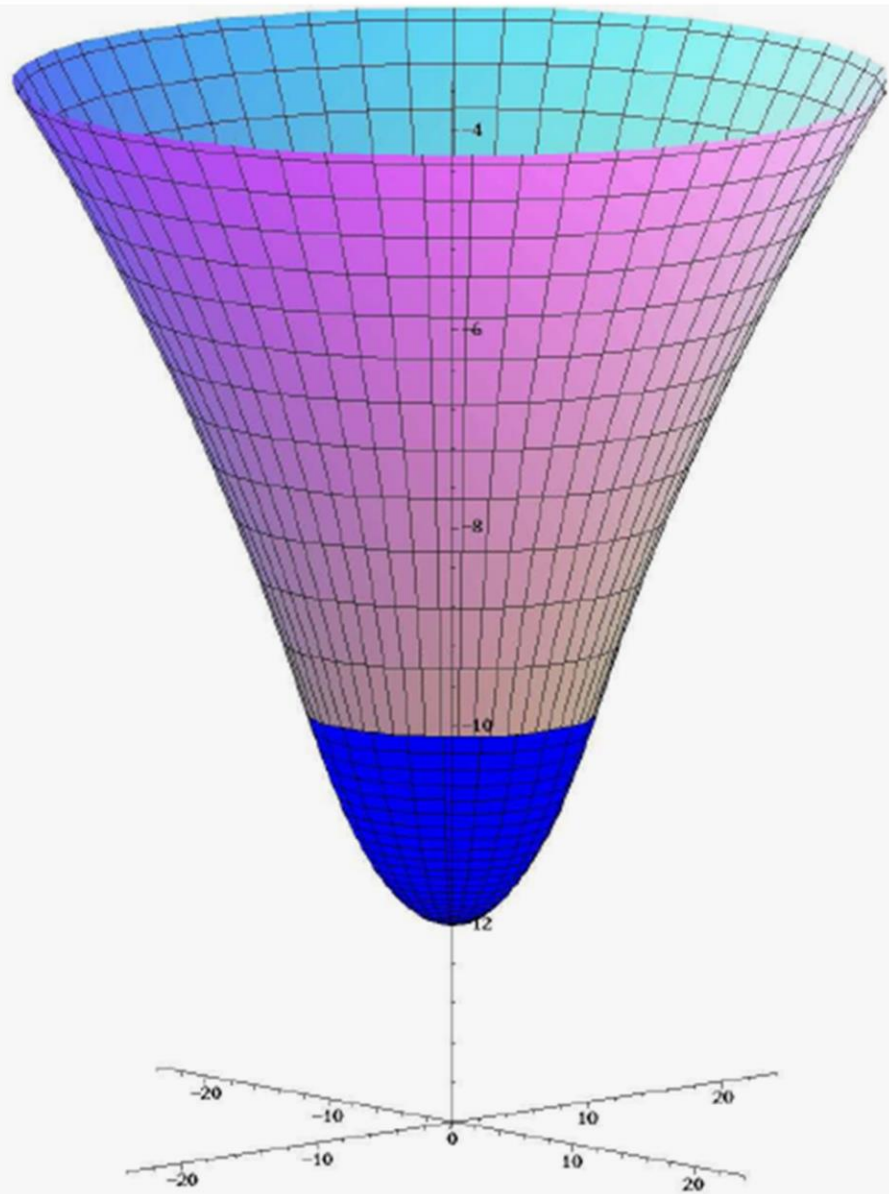
„Allgemeine Relativitätstheorie“ (ART) der

$$T_{\mu\nu}$$

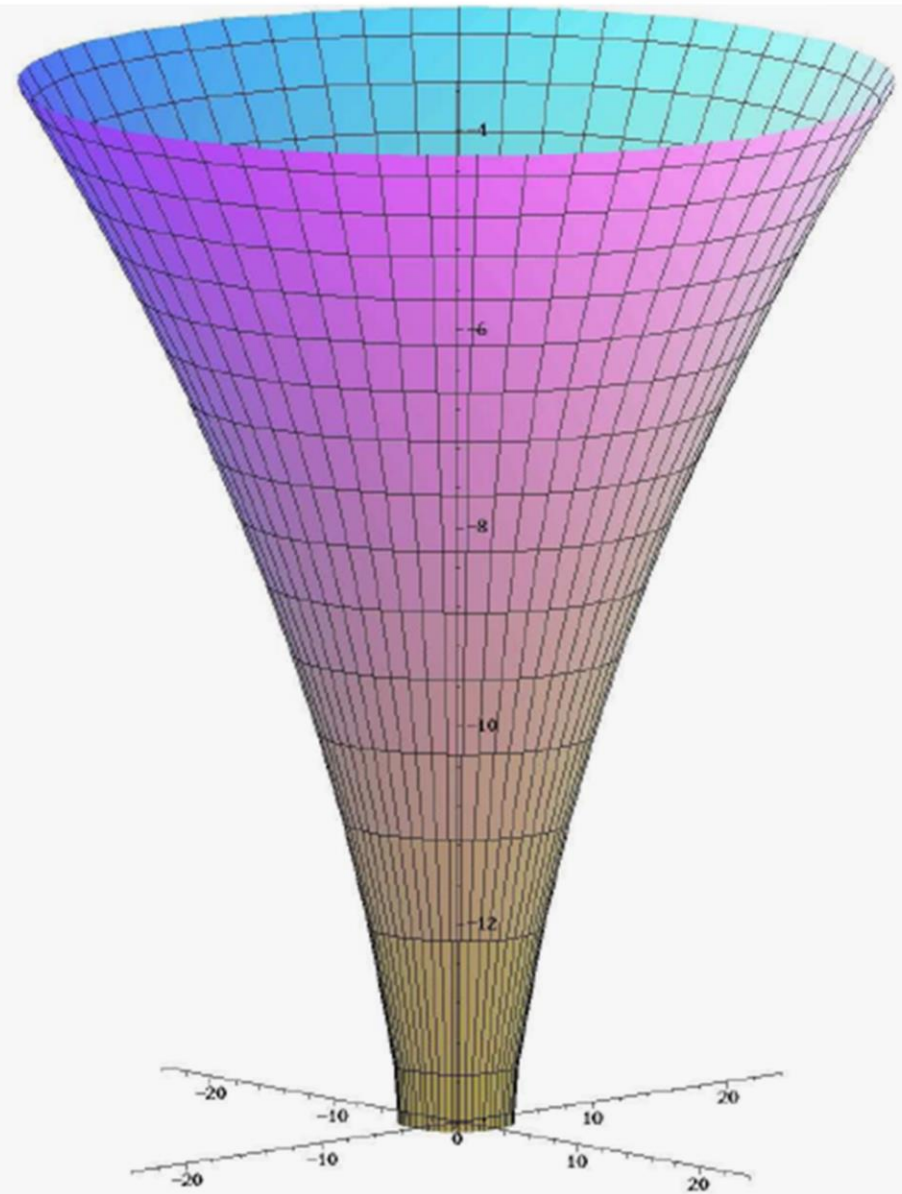
Raumzeit-Krümmung = Energie

Die ART ist eine sehr revolutionäre Theorie. Sie besagt, dass jegliche Energieformen (z.B. Masse der Erde) die „Raumzeit“ verbiegen und durch diese Krümmung des Raumes und der Zeit resultiert die Gravitationskraft (Schwerkraft).

Neutronenstern



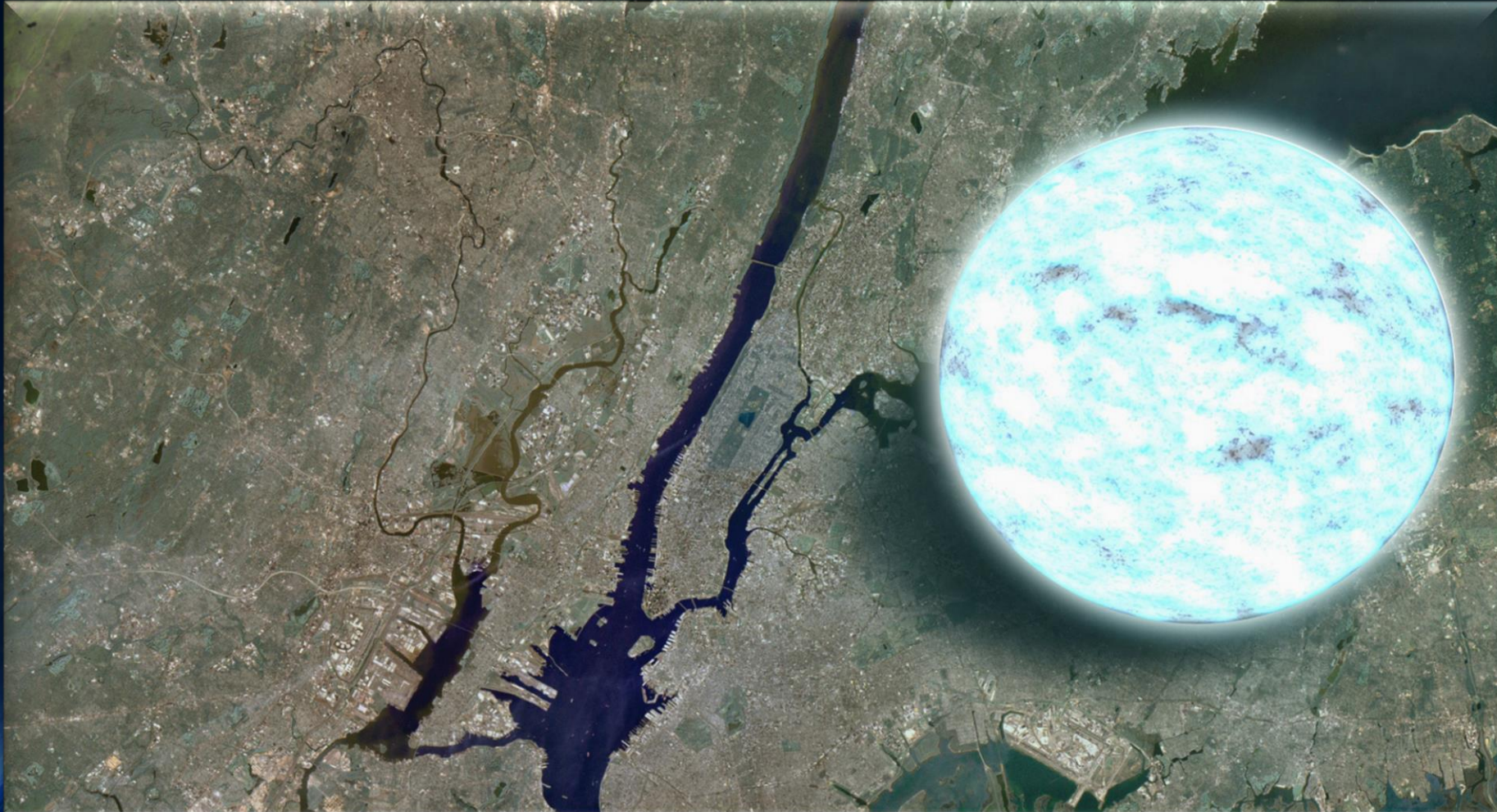
Schwarzes Loch



Neutronensterne: Sehr klein und sehr schwer

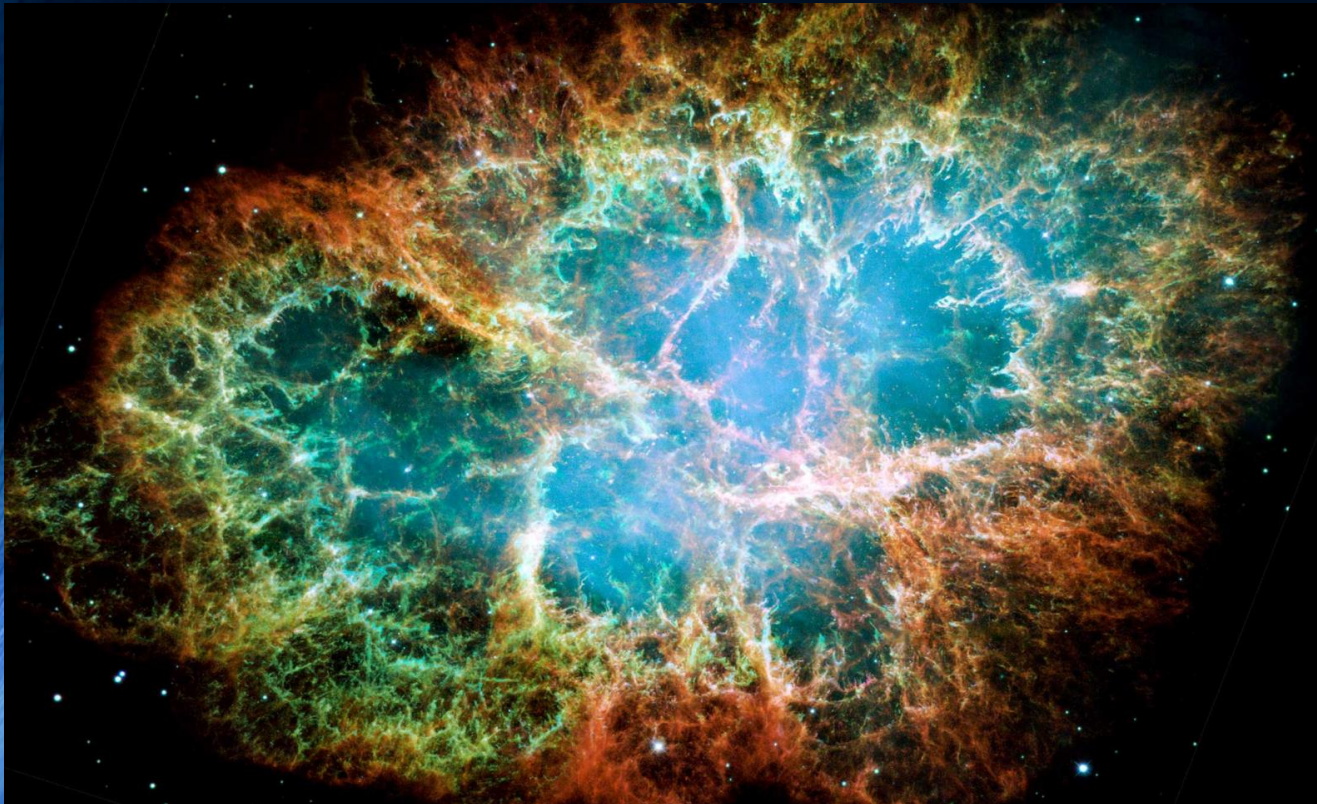
Radius ~ 10 km, Masse ~ 1 -2 Sonnenmassen

Riesige Magnetfelder $\sim 10^{11}$ Tesla, schnell rotierend (bis zu 716 Hz)



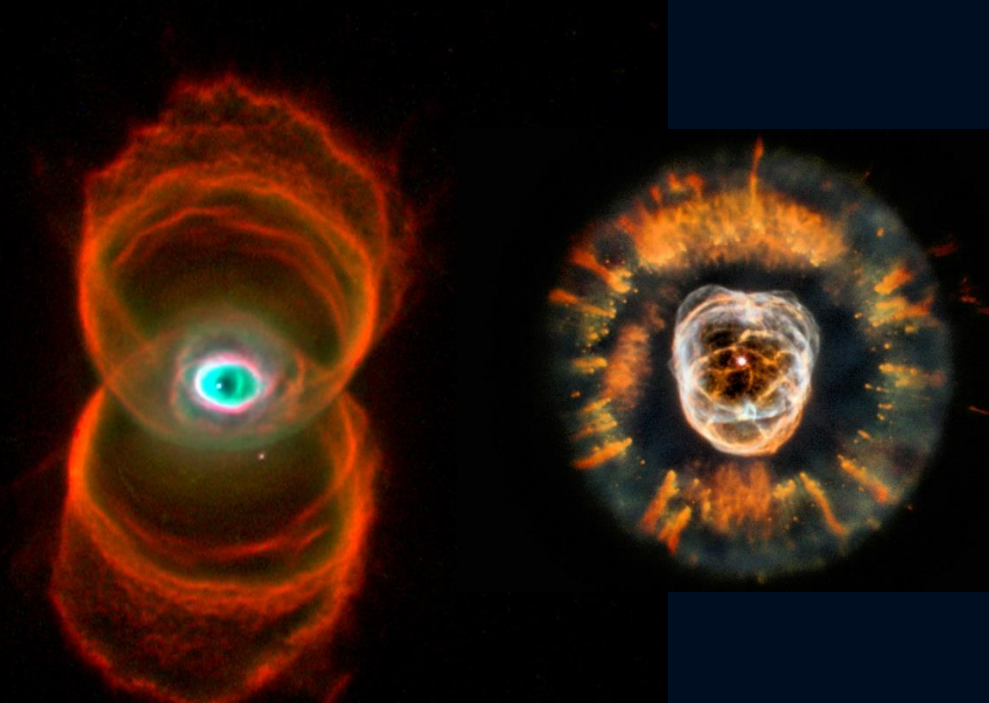
Was sind Neutronensterne?

Neutronensterne entstehen in einer Supernova Explosion.
Sonnensysteme, die mindestens 8-mal schwerer als unsere Sonne sind explodieren
am Ende ihrer Lebenszeit in einer Supernova Explosion –
im Zentrum bleibt ein Neutronenstern oder ein schwarzes Loch zurück.



