

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*VORLESUNGSREIHE
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
11. MAI, 2023*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

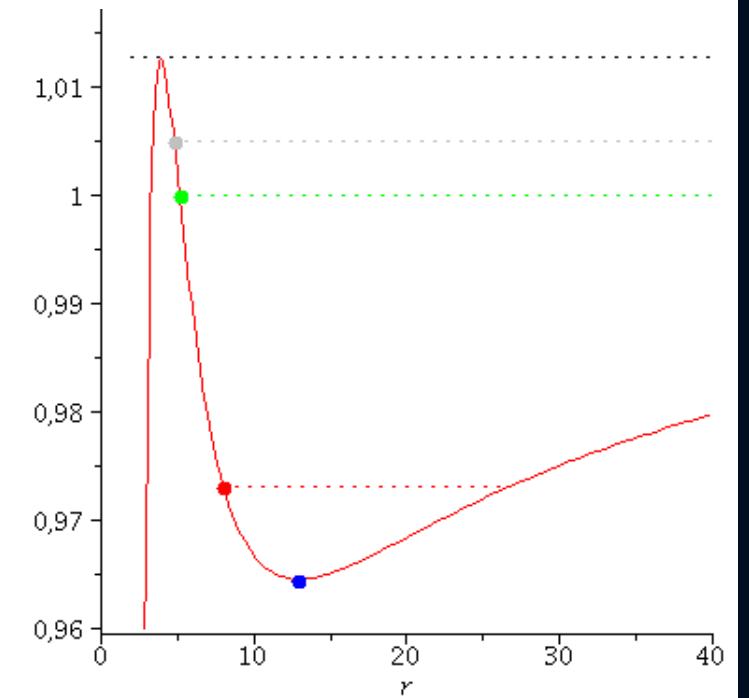
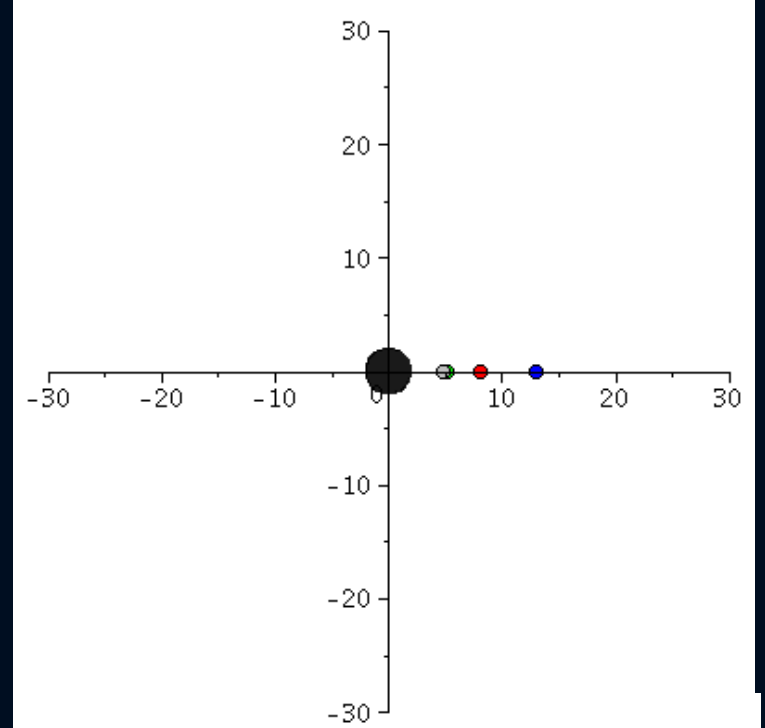
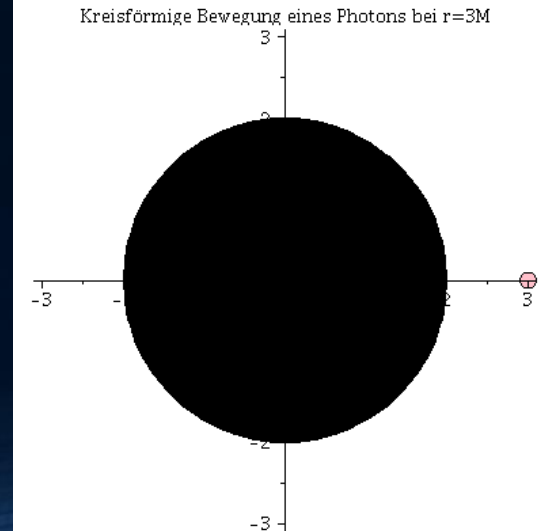
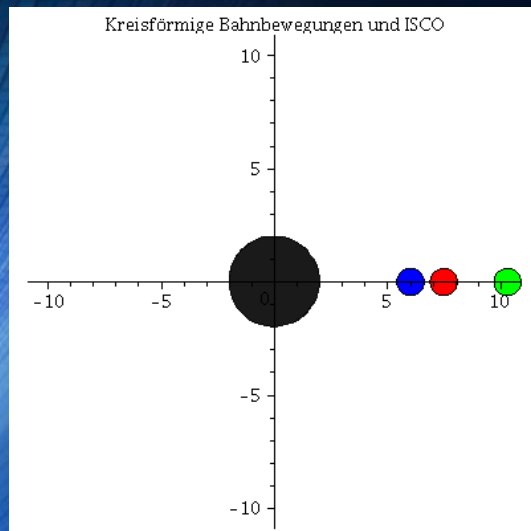
5. Vorlesung