Supernova Explosion, Krabben-Nebel

Zwei planetarische Nebel
Endstadium leichter Sonnen (weißer Zwerg)

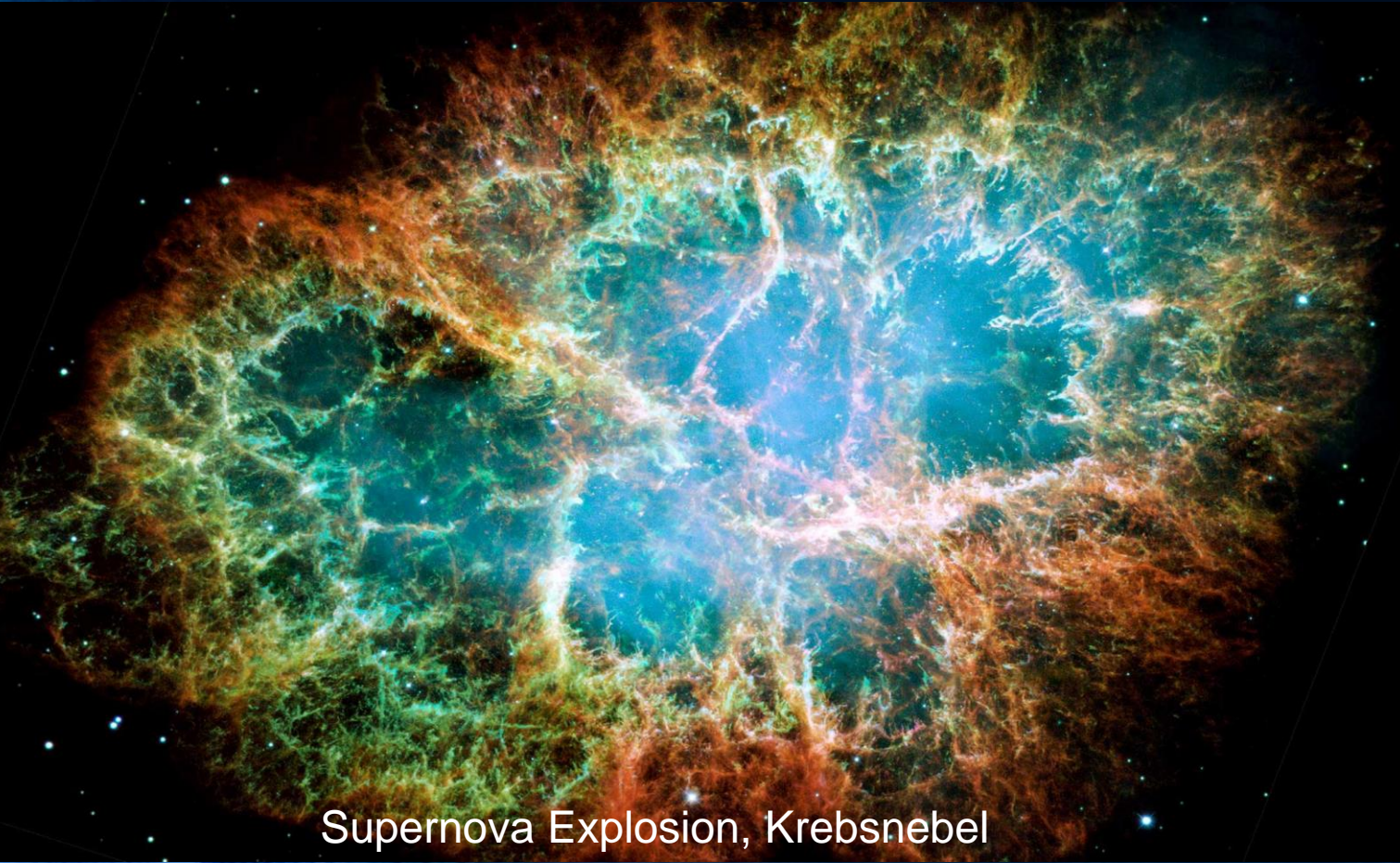


Wie entstehen Neutronensterne?

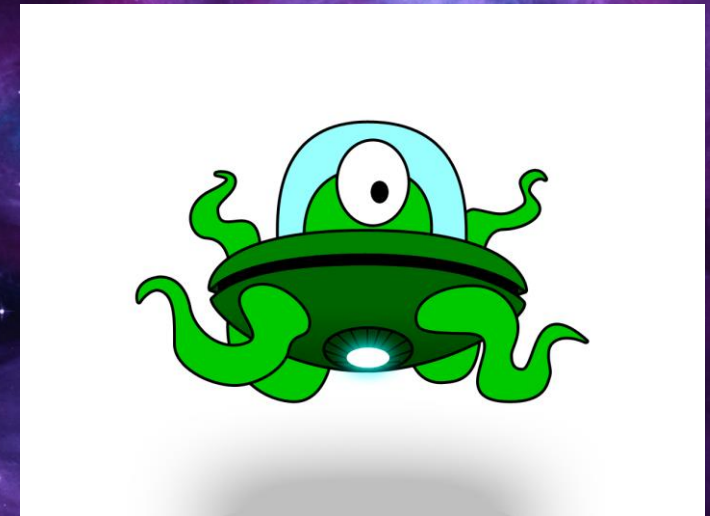
Neutronensterne entstehen in einer Supernova Explosion. Sonnen, die mindestens 8-mal schwerer als unsere Sonne sind explodieren am Ende ihrer Lebenszeit in einer Supernova Explosion – im Zentrum bleibt ein Neutronenstern oder ein schwarzes Loch zurück.



Im Zentrum des Nebels
ist ein Neutronenstern

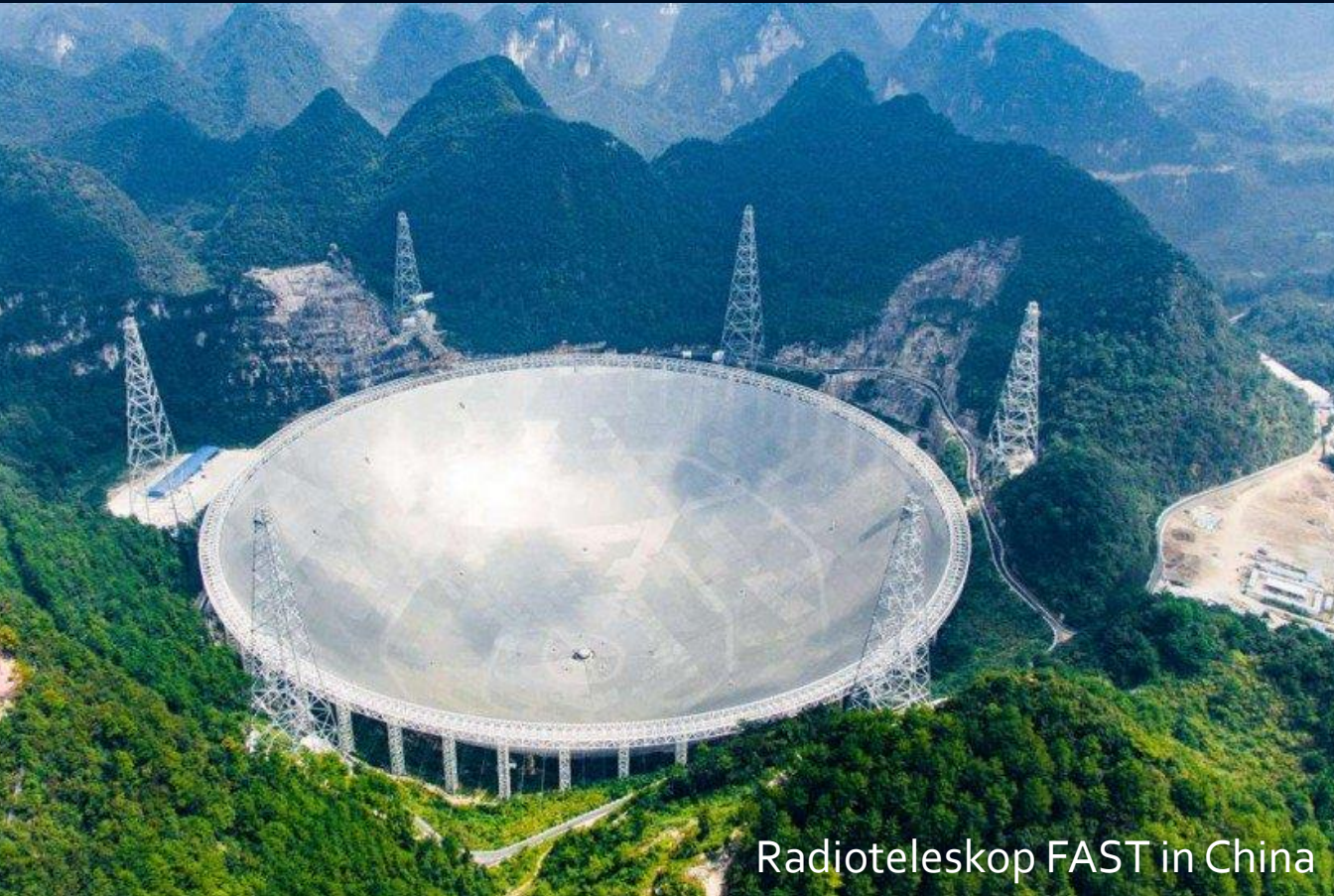


Supernova Explosion, Krebsnebel



Krebsnebel (Röntgenteleskop Chandra)

Pulsare sind Rotierende Neutronensterne mit starkem Magnetfeld



Radioteleskop FAST in China



Radioteleskop in Effelsberg

Der erste Pulsar wurde im Jahre 1967 entdeckt (PSR 1919+21, Jocelyn Bell) und wurde zunächst LGM-1 genannt.

In den letzten 50 Jahren konnten mittels Radioteleskopen ca. 3000 rotierende Neutronensterne (Pulsare) gefunden werden.

Man unterscheidet
Sekundenpulsare
und
Millisekunden-Pulsare



PSR B0329+54 (0.715 s)



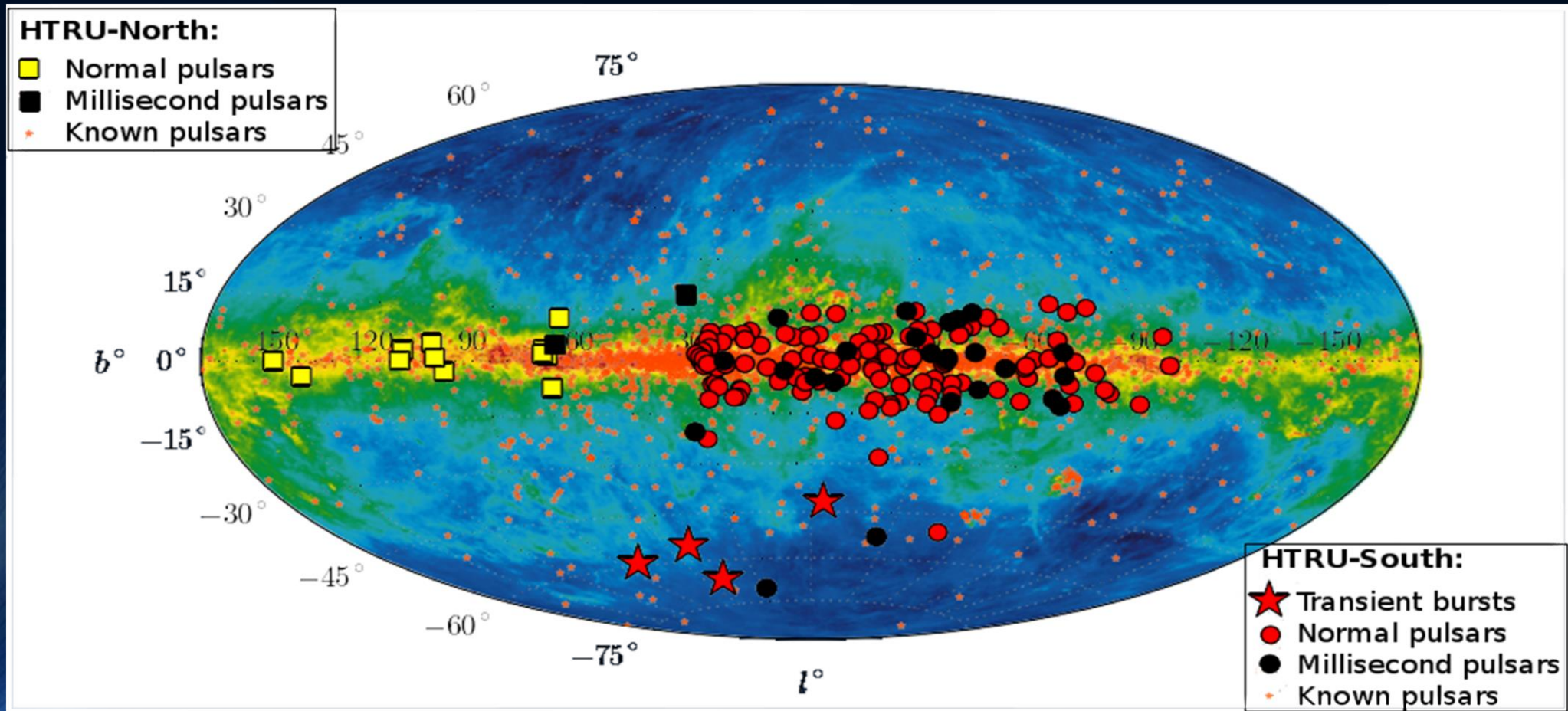
PSR B0531+21 (33.5 ms)



PSR B1937+21 (1.56 ms)

Pulsare sind rotierende Neutronensterne

Zurzeit kennen wir ca. 3000 Neutronensterne



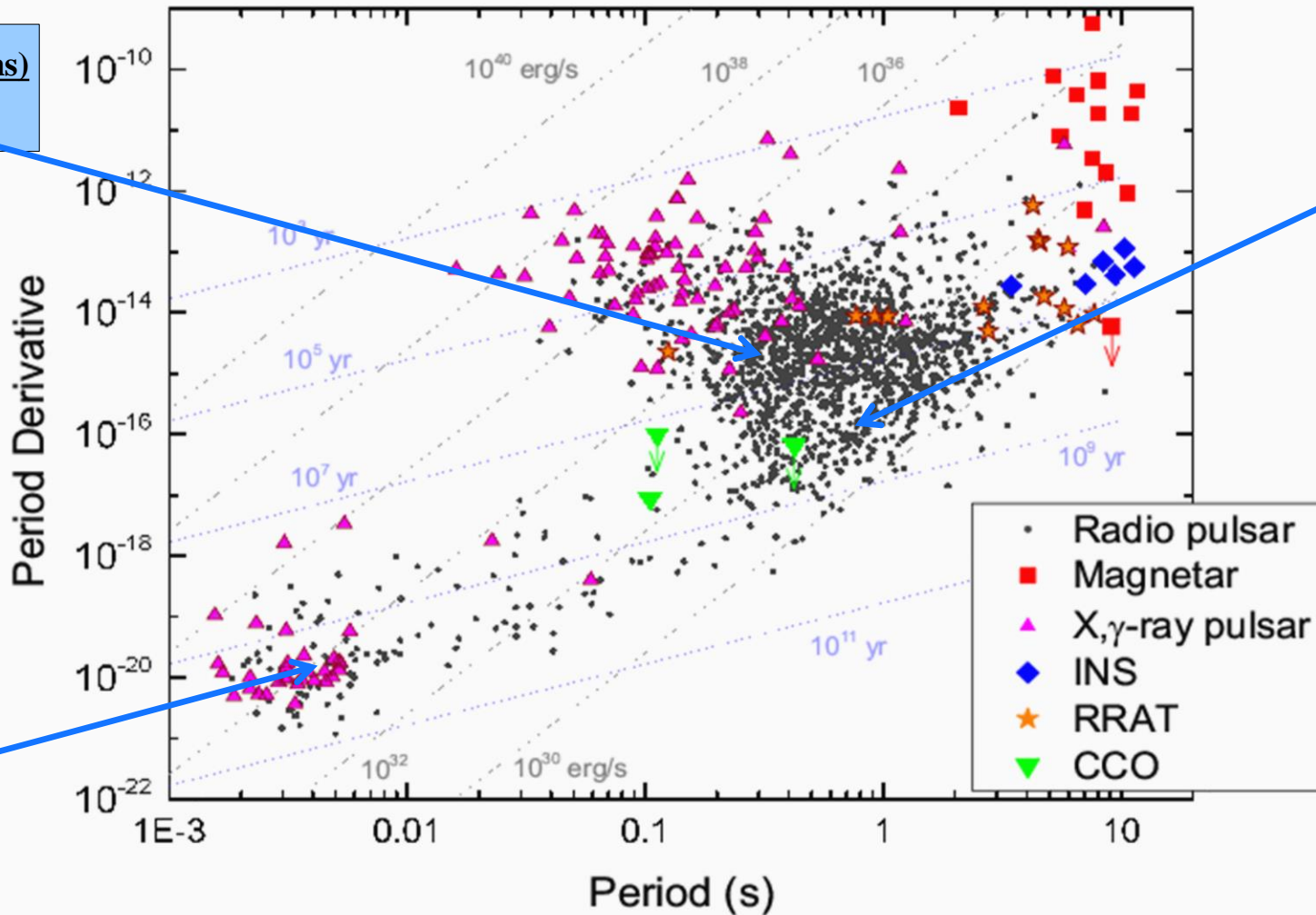
Millisekunden und Sekunden Pulsare



PSR B0531+21 (33.5 ms)
Crab Pulsar



PSR B0329+54 (0.715 s)