Geodätische Bewegung um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

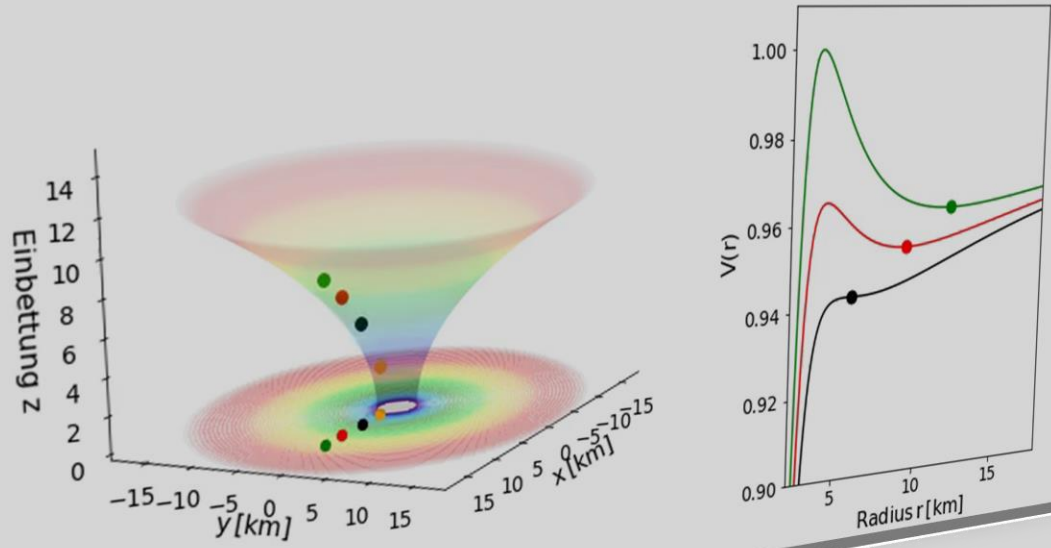
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

The *ISCO* and the *photon sphere*



Jupyter Notebook

Der ISCO und die Photonensphäre eines schwarzen Lochs



Bewegung eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch in der Ebene

Teil III: Der ISCO und die Photonensphäre

Im Folgenden werden die beiden Konzepte

- a) die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch
- b) Die Photonensphäre eines nicht-rotierendes schwarzes Loches