PSR B1937+21 (1.56 ms)

Beobachtete Massen von Neutronensternen in binären Systemen

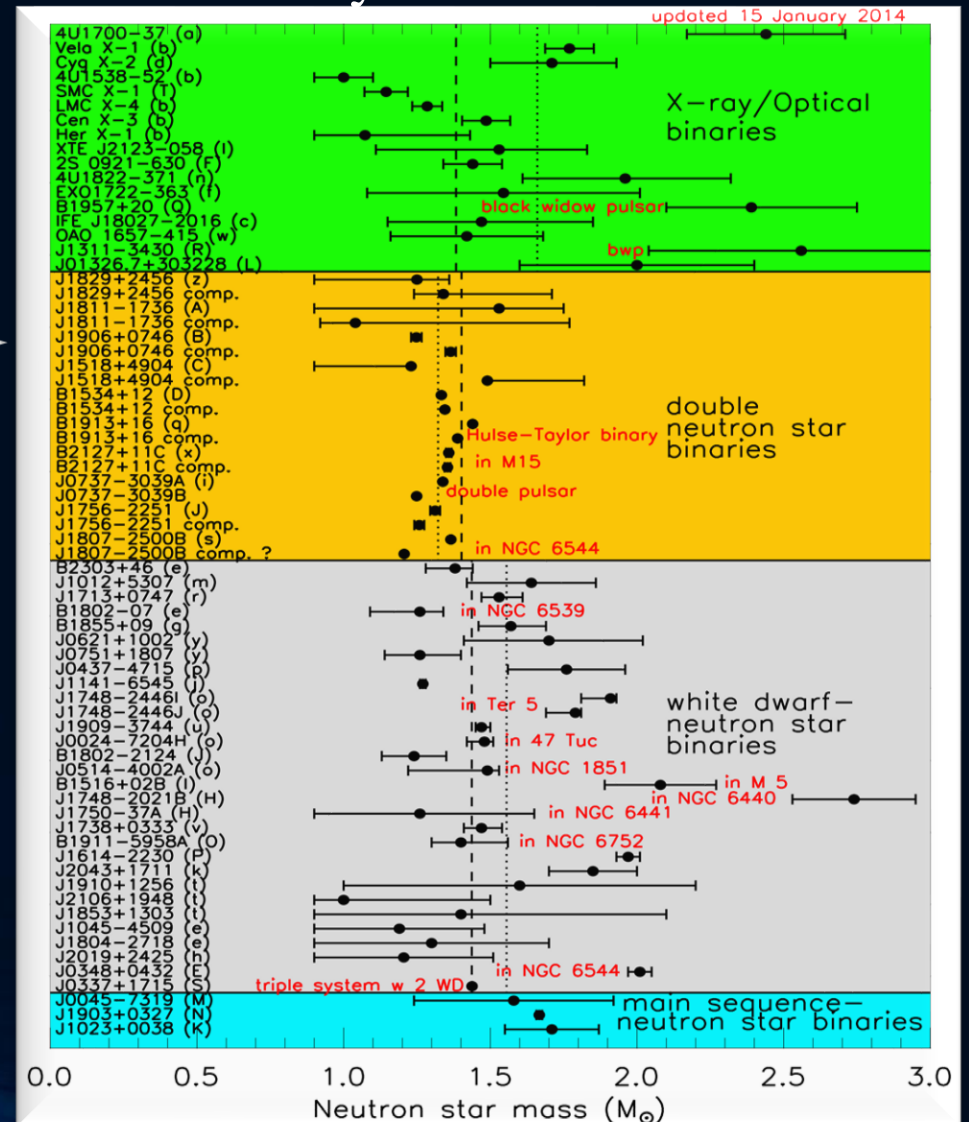
Einige der bekannten Neutronensterne befinden sich in Zweiersystemen:

NS-Planet, NS-(weißer Zwerg) oder NS-NS Systeme

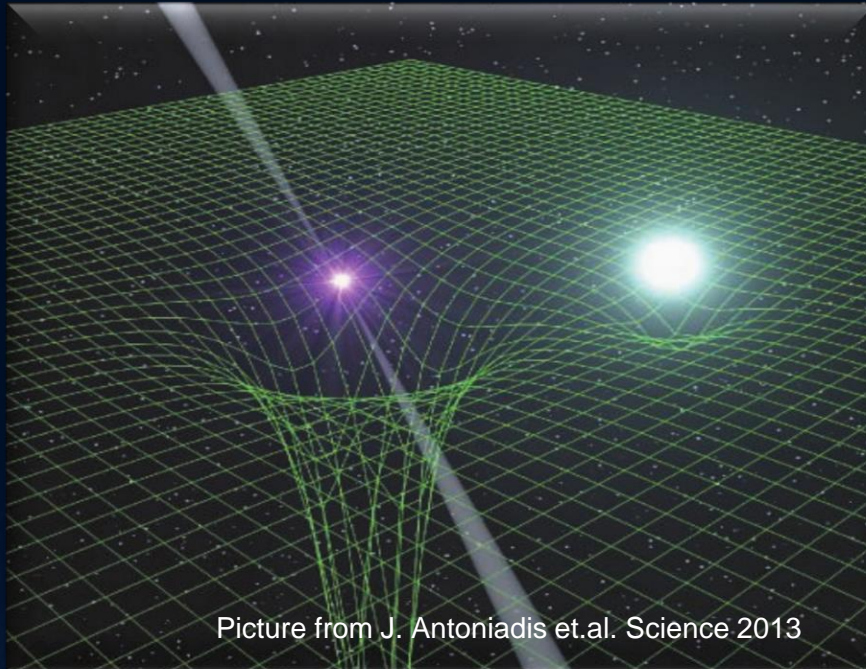
PSR J1906+0746

144-ms Pulsar, entdeckt in 2004
Orbitale Periode: 3.98 Stunden,
Exzentrizität: 0.085
Pulsar Masse: 1.291(11)
Masse Begleiter: 1.322(1)
In den Jahren 1998-2009 beobachtet,
dann verschwand
der Pulsar aufgrund der
Spin-Präzession

Van Leeuwen et al, arXiv:1411.1518



Beobachtete Massen von Neutronensternen in binären Systemen



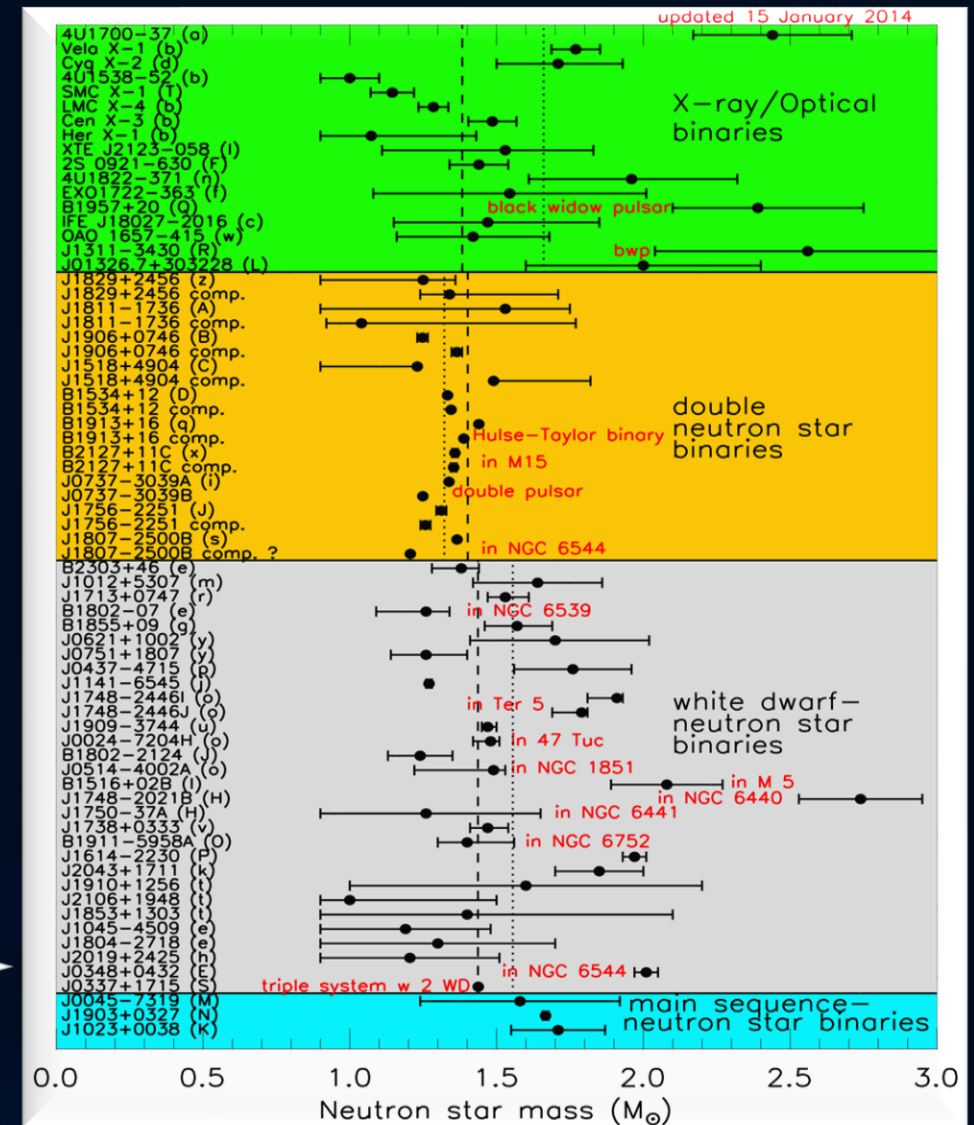
PSR J0348+0432

Orbitale Periode: 2.46 Stunden

Pulsar mass: 2.01 ± 0.04

Masse weißer Zwerg:

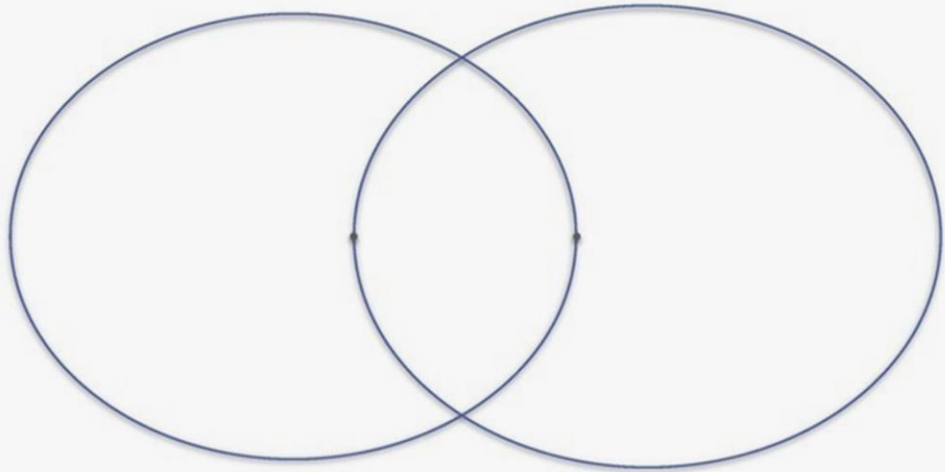
$M = 0.172 \pm 0.003$



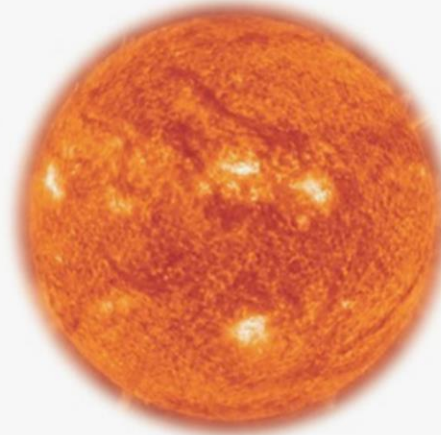
Binary Neutron Star Systems

Recently some new interesting Neutron Star Binary Systems has been found:

Hulse-Taylor-Pulsar



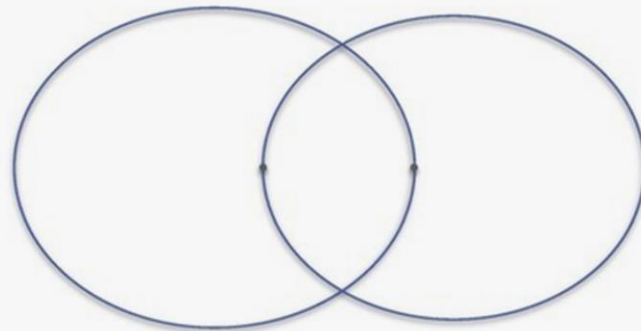
Sonne



Doppelpulsar



J1757-1854



J0453+1559

$P = 17 \text{ ms}$

(similar to the Doublepulsar)

J1913+1102

$P = 27 \text{ ms}$

$P_b = 4.95 \text{ h}$

J1757-1854

$P = 215 \text{ ms}$

$P_b = 4.4 \text{ h}$

$E = 0.606$

Currently we know ~25 Double-NS Systems and one triple System

Binäre Neutronenstern Systeme

Zurzeit kennt man ca. 25
binäre Neutronenstern Systeme

Beispiel:

Der **Double Pulsar**

(PSR J0737-3039A/B):

Entdeckt im Jahre 2003

Eccentricity: 0.088

Pulsar A: $P=23$ ms, $M=1.3381(7)$

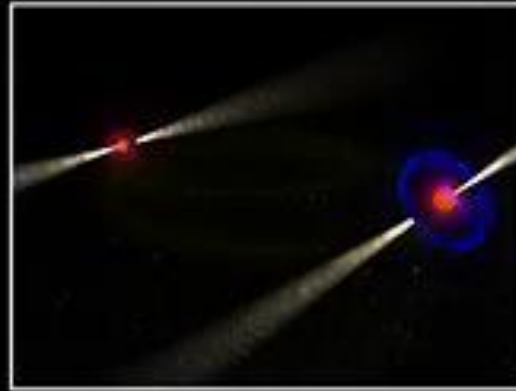
Pulsar B: $P=2.7$ s, $M=1.2489(7)$

Abstand zwischen den Sternen nur
800,000 km

Orbitale Periode: 147 Minuten

Abstand verkleinert sich langsam
aufgrund der Abstrahlung von
Gravitationswellen

Die beiden Neutronensterne
werden erst in 85 Millionen
Jahren kollidieren



The Einstein Equation

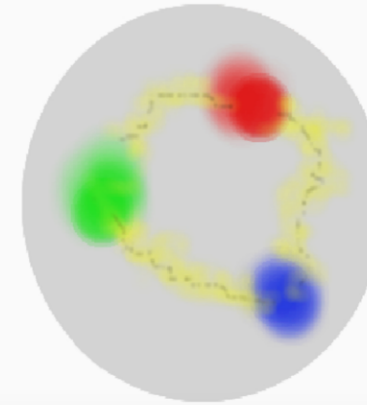
ART	<u>Yang-Mills-Theories</u>
$D_\beta v^\alpha = \partial_\beta v^\alpha + \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha v^\sigma$	$D_{\beta a}{}^b = \partial_\beta 1_a{}^b + ig A_{\beta a}{}^b$
$R^\delta{}_{\mu\alpha\beta} v^\mu = [D_\alpha, D_\beta] v^\delta$	$F_{\alpha\beta a}{}^b = \frac{1}{ig} [D_{\alpha a}{}^c, D_{\beta c}{}^b]$
$R^\delta{}_{\mu\alpha\beta} = \Gamma_{\mu\alpha \beta}^\delta - \Gamma_{\mu\beta \alpha}^\delta$ $+ \Gamma_{\nu\beta}^\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\delta \Gamma_{\mu\beta}^\nu$	$= A_{\beta a}{}^b _\alpha - A_{\alpha a}{}^b _\beta$ $+ \frac{1}{ig} [A_{\alpha a}{}^c, A_{\beta c}{}^b]$
$\mathcal{L}_G = R + \underbrace{(c_1 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \dots)}_{\equiv 0 \text{ for ART}}$	$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu a}{}^b F^{\mu\nu}{}_a{}^b$

Quantum ChromoDynamic:

($SU(3)_{(c)}$ - Color Yang-Mills-Gauge Theory)

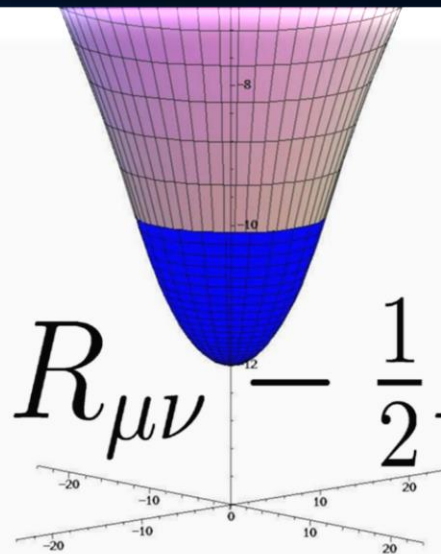
$$D_{\beta A}{}^B = \partial_\beta 1_A{}^B + ig G_{\beta A}{}^B$$

$A, B = \text{red, green, blue}$



$$\psi_A^f = \begin{pmatrix} \psi_r^f \\ \psi_g^f \\ \psi_b^f \end{pmatrix}$$

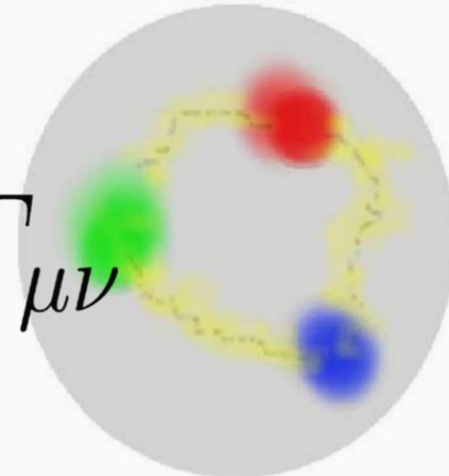
Confinement
chiral symmetry, ...



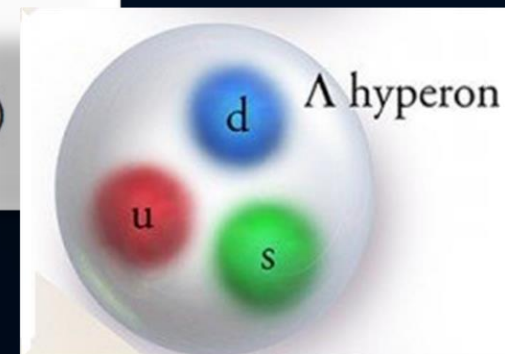
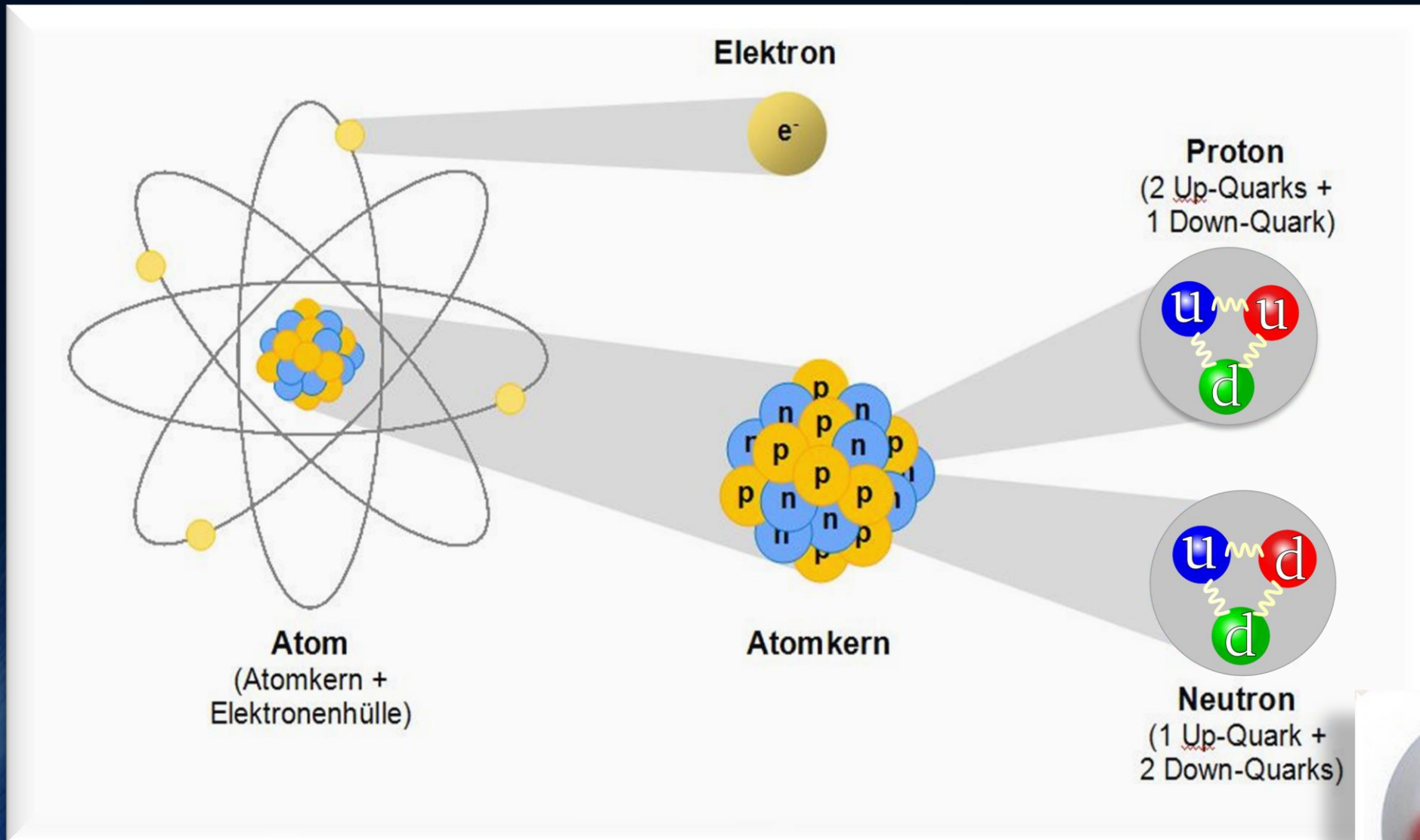
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} =$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

EOS: $P(\rho, T)$

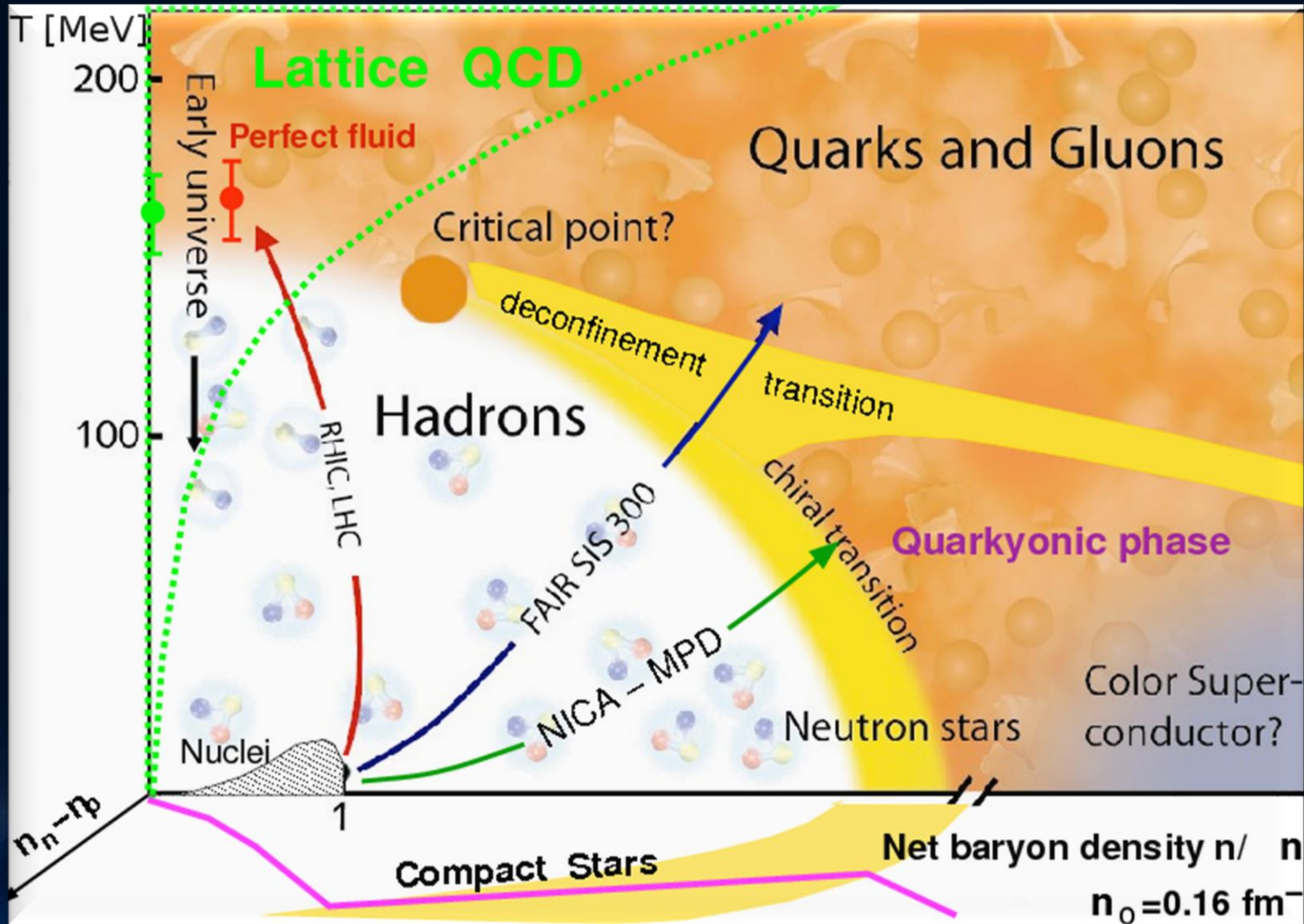


Elementare Materie

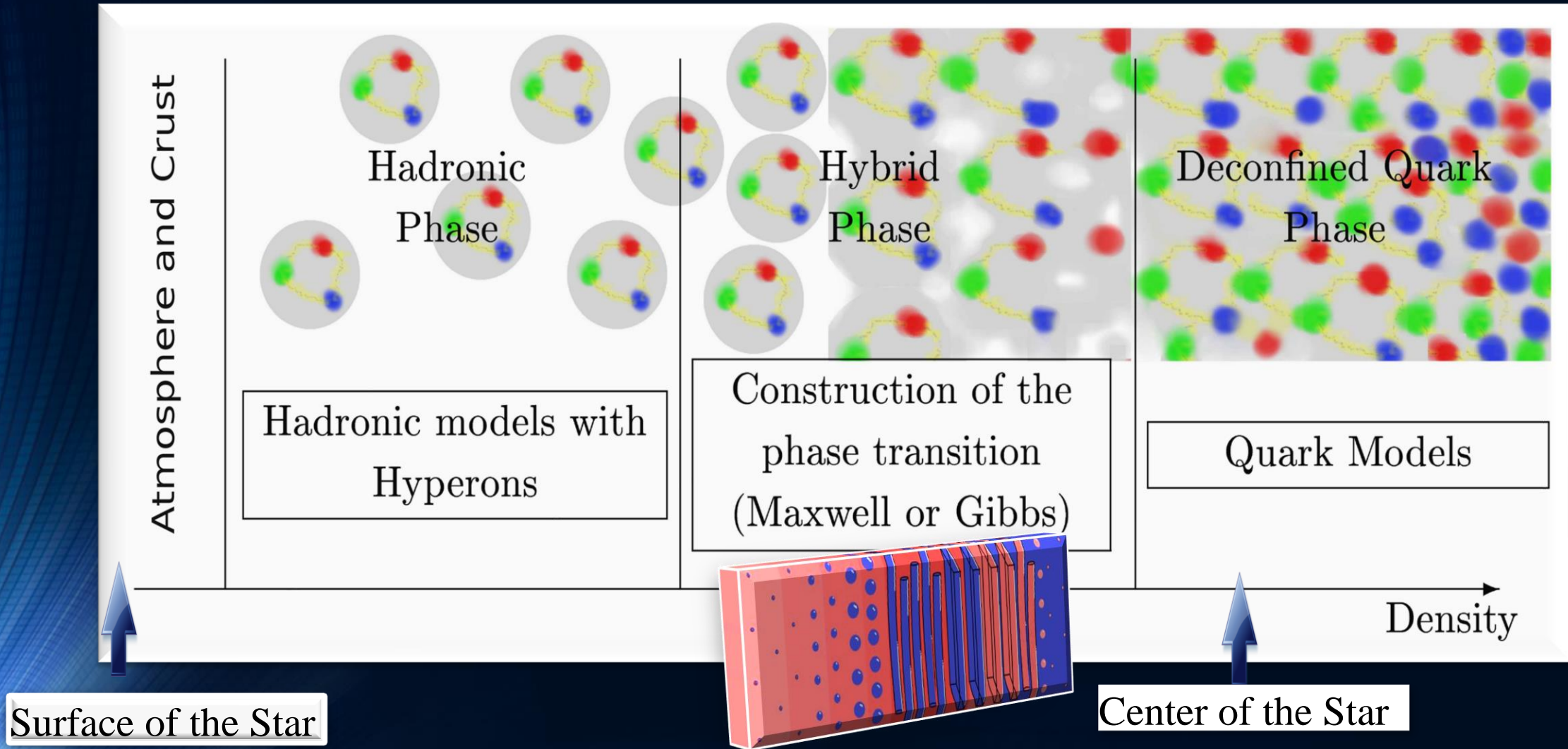


Bei sehr hohen Dichten oder Temperaturen können auch **Hyperonen** entstehen

Die Zustandsgleichung der Materie und das Quark-Gluon-Plasma



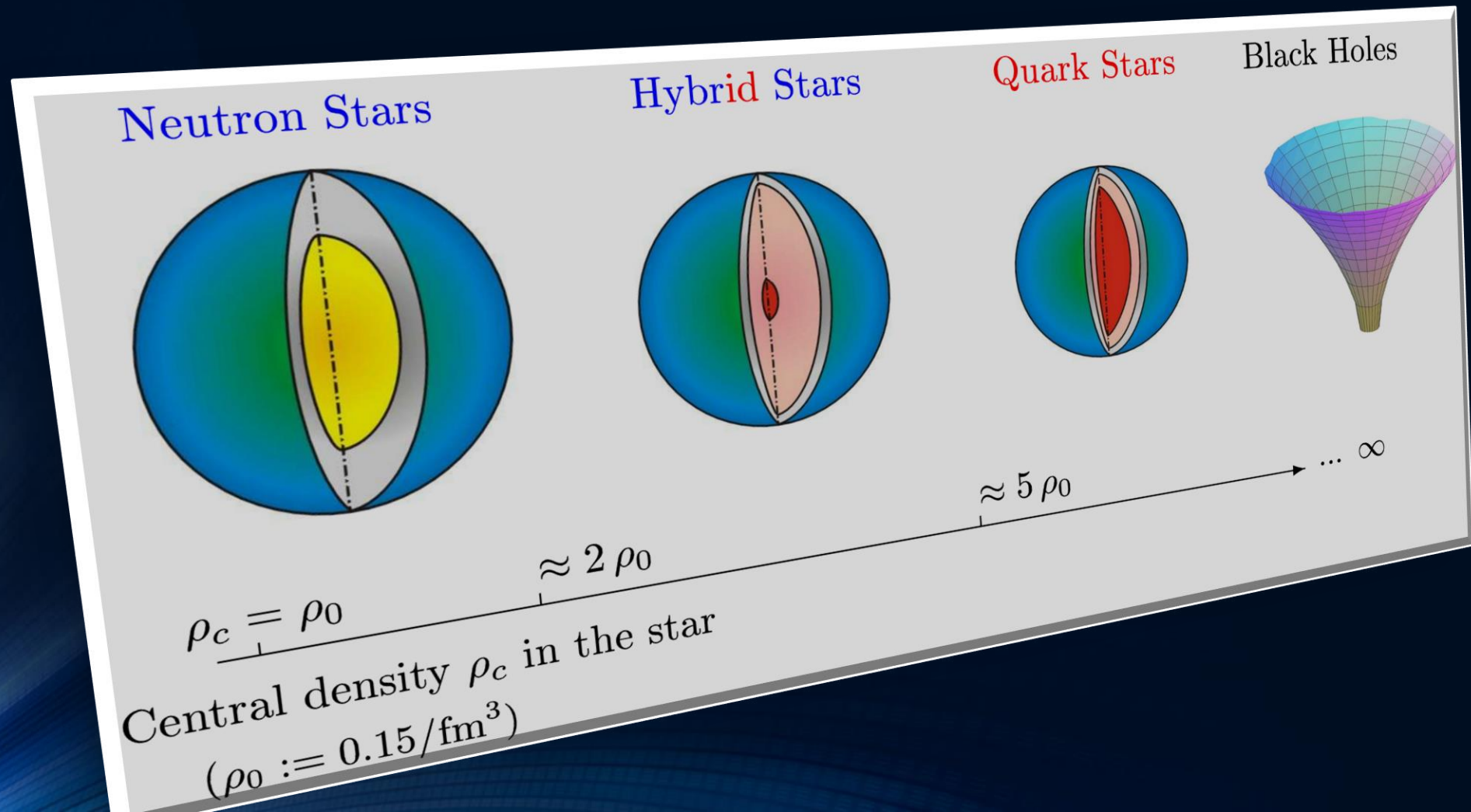
The QCD – Phase Transition and the Interior of a Hybrid Star



See: *Stable hybrid stars within a SU(3) Quark-Meson-Model*,
A.Zacchi, M.Hanuske, J.Schaffner-Bielich, PRD 93, 065011 (2016)

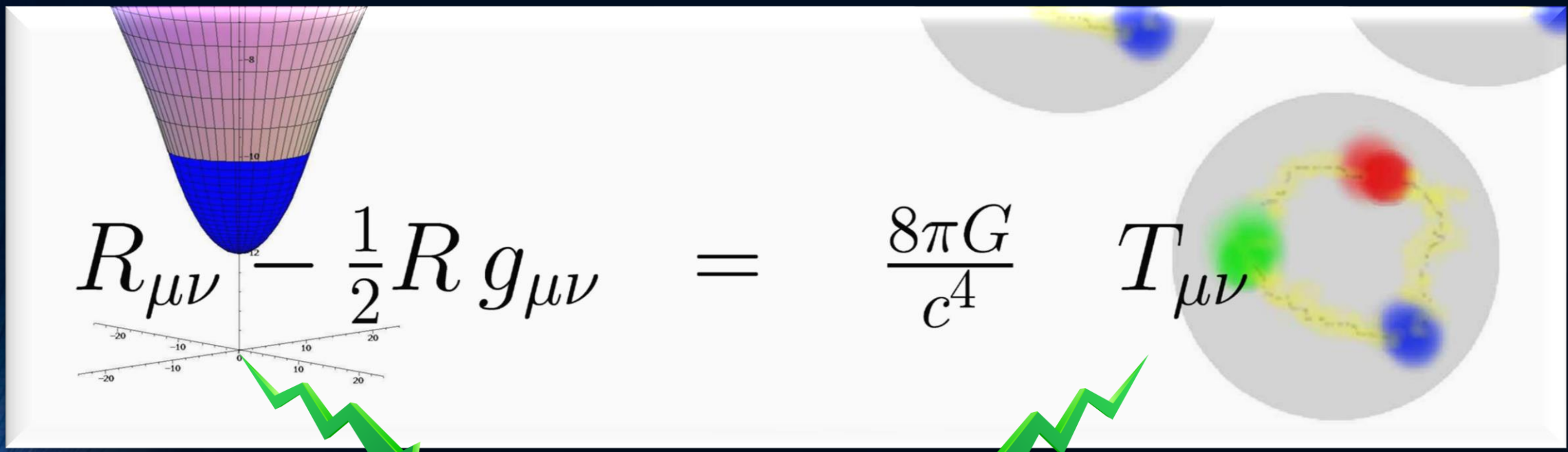
Neutronensterne, Quarksterne und schwarze Löcher

Bei welcher Dichte der Phasenübergang zum Quark-Gluon-Plasma einsetzt und welche Eigenschaften dieser Übergang im Detail hat ist weitgehend unbekannt. Theoretische Modellierung mittels unterschiedlicher effektiver Elementarteilchenmodelle.