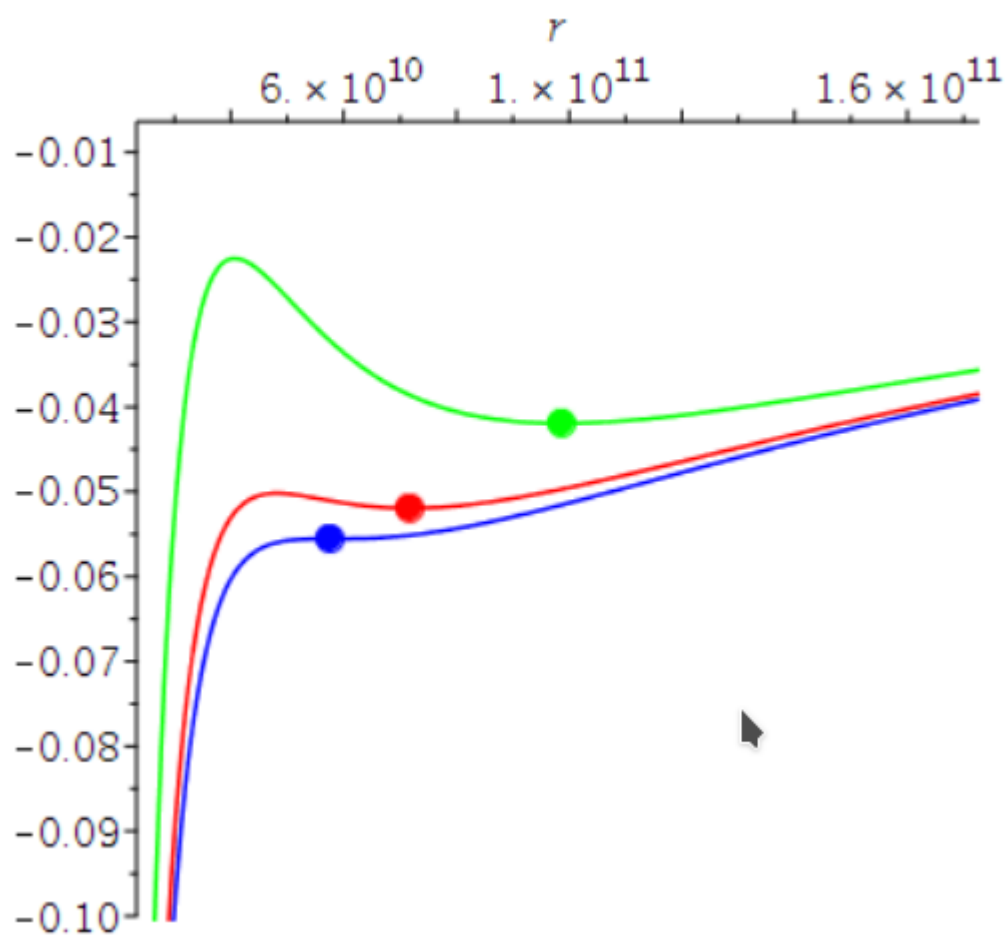
a) Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loches

Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum herunterladen

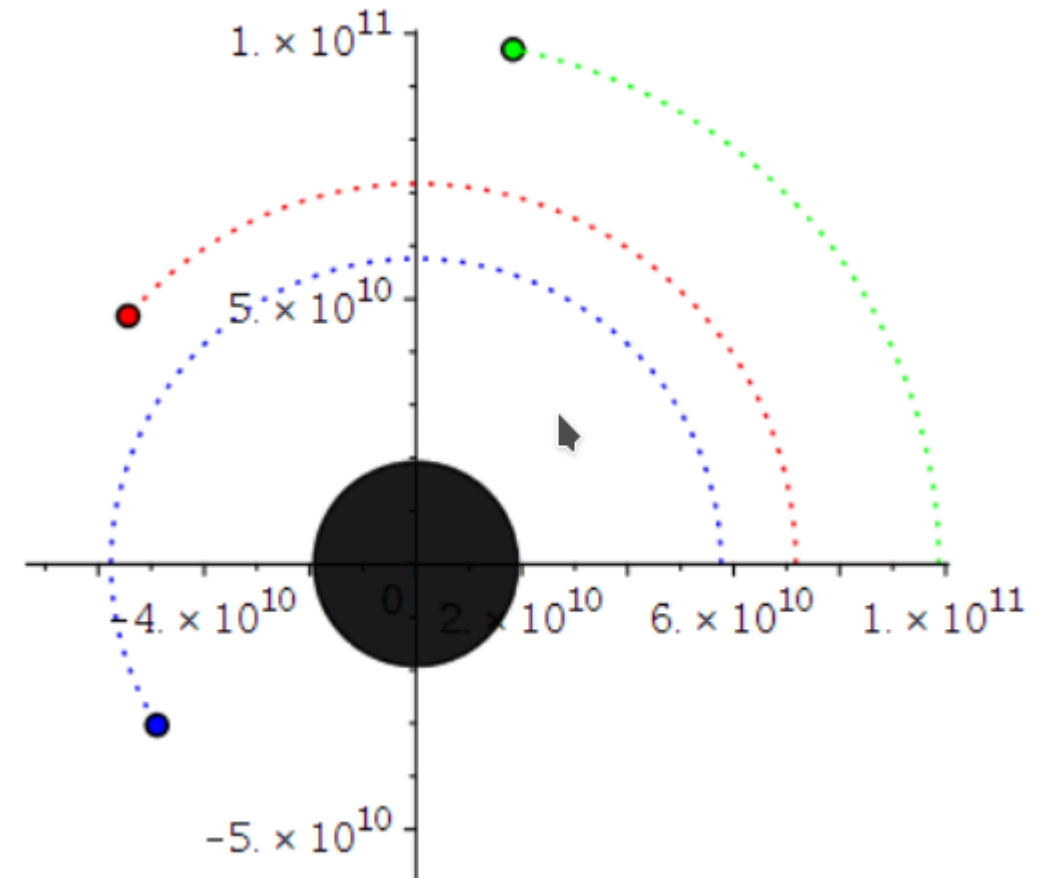
The screenshot shows the website of Goethe University Frankfurt am Main. The header includes the university logo and navigation links: 'Startseite', 'Lehren & Lernen', 'Kursangebote', and 'Allgemeine Relativitätstheorie...'. The main content area is titled 'Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer'. A sidebar on the left lists course resources: 'Literaturverzeichnis', 'Einschreibung', 'Kursinhalt', 'Vorlesungsaufzeichnung', 'Aufgaben', and 'Programme'. Under 'Programme', there is a list of topics, including 'Einführung in Jupyter Notebooks', 'Allgemeine Relativitätstheorie mit Python', 'Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik', 'Radialer Fall eines Probekörpers in ein schwarzes Loch', 'Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen', 'Der ISCO und die Photonensphäre', 'Maple Worksheets I', and 'Jupyter Notebooks'. Two blue arrows point from the text in the foreground to the 'Jupyter Notebooks' entry in the sidebar.

Das effektive Potential eines Probekörpers am ISCO hat eine Sattelpunkteigenschaft

Effektives Potential $V(r)$ (Def. nach Ref. 1-3) für drei verschiedene Drehimpulse