Die Einstein Gleichung

Vor etwa 100 Jahren präsentierte Albert Einstein die Grundgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie – die sogenannte **Einstein-Gleichung**:



The diagram illustrates the Einstein field equations. On the left, a 3D grid representing spacetime curvature is shown as a funnel shape, with a coordinate system below it. On the right, a circular area contains several colored spheres (red, green, blue) representing matter and energy, with a yellow dashed line connecting them. The equation $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ is centered between these two visualizations.

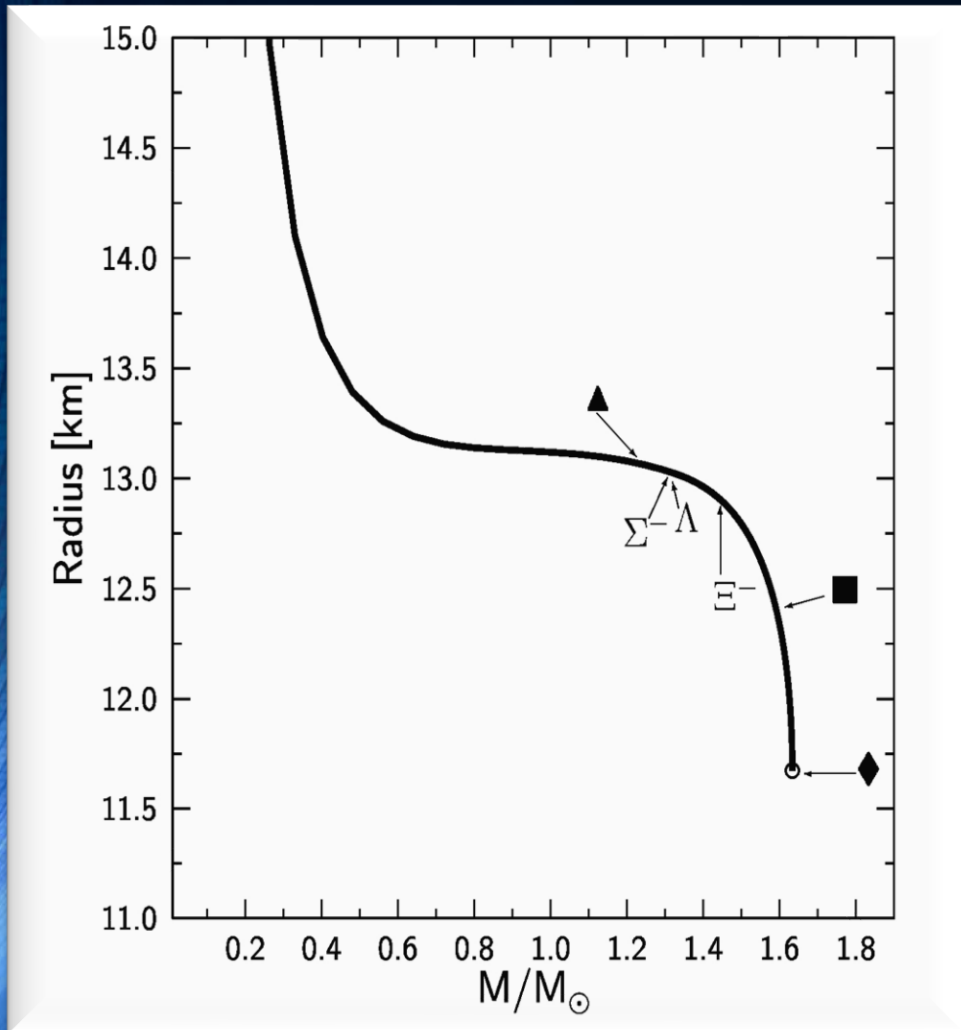
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Raumzeitkrümmung
Eigenschaften der Metrik
der Raumzeit

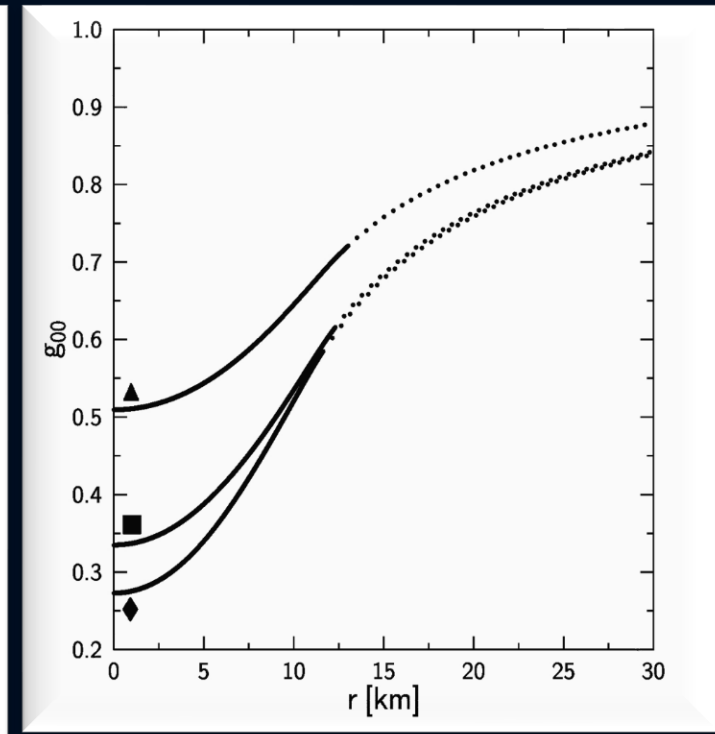
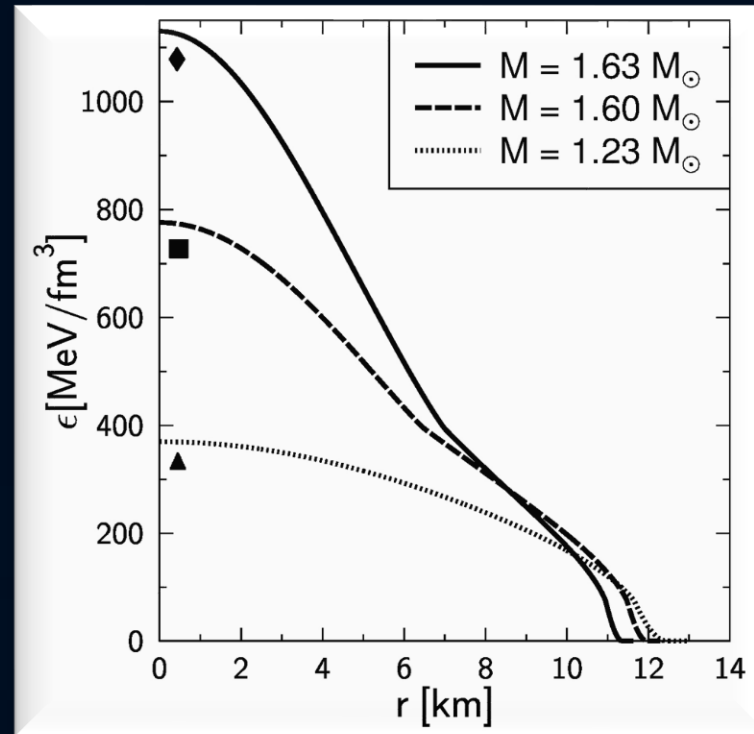
Masse, Energie und Impuls des Systems
Zustandsgleichung der Materie
Druck (Dichte , Temperatur)

Neutron Star Properties

Left: The neutron star radius as a function of its mass. A low, middle and high density star is displayed within the figure. Additionally the onset of hyperonic particles is visualized.



Middle: Energy density profiles of three neutron stars with different central densities and masses. The low density stars do not contain any hyperons, whereas the other two stars do have hyperons in their inner core.



Right: Time-time component of the metric tensor as a function of the radial coordinate. The solid line corresponds to the inner TOV-solution, whereas the dotted curve depicts the outer Schwarzschild part.

Vorlesung 6

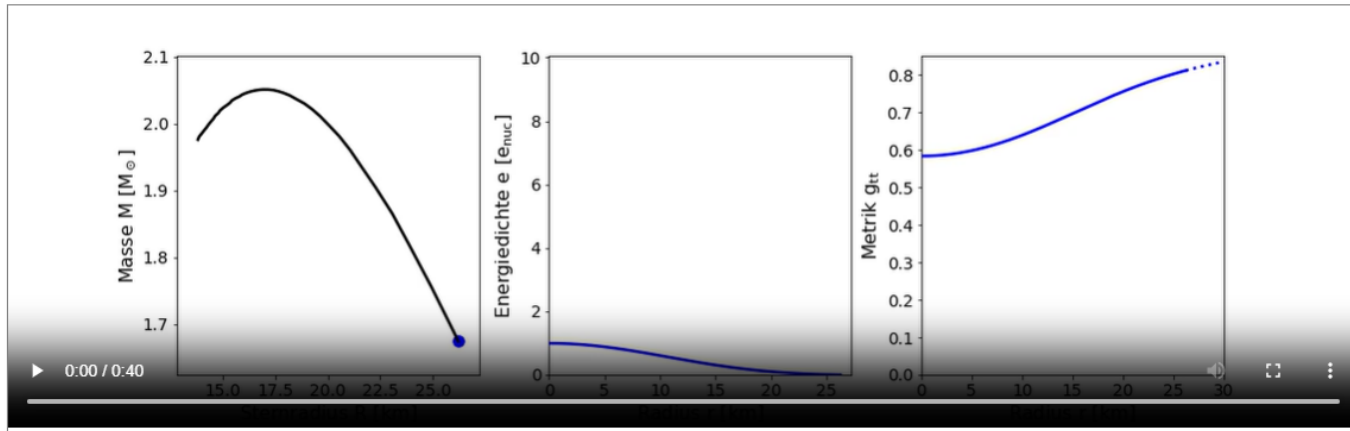
Die im rechten Panel dieser Vorlesung dargestellten TOV-Gleichungen beschreiben das Druck- und Energiedichte-Verhalten innerhalb eines sphärisch symmetrischen Objektes und geben außerdem die Innenraum-Metrik des Objektes an. Außerhalb des Objektes ist die Raumzeit durch die Schwarzschildmetrik definiert, welche aufgrund des Birkhoff-Theorems die einzige sphärisch symmetrische Lösung der Einsteingleichung im Vakuum ($T^{\mu\nu} \equiv 0$) ist. Mittels der TOV-Gleichungen können die unterschiedlichsten Objekte in guter Näherung beschrieben werden. So kann man mit ihnen sowohl das Innere der Sonne, als auch die Eigenschaften von Weißen Zwergen und Neutronensternen gut beschreiben. Nach einer kurzen Einführung in die Astrophysik der Weißen Zwerge, Neutronensternen und Quarksterne werden in einem Python Jupyter Notebook, die TOV-Gleichungen analytisch hergeleitet und ihre numerische Lösung, unter Verwendung einer polytropen Form der Zustandsgleichung der Neutronenstern-Materie behandelt. Zusätzlich werden wir in dieser Vorlesung den Spezialfall des Gravitationsfeldes einer Kugel konstanter Dichte behandeln (siehe rechtes Panel, Arbeiten von Karl Schwarzschild im Jahre 1916) und die gekrümmte Raumzeit eines Neutronensterns in einem eingebetteten Diagramm visualisieren.

Weiße Zwerge, Neutronensterne und Quarksterne

Neutronensterne sind neben weißen Zwergen und stellaren schwarzen Löchern die möglichen Endzustände des Evolutionsprozesses einer Sonne. Neutronensterne werden in gewaltigen Supernova-Explosionen geboren und sie stellen den letzten stabilen Zustand der Materie dar, bevor sie zu einem schwarzen Loch kollabiert. Diese faszinierenden stellaren Objekte besitzen lediglich einen Durchmesser von 20 Kilometern, vereinen dort jedoch auf engstem Raum eine Masse von 500 000 Erdmassen. Von den etwa 100 Millionen Neutronensternen die es in unserer Galaxie, der Milchstraße, vermutlich gibt, sind ca. 3000 als Pulsare bekannt. Pulsare sind schnell rotierende Neutronensterne mit einem starken Magnetfeld (bis zu 10^{11} Tesla), die bevorzugt entlang der Pole elektromagnetische Strahlung aussenden. Einige dieser Neutronensterne, die sogenannten Millisekunden-Pulsare rotieren so schnell, dass sie pro Sekunde mehrere hundert Umdrehungen schaffen. Für diese Millisekunden-Pulsare ist unser sphärisch symmetrische Ansatz der Metrik nicht mehr erfüllt. Unter den bekannten Neutronensternen gibt es auch einige, die sich in binären Systemen befinden, wobei ihr Begleiter entweder ein normaler Stern, ein Planet, ein weißer Zwerg oder auch wieder ein Neutronenstern sein kann. Diejenigen Neutronensterne, die in Zweiersystem umeinander kreisen, verringern ihren Abstand im Laufe der Zeit, da sie Energie durch Aussendung von Gravitationswellen abgeben. Das derzeit beeindruckendste Binärsystem ist der sogenannte Doppelpulsar: PSR J0737-3039A/B, welches im Jahre 2003 entdeckt wurde. Kollidieren zwei Neutronensterne miteinander wird eine enorme Energie in Form von Gravitationswellen frei gesetzt und eine solche Neutronenstern-Kollision konnte im Jahre 2017 mittels der Gravitationswellen-Detektoren beobachtet werden (siehe [GW170817](#)). Da die Dichte im inneren Bereich des Neutronensterns den mehrfachen Wert der normalen nuklearen Kerndichte erreichen kann, ist es wahrscheinlich, dass ein Phasenübergang zu Quarkmaterie stattfindet - diese Sterne werden als sogenannte hybride, bzw. Quarksterne bezeichnet (siehe [GOETHE-UNI online im Jahre 2021: Gravitational waves could prove the existence of the quark-gluon plasma](#)).

Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichung

Unter der Annahme einer sphärisch symmetrischen Materieverteilung einer idealen Flüssigkeit (z.B. Neutronenstern Materie) kann man die Einsteingleichung in die sogenannten TOV-Gleichungen umschreiben. In diesem Jupyter Notebook wird gezeigt, wie man von der Einsteingleichung zu den TOV-Gleichungen gelangt und ihre numerische Lösung behandelt.



Vorlesung 6

Bis zu dieser Vorlesung hatten wir die raumzeitliche Struktur der Metrik als gegeben vorausgesetzt (Schwarzschild-Metrik bzw. Kerr-Metrik) und die Bewegungen von Probekörpern, im sonst materiefreien Raum, mittels der Geodätengleichung studiert. In dieser Vorlesung betrachten wir den umgekehrten Fall: Wie kann man anhand einer speziellen Materie/Energieverteilung im Raum zu der zugehörigen raumzeitliche Struktur gelangen. Wir betrachten im Folgenden ein statisches, sphärisch symmetrisches Objekt (in Näherung z.B. die Erde, Sonne oder ein Neutronenstern) und setzen die Metrik im Inneren wie folgt an:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen $\phi(r)$ und $m(r)$ an dieser Stelle noch unbekannt sind, später aber eine physikalische Bedeutung erhalten. Die Materie setzen wir als eine ideale Flüssigkeit mit folgendem Energie-Impuls Tensor an:

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} e(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(r) \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen $e(r)$ und $p(r)$ die Energiedichte und den Druck der Materie darstellen. Die raumzeitliche Struktur im Inneren der Materie erhält man mittels der Einstein Gleichung

$$G^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu}_{\nu} R = 8\pi T^{\mu}_{\nu},$$

die im betrachteten Fall ein System von vier gekoppelten Differentialgleichungen darstellt. Zusätzlich folgt aus der Einsteingleichung die kovariante Erhaltung des Energie-Impulses. Diese sogenannten hydrodynamischen Gleichungen sind durch die folgenden vier Gleichungen definiert:

$$\nabla_{\mu} G^{\mu}_{\nu} = 0 \rightarrow \nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0,$$

wobei die kovariante Ableitung eines Tensors zweiter Stufe wie folgt definiert ist:

$$\nabla_{\alpha} T^{\mu}_{\nu} = \partial_{\alpha} T^{\mu}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} T^{\rho}_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu} T^{\mu}_{\rho}.$$

Durch Umschreiben und Kombination der Gleichungen gelangt man zu einem System von drei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung, die sogenannten *Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichungen*:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 e(r), \\ \frac{dp}{dr} &= -(e(r) + p(r)) \frac{d\Phi}{dr}, \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2m(r))} \end{aligned}$$

Allgemeine Relativitätstheorie

General Theory of Relativity

Vorlesung gehalten (Sommersemester 2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 04.04.2021

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichung

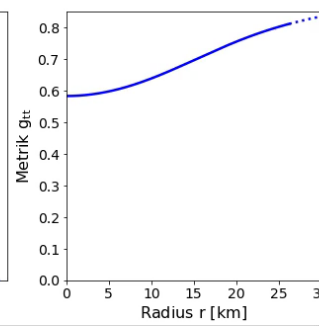
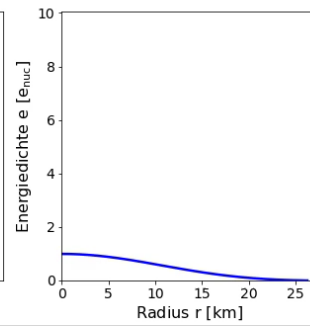
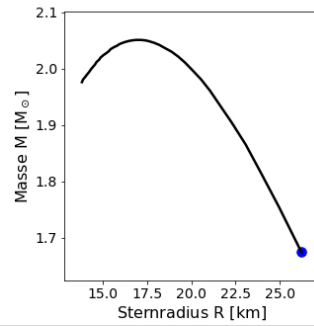
Innenraum-Lösung eines sphärisch symmetrischen, statischen Objektes (z.B. Erde, Neutronenstern)

Von der Einstein Gleichung zur TOV Gleichung

In den vorigen Vorlesungen wurde die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild und Kerr Raumzeit für unterschiedliche Anfangsbedingungen numerisch analysiert. Die raumzeitliche Struktur, die Metrik, wurde hierbei als gegeben vorausgesetzt. In der folgenden Vorlesung betrachten wir nun wie man die Metrik bei vorgegebener Materieverteilung berechnet. Die zugrundeliegende Gleichung, die es hier zu lösen gilt, ist die Einstein Gleichung (in kontravarianter Darstellung)

$$G^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu}_{\nu}R = 8\pi T^{\mu}_{\nu}$$

Wir betrachten im Folgenden ein statisches, sphärisch symmetrisches Objekt (in Näherung z.B. die Erde, Sonne oder ein Neutronenstern) und setzen die Metrik im Inneren wie folgt an:



Jupyter Notebook

Die Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichung

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Startseite | Lehren & Lernen | Kursangebote | Allgemeine Relativität...

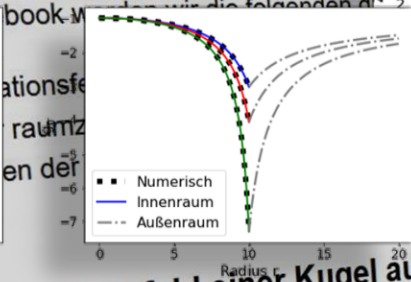
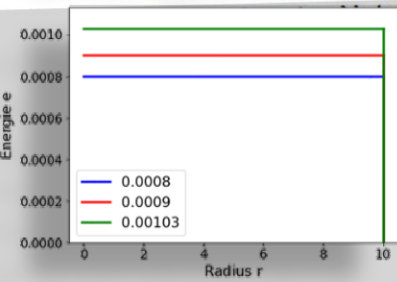
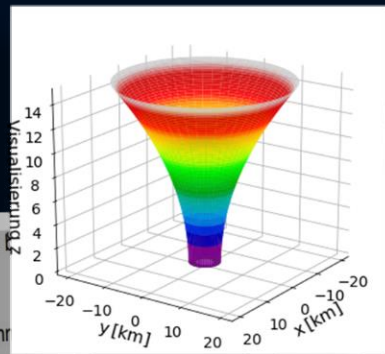
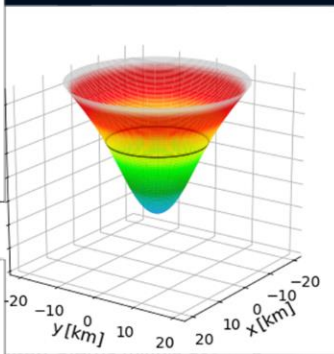
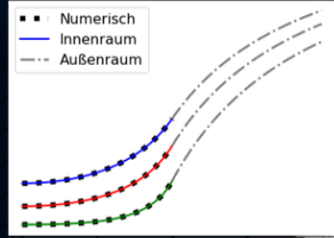
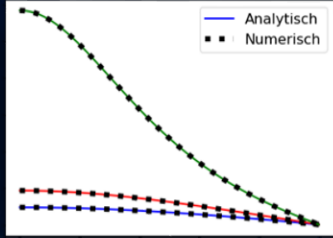
Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

- Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer
 - Literaturverzeichnis
 - Einschreibung
 - Kursinhalt
 - Vorlesungsaufzeichnung
 - Aufgaben
 - Programme
 - Einführung in Jupyter Notebooks
 - Allgemeine Relativitätstheorie mit Python
 - Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik
 - Radialer Fall eines Probekörpers in ein schwarzes Loch
 - Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen
 - Der ISCO und die Photonensphäre
 - Maple Worksheets I
 - Das rotierende schwarze Loch: Struktur der Horizonte
 - Das rotierende schwarze Loch: Klassifikation möglicher
 - Maple Worksheets II
 - Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichung
 - Jupyter Notebooks
 - Mitteilungen

Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum Herunterladen

Jupyter Notebook

Die TOV-Gleichung: Zusätzliche Betrachtungen



Spezialfall: Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit (konstante Dichte)

Die TOV-Gleichungen wurden im Jahre 1939 gefunden und gründen auf den folgenden zwei Arbeiten: [Tolman, Richard C. "Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid." Physical Review 55.4 \(1939\): 364.](#) und [Oppenheimer, J. Robert, and George M. Volkoff. "On massive neutron cores." Physical Review 55.4 \(1939\): 374.](#) Es ist beachtlich, dass bereits im Jahre 1916, lange bevor die TOV-Gleichungen publiziert wurden, Karl Schwarzschild schon einen wichtigen Spezialfall der TOV-Gleichungen analytisch berechnete. Herr Schwarzschild betrachtete einen sphärisch symmetrischen Körper mit konstanter Dichte (siehe [Karl Schwarzschild, "Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit", Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften. Reimer, Berlin 1916, S:424-434](#)) und berechnete die Eigenschaften dieses Körpers in der Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie.

Im Folgenden werden wir auch diesen Spezialfall betrachten und die analytische Lösung mit unseren numerischen Berechnungen vergleichen. Wir starten hingegen nicht, wie Schwarzschild es damals, von der Einsteingleichung, sondern nehmen die TOV-Gleichungen als gegeben an.

```
In [1]: import numpy as np
from sympy import *
init_printing()
from einsteinpy.symbolic import *
```

Auf der OLAT Seite des Kurses
finden Sie die Jupyter Notebooks
zum Ansehen
und zum herunterladen

The screenshot shows the course page for 'Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer' at Goethe University Frankfurt. The page includes a navigation menu with 'Startseite', 'Lehren & Lernen', 'Kursangebote', and 'Allgemeine Relativität...'. A sidebar on the right lists course materials: 'Literaturverzeichnis', 'Einschreibung', 'Kursinhalt', 'Vorlesungsaufzeichnung', 'Aufgaben', and 'Programme'. Under 'Programme', a list of topics is shown, including 'Einführung in Jupyter Notebooks', 'Allgemeine Relativitätstheorie mit Python', 'Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik', 'Radialer Fall eines Probekörpers in ein schwarzes Lo', 'Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen', 'Der ISCO und die Photonensphäre', 'Maple Worksheets I', 'Das rotierende schwarze Loch: Struktur der Horizon', 'Das rotierende schwarze Loch: Klassifikation möglic', 'Maple Worksheets II', 'Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichung', and 'Die TOV-Gleichung: Zusätzliche Betrachtungen'. The last item is highlighted with a blue arrow pointing to the text in the foreground.

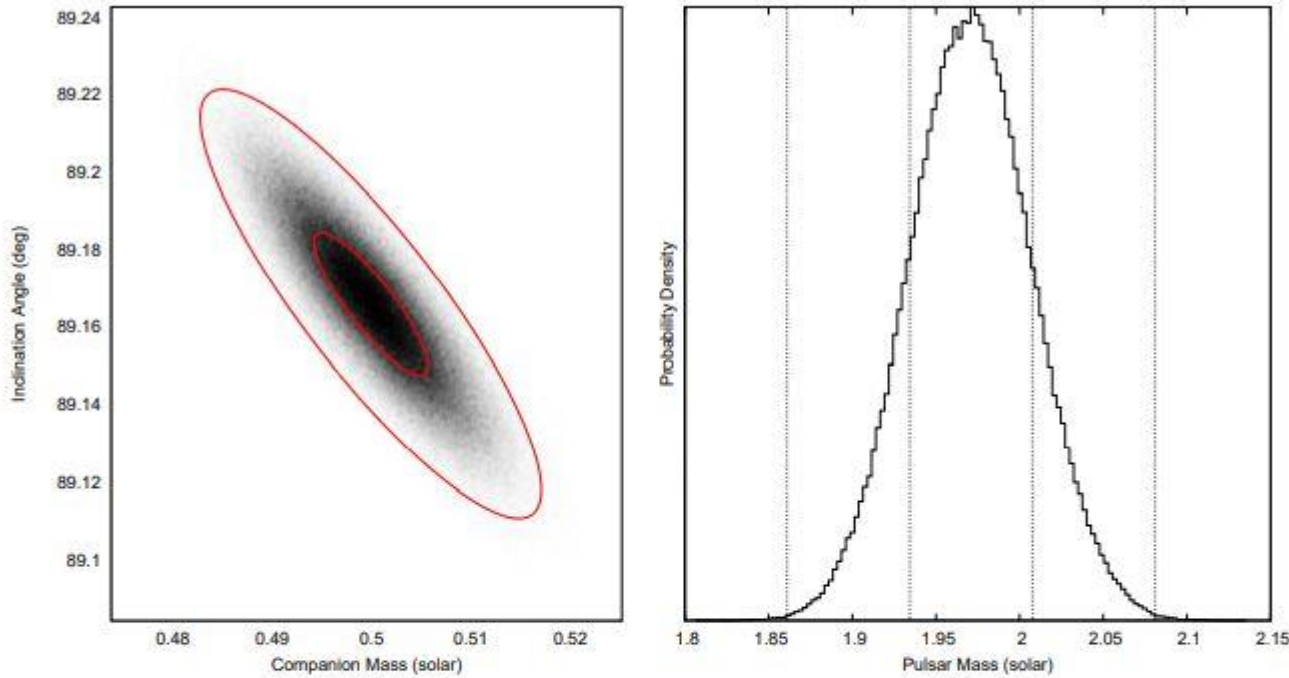


Figure 2: Results of the Markov chain Monte Carlo (MCMC) error analysis. The left panel grayscale shows the 2-D posterior probability density function (PDF) in the M_2 - i (companion mass versus orbital inclination) plane computed from a histogram of MCMC trial values. The ellipses show 1- and 3- σ contours based on a Gaussian approximation to the MCMC results. The right panel shows the PDF for pulsar mass derived from the MCMC trials. In both cases the results are very well described by normal distributions due to the extremely high signal-to-noise ratio of our Shapiro delay detection.

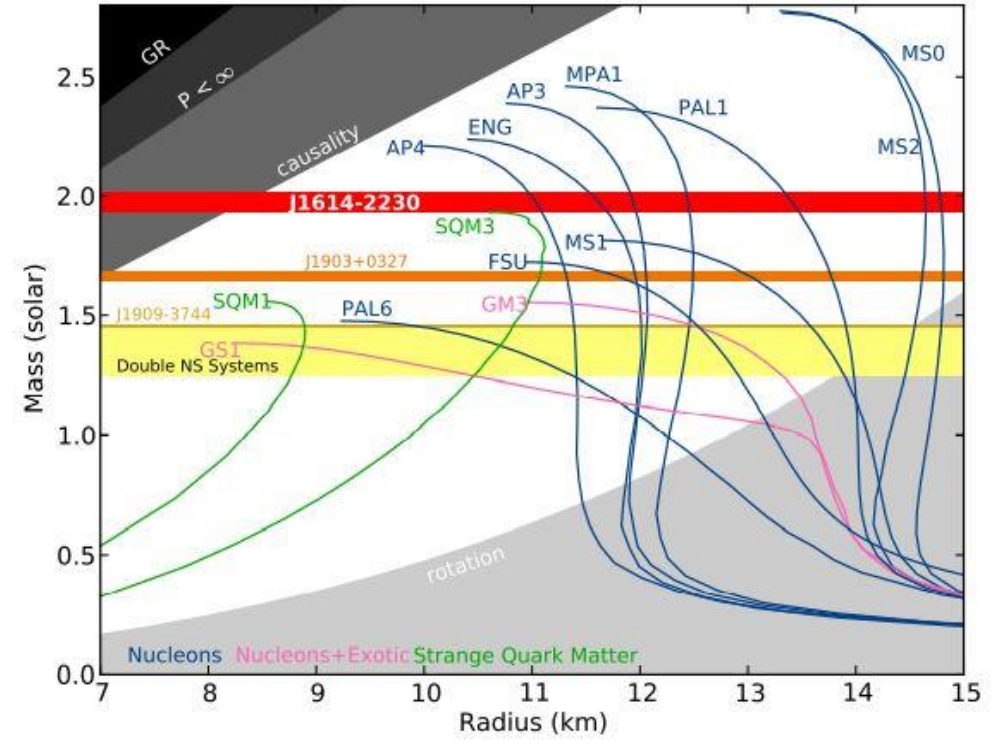


Figure 3: Neutron star (NS) mass-radius diagram. The plot shows non-rotating mass versus physical radius for several typical NS equations of state (EOS)[25]. The horizontal bands show the observational constraint from our J1614–2230 mass measurement of $1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$, similar measurements for two other millisecond pulsars[3, 26], and the range of observed masses for double NS binaries[2]. Any EOS line that does not intersect the J1614–2230 band is ruled out by this measurement. In particular, most EOS curves involving exotic matter, such as kaon condensates or hyperons, tend to predict maximum NS masses well below $2.0 M_{\odot}$, and are therefore ruled out.

Many physically motivated extensions to general relativity (GR) predict significant deviations in the properties of spacetime surrounding massive neutron stars. We report the measurement of a 2.01 ± 0.04 solar mass (M_{\odot}) pulsar in a 2.46-hr orbit with a $0.172 \pm 0.003 M_{\odot}$ white dwarf. The high pulsar mass and the compact orbit make this system a sensitive laboratory of a previously untested strong-field gravity regime. Thus far, the observed orbital decay agrees with GR, supporting its validity even for the extreme conditions present in the system. The resulting constraints on deviations support the use of GR-based templates for ground-based gravitational wave detectors. Additionally, the system strengthens recent constraints on the properties of dense matter and provides insight to binary stellar astrophysics and pulsar recycling.