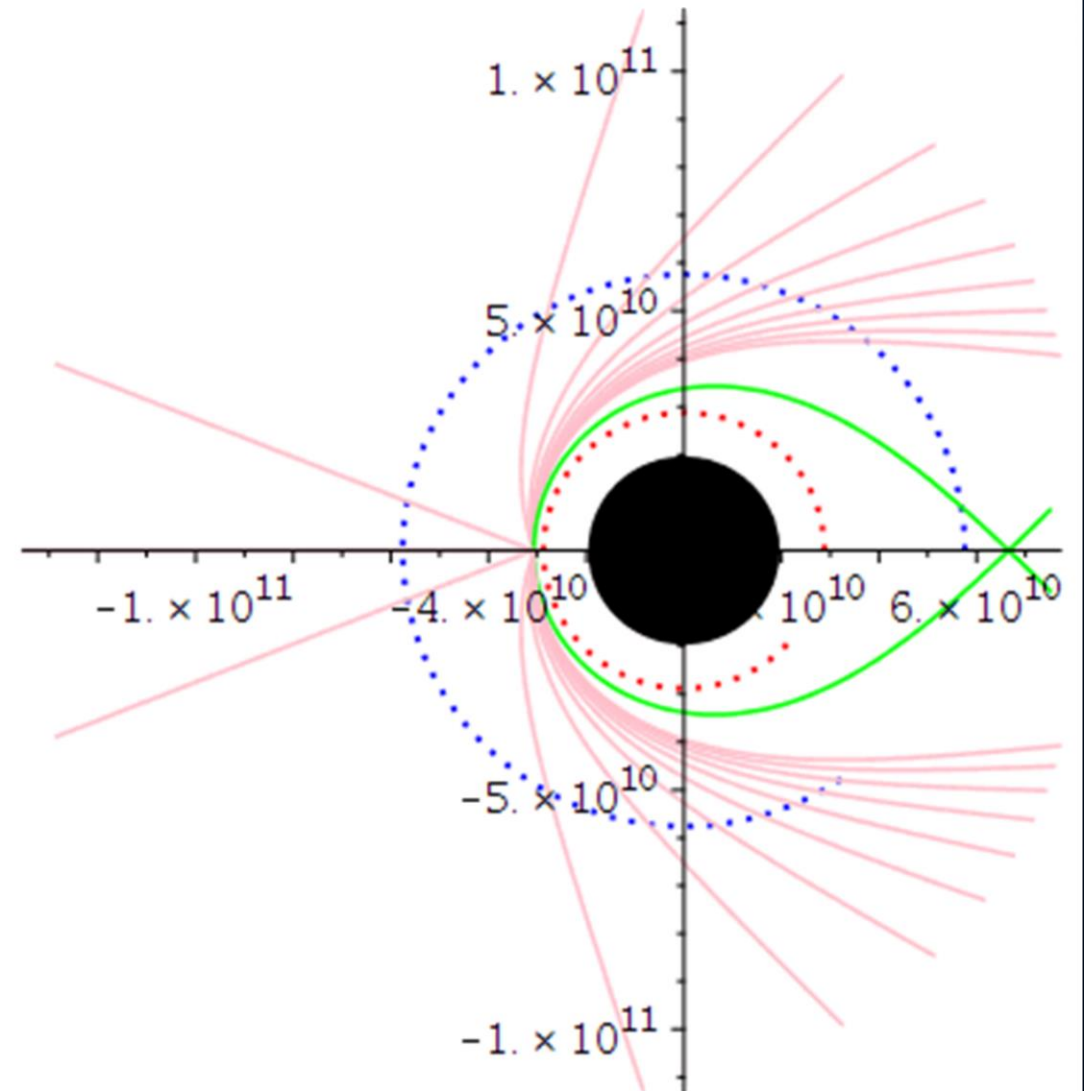
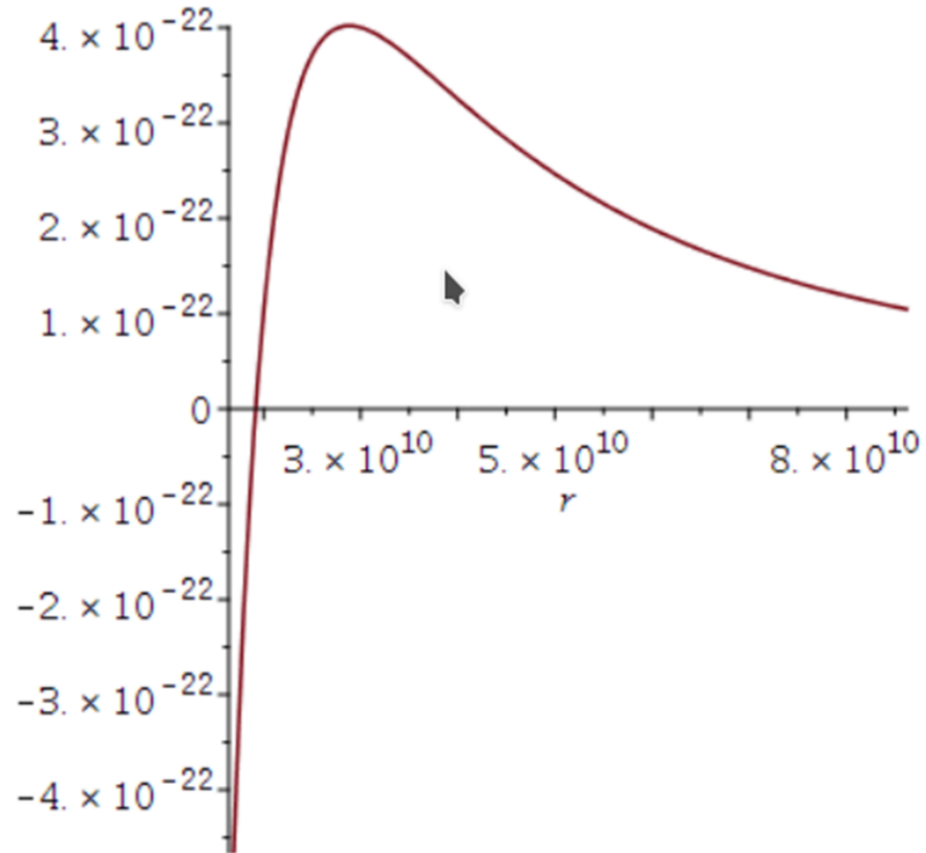
Kreisförmige Bahnbewegungen und ISCO