γ^*

is,^{2,1}

ssa,⁵

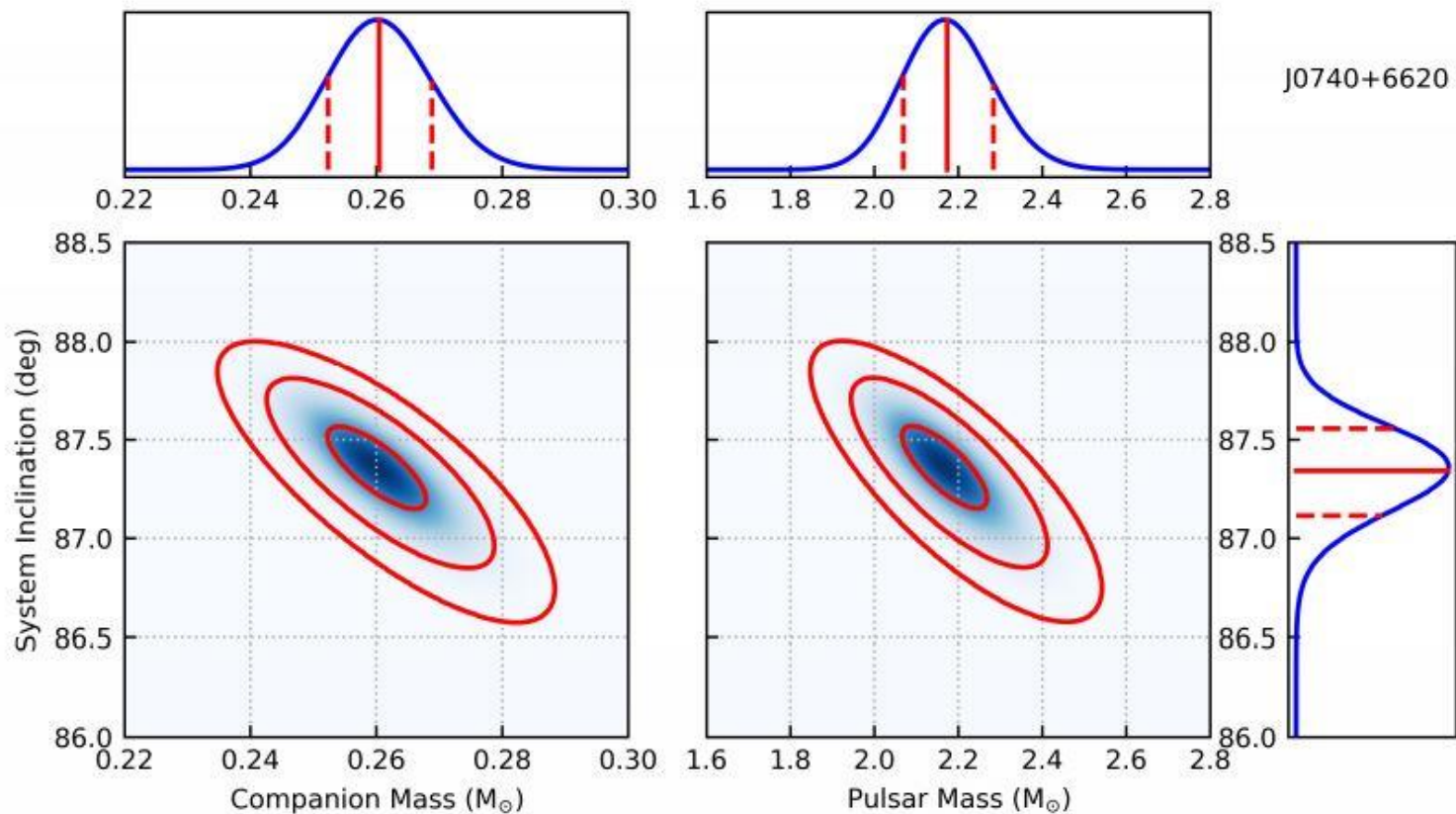
ispi,³

4

PSR J0348+0432 & optical observations of its companion PSR J0348+0432, a pulsar spinning at 39 ms in a 2.46-hr orbit with a low-mass companion, was detected by a recent survey (6, 7) conducted with the Robert C. Byrd Green Bank Telescope (GBT). Initial timing observations of the binary yielded an accurate astrometric position, which allowed us to identify its optical counterpart in the Sloan Digital Sky Survey (SDSS) archive (8). The colors and flux of the counterpart are consistent with a low-mass white dwarf (WD) with a helium core at a distance of $d \sim 2.1$ kpc. Its relatively high apparent brightness ($g' = 20.71 \pm 0.03$ mag) allowed us to resolve its spectrum using the Apache Point Optical Telescope. These observations revealed deep Hydrogen lines, typical of low-mass WDs, confirming our preliminary identification. The radial velocities of the WD mirrored that of PSR J0348+0432, also verifying that the two stars are gravitationally bound.

Re
pu

H.
P.
N.
M.
K.



J0740+6620

second

imer^{6,7},
ara^{12,13},
ynch¹⁴,
stairs¹⁵,

USA

71
V 26506,

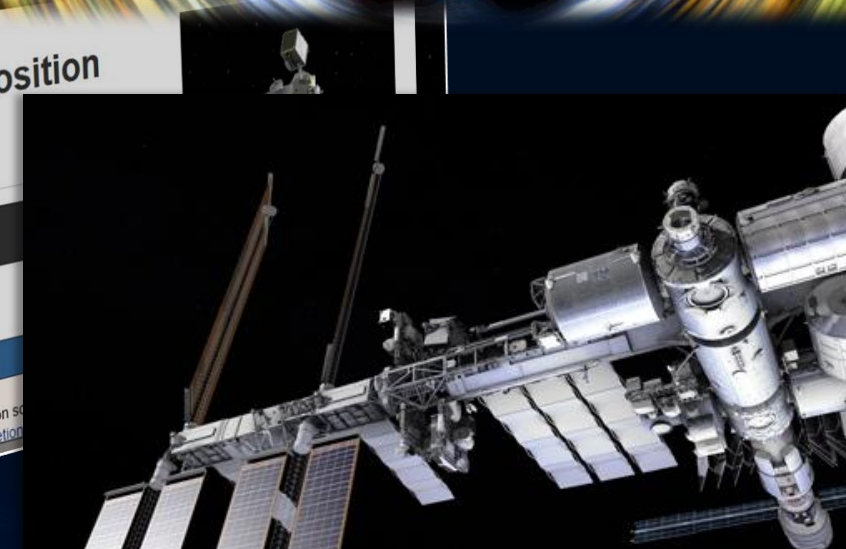
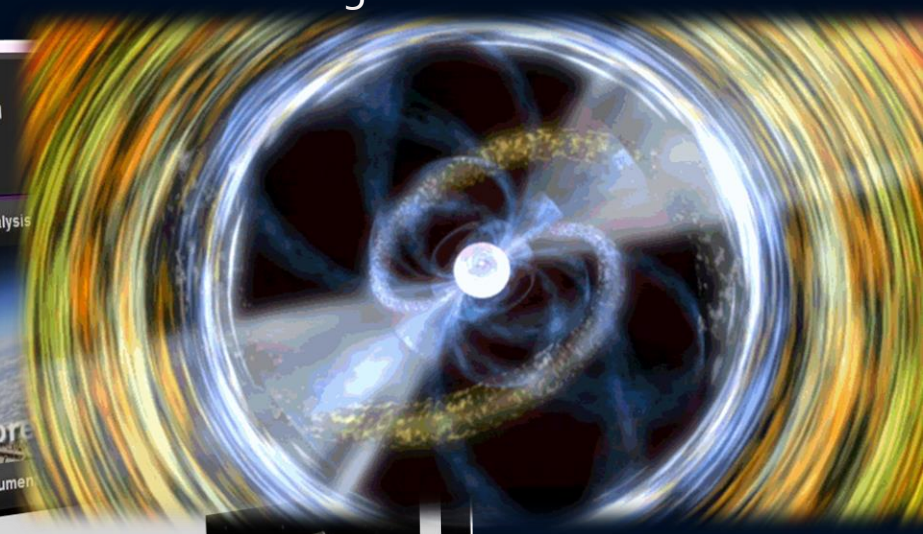
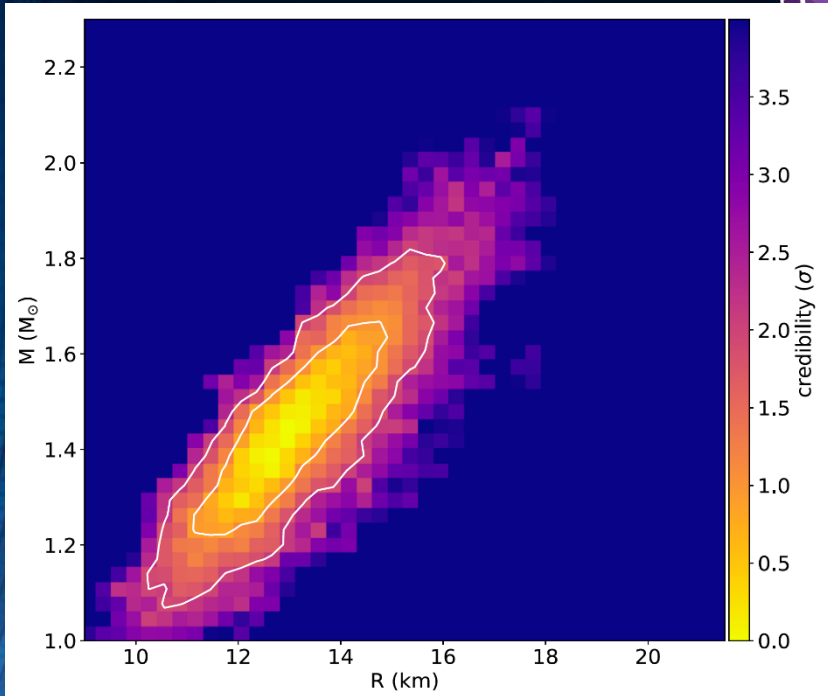
Building,

Figure 3: Map of fitted χ^2 distributions and corresponding probability density functions for m_p , m_c , and i . The left-hand heat map was generated by computing χ^2 values for different combinations of m_c and i ; the right-hand heat map was calculated by translating the $m_c - i$ probability density function to the $m_p - i$ phase space using the binary mass function. Darker blue regions correspond to lower χ^2 values. The three red circles correspond to 1, 2, and 3- σ significance cutoffs. Each of the three probability density functions (blue lines plotted on the tops and side of the heat maps) are projections of the χ^2 distributions. The solid red lines mark median values of each of the three parameters, while red dashed lines denote the upper and lower bounds of the 68.3% (1- σ) credibility interval.

10
11
12
13
14

NICER: Neutron Star Interior Composition Explorer

Der Neutronenstern Interior Composition Explorer (NICER) ist ein NASA-Teleskop, welches sich auf der Internationalen Raumstation befindet. Es wurde für das Studium der exotischen Zustände der Materie im Inneren von Neutronensternen entwickelt und hat in den letzten Jahren präzise die Radiuswerte einiger Neutronensterne bestimmen können und es wurden neue Erkenntnisse hinsichtlich der Magnetfeld-Geometrie von Neutronensternen gewonnen.



Gemessene Wahrscheinlichkeiten für die Masse und den Radius des Neutronensterns PSR J0030 + 0451, basierend auf der Analyse von Miller et al. (ApJ Letters 887, L24.

Twin stars and the sharp phase transitions

We explore the sharp phase transition in the relativistic mean-field model in conjunction with the phase transition with phase transition branch. We demonstrate that the mass-radius relation is constrained by the NICER measurements. The strong phase transition is ruled out below 1.7 times solar mass.

I. INTRODUCTION

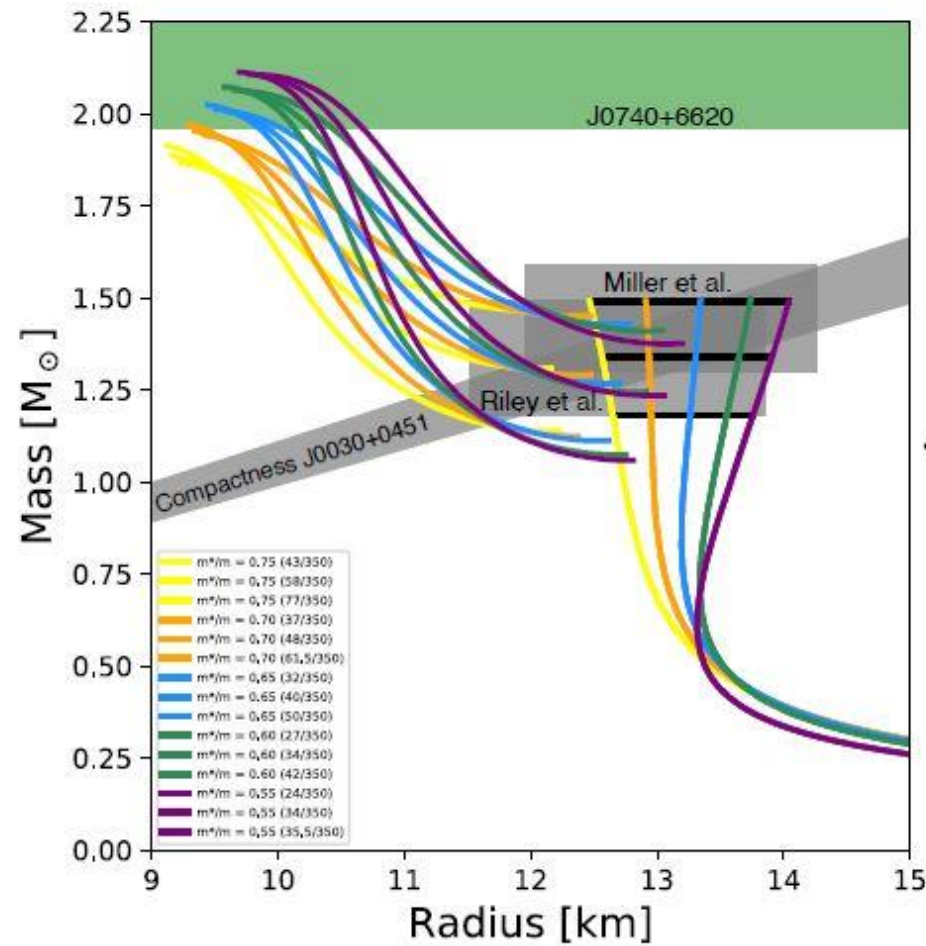


FIG. 6. Mass-radius relations for category III phase transitions are depicted for all considered effective nucleon masses. The constraints for the J0030+0451 measurement by NICER are taken from refs. [48, 49] and are shaded gray. The $2M_{\odot}$ constraint from J0740+6620 [44] is shaded green. All cases of m^*/m can generate neutron stars and hybrid stars within the NICER likelihood, if the transition parameters are chosen accordingly. The case $m^*/m = 0.75$ does not meet the $2M_{\odot}$ constraint if a phase transition takes place. The black straight lines indicate the maximal mass of the hadronic branch for the respective transitional pressure.

are ruling out strong phase transitions measurements

which¹, [47]
Frankfurt,
Germany

of state (EoS) with a phase transition we employ a hadronic EoS to vary the stiffness in order to compute multiple scenarios. The EoS with a stable second phase of nucleon mass can be ruled out. By using the recent results further and find that they are ruled out at densities

presented by Alford et al. [47]. The phase transition are chosen according

HE] 7 Jan 2021

ARTICLE TYPE

Studying the on astronomy of n

David Blaschke*^{1,2,3} | 1

¹Institute of Theoretical Physics, Ur
of Wroclaw, 50-204 Wroclaw, Pola

²Bogoliubov Laboratory of Theoret
Physics, JINR Dubna, 141980 Dub
Russia

³National Research Nuclear Univers
(MEPhI), 115409 Moscow, Russia

Correspondence

* Email: david.blaschke@uwr.edu.p

** Email: mateusz.cierniak@uwr.ec

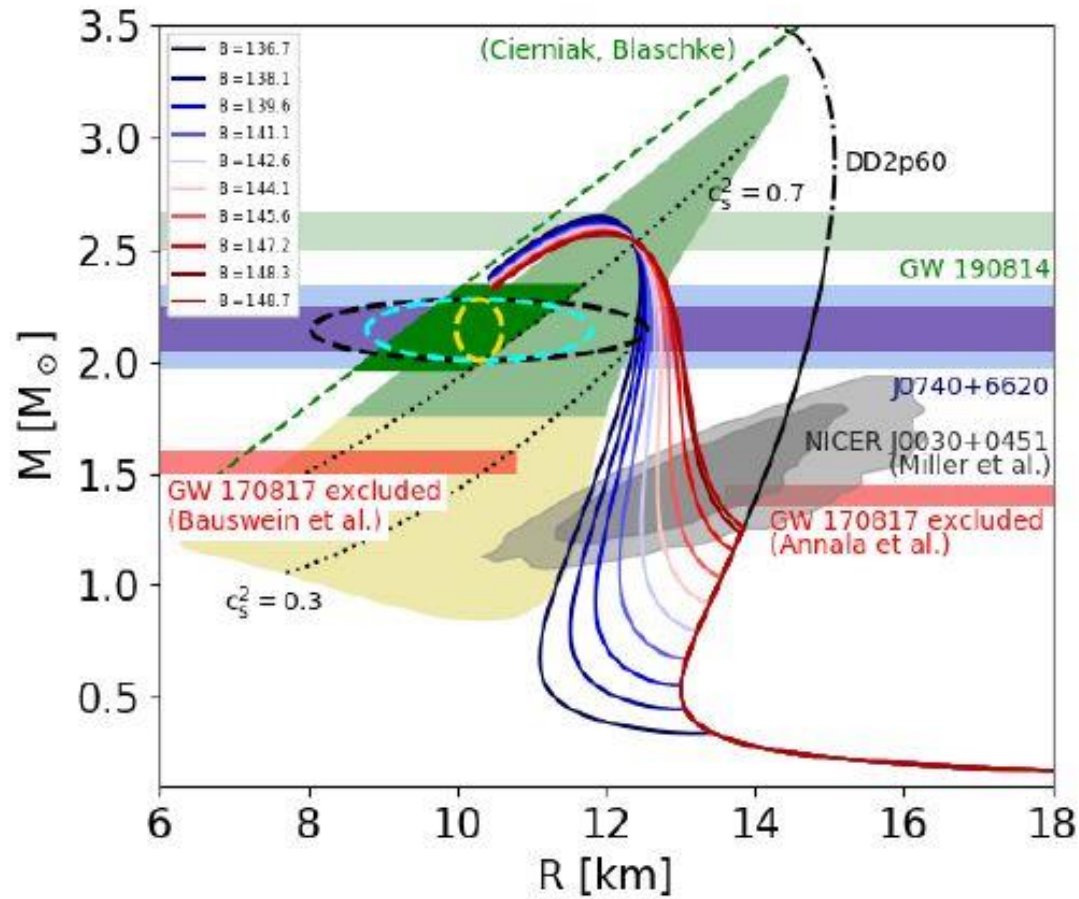


FIGURE 5 Mass-radius diagram for a hybrid star family that corresponding to the DD2p60-CSS hybrid EoS introduced in the text. The maximum mass on the hybrid star branch reaches the mass range of the lighter compact object in GW190814 (R. Abbott et al., 2020), which therefore could be a hypermassive neutron star. The sequences with lowest onset masses for deconfinement exhibit the twin phenomenon.