Masselose Teilchen (Photonen): Das effektive Potential und die Photonensphäre bei $3M$

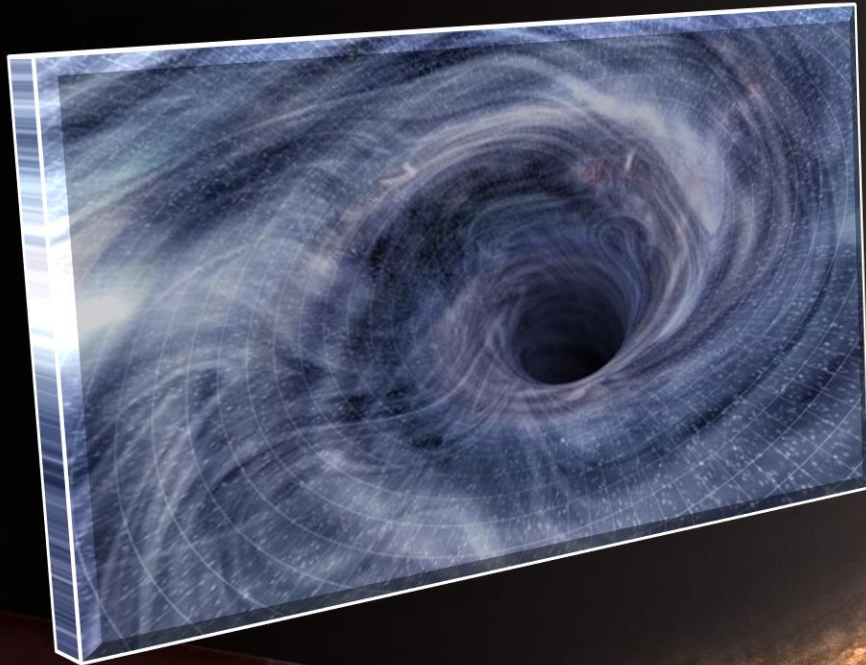
$$V_{\text{effPhotonHobson}} := (r, M) \mapsto \frac{1 - \frac{2M}{r}}{r^2}$$

Effektives Potential $V(r)$ (Def. nach Ref. 1-3) für
Photonen



Blau: ISCO , Rot: Photonensphäre

Wie sehen schwarze Löcher aus?



Wie sieht das schwarze Loch im Zentrum unserer Galaxie aus?