essenger

binary neutron star merger
 ses and radii of neutron stars.
 se constraints and predicts a
 lated only by hybrid neutron
 onjecture would be provided
 ass pulsar PSR J0740+6620
 s radius measurement yield a
 purely hadronic and a hybrid

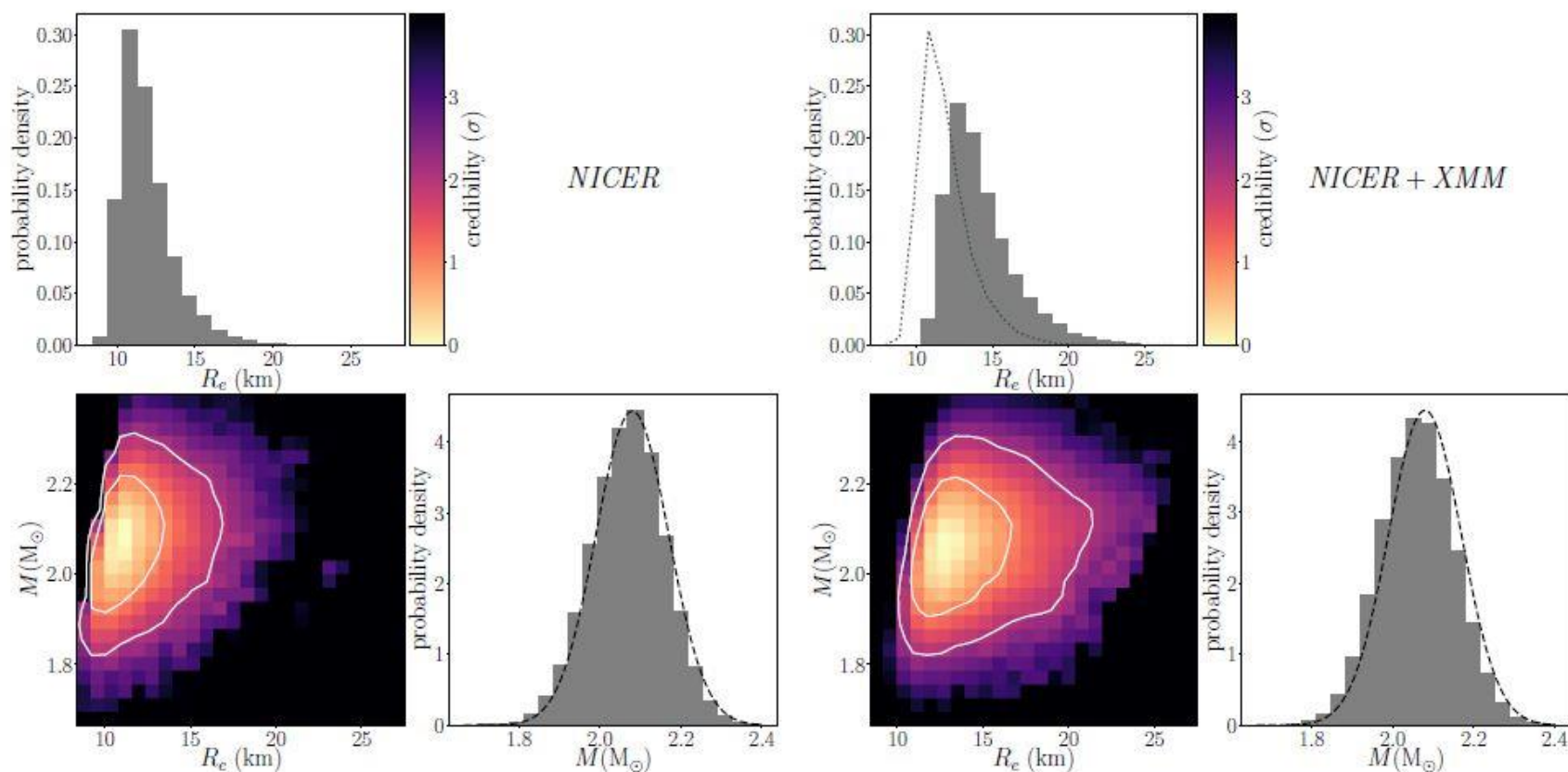


Figure 1. Comparison of the $M - R_e$ corner plots obtained using two circular spots, fit to only the *NICER* data (left panels) and to both the *NICER* and the *XMM-Newton* data with the nominal *XMM-Newton* calibration (right panels). All of the results that we present use pure hydrogen model atmospheres that allow for the possibility of partial ionization. The mass prior is represented by the dashed line in each of the one-dimensional mass posterior plots. In the mass-radius plots, brighter colors indicate higher posterior probability densities; the inner contour in these plots contains 68.3% of the posterior probability whereas the outer contour contains 95.4%. In the *NICER+XMM-Newton* one-dimensional radius posterior plot, the dotted line shows the posterior obtained using only the *NICER* data. The two radius posteriors have substantial overlap, but the effect of including the *XMM-Newton* data is to increase the favored radius by roughly 2 km.

DRAFT
Typeset

THE

M. C

M. L

T

I. C

M. KE

¹Depart

²Il


³Dep

DATA

ANIAN,⁵

BAKER,¹⁴

ARD,⁵

,^{17,18}

VAIRS ²⁹

20742-2421

ois at

ana, IL

14 May 2021

DRAFT VERSION MAY 17,
Typeset using L^AT_EX two

A NICER VIEW OF

THOMAS E. J.
SHARON M. MORS
KEITH C. GENDREAU,
RENEE M. LUI
RONALD A. REMIL
MATTHEW KERR,²

¹*Anton Pannekoek Ins*

²*St*

³*Columbia As*

⁴*IR*

⁶*Depar*

⁷*ASTRON, th*

⁸*X-Ray Astro*

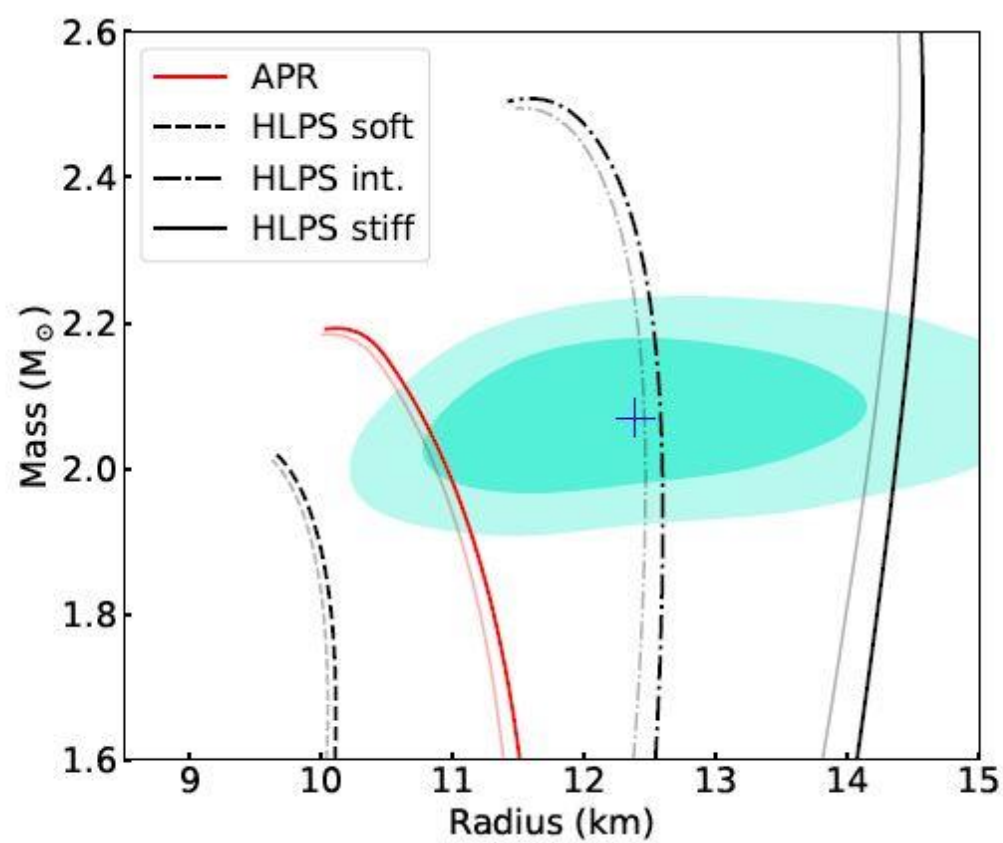


Figure 13. Mass versus equatorial radius for several example EOS models from [Hebeler et al. \(2013\)](#), showing the difference between non-rotating stellar models and stars rotating at 346 Hz. For each EOS shown the right hand (heavier) curve is for a spin of 346 Hz, while the left-hand (lighter) curve is for zero rotation. The 68% and 95% credible regions for mass and radius inferred from our analysis of PSR J0740+6620 are shown by the shaded *cyan* contours. The blue crosshair shows the inferred median values.

RADIO TIMING

JILLOT,^{4,5}
IA S. DENEVA,⁹
LOEWENSTEIN,^{13,14}
EINSTEIN,¹⁷
ROMARTIE,^{23,16}
IGRID STAIRS,²⁷

v, the Netherlands

927, USA

da

therlands

771, USA

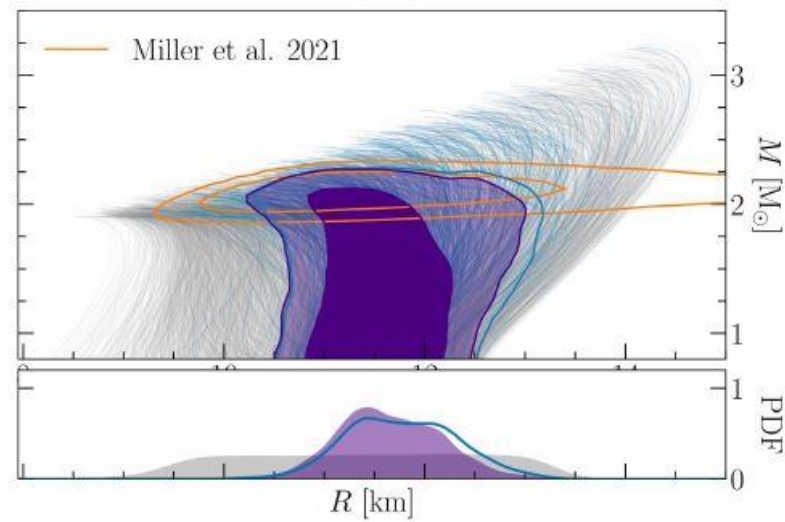
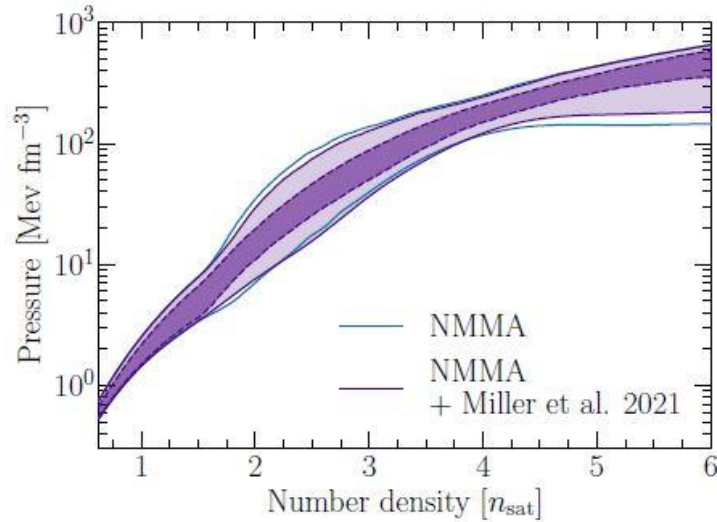
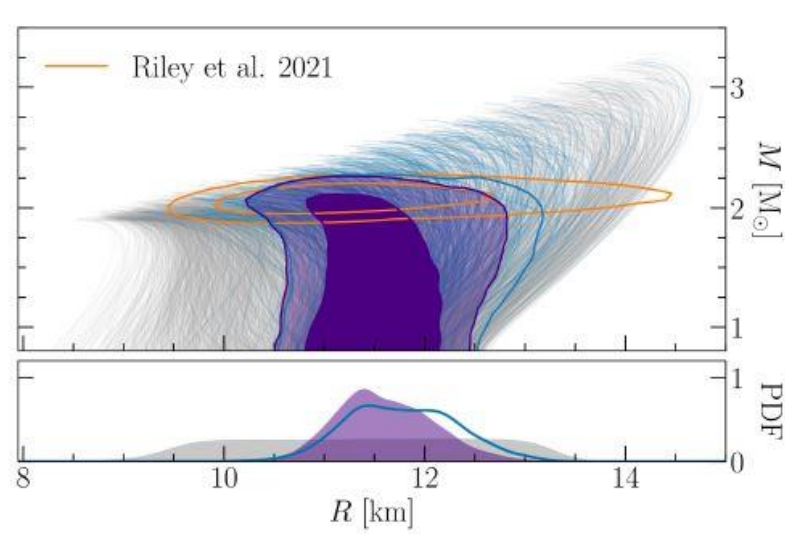
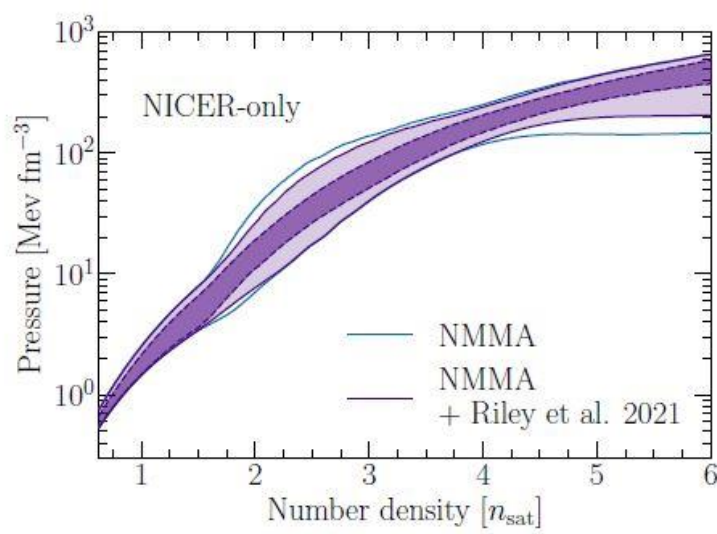


Figure 3. Left panels: The posterior for the pressure as a function of number density including the NICER-only observation of PSR J0740+6620 from Riley et al. (2021a) (upper panel) and from Miller et al. (2021b) (lower panel). The bands indicate 68% and 95% credible intervals. The 95% band for the NMMA result without the new NICER measurement is shown as comparison (blue line). Right panels: NICER mass-radius posteriors of PSR J0740+6620 plotted at 68% and 95% confidence intervals (orange contours) and the EOSs included in the analysis (gray lines). The 95% contour for the NMMA result without including the new NICER observation is shown as thick blue line, while the individual EOSs within this credible interval of the NMMA analysis are shown as thin blue lines. The resulting mass-radius posterior after the inclusion of the new NICER-only observation is shown in purple for the NICER result of Riley et al. (2021a) (upper panel) and of Miller et al. (2021b) (lower panel) at 68% and 95% credible intervals. The 1D insets show the posteriors for $R_{1.4}$ with (purple) and without (blue) the inclusion of the NICER-only measurement of PSR J0740+6620.

In t
wealth
nuclea
about
higher
radio

uation of State:

BROECK,^{1,2} AND

icht, The Netherlands

SA
olm, Sweden
sdam, Germany
476, Germany

provided a
sities above
1 masses of
sity. Even
cently, new
ay observa-

- Home
- EoS
- Overview
- Families
- Cold Neutron Star EoS**
- Relativistic mean field models
- Skyrme models (unified)
- Microscopic calculations
- STOS (H_Shen et al)
- Hybrid (quark-hadron) EoS
- Holographic (quark-hadron) EoS
- Models with hyperons
- All
- Cold Matter EoS
- Neutron Matter EoS

CompOSE

CompStar Online
Supernovae Equations of State



The online service CompOSE provides data tables for different state of the art equations of state (EoS) ready for further usage in astrophysical applications, nuclear physics and beyond.

The cold neutron star EoS tables can be used directly within [LORENE](#) to obtain models of (rotating/magnetised) neutron stars, see the `eos_compose` class.

If you decide to publish work using one or more of the here provided EoS we ask you to cite the given references and would be happy if you acknowledge CompOSE.

Data tables, associated software and the manual can be freely downloaded. Log in is required if you wish to use further utilities, such as graphics and online computations. Please contact "[develop.compose\(at\)obspm.fr](mailto:develop.compose(at)obspm.fr)" if you wish to have an

Reference Manual
Version 2.00

CompOSE

CompStar Online Supernovae Equations of State

"harmonising the concert of nuclear physics and astrophysics"

<https://compose.obspm.fr>

Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. [Matthias Hanauske](#)

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Aufgaben im Kurs allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Aufgaben im Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

[Berechnung von Christoffelsymbolen der Schwarzschild-Metrik](#)

[Berechnung des Riemann Tensors der Schwarzschild-Metrik](#)

[Probekörper fällt radial in ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Geodätische Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Radialer Wurf eines Probekörpers in der Nähe eines nichtrotierenden schwarzen Lochs](#)

[Berechnung eines Neutronensterns](#)

[Berechnung eines Weißen Zwergs](#)