Das EU-Projekt **BlackHoleCam**
L.Rezzolla, H.Falke und M.Kramer

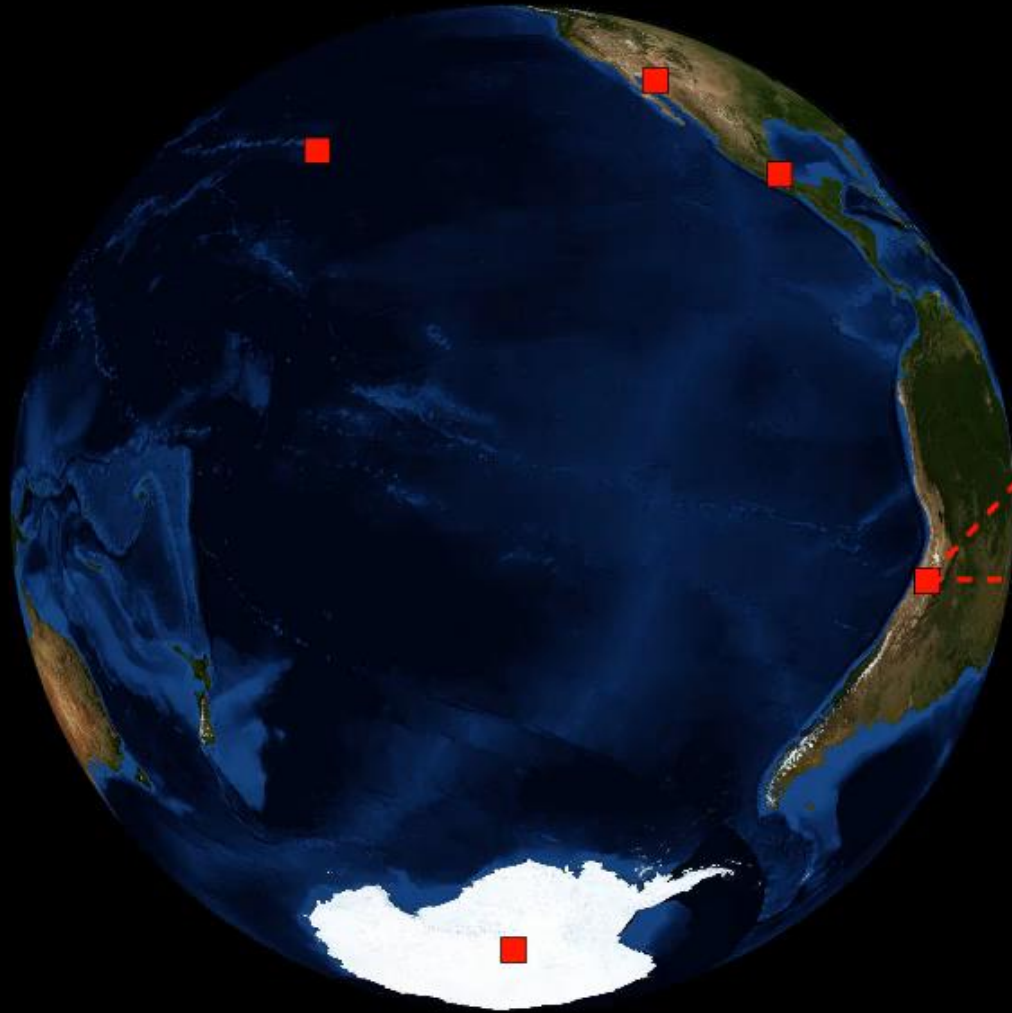
Das Bildnis des schwarzen Loches

(wie wird das wirkliche Bildnis des schwarzen Loches im Zentrum der Milchstrasse aussehen?)



*Simulationen
erstellt von
Dr. Ziri Younsi
(2017)*

Event Horizon Telescope



Atacama Large
Millimeter Array (ALMA)



Coordinates: $23^{\circ} 01' 09''\text{S}$, $67^{\circ} 45' 12''\text{W}$

Diameter: 12m

Das EHT ist ein
virtuelles Radioteleskop
der Größe der Erde

Das Event Horizon Teleskop (EHT) ist eine hochgradig internationale Kooperation von Radioteleskopen die mittels Langbasisinterferometrie das erste Bild eines schwarzen Loches aufzeichnen konnte

*Python-Animation erstellt
von Dr. Christian Fromm*

Bilder von zwei schwarzen Löchern werden erwartet

(Stand 04.2017)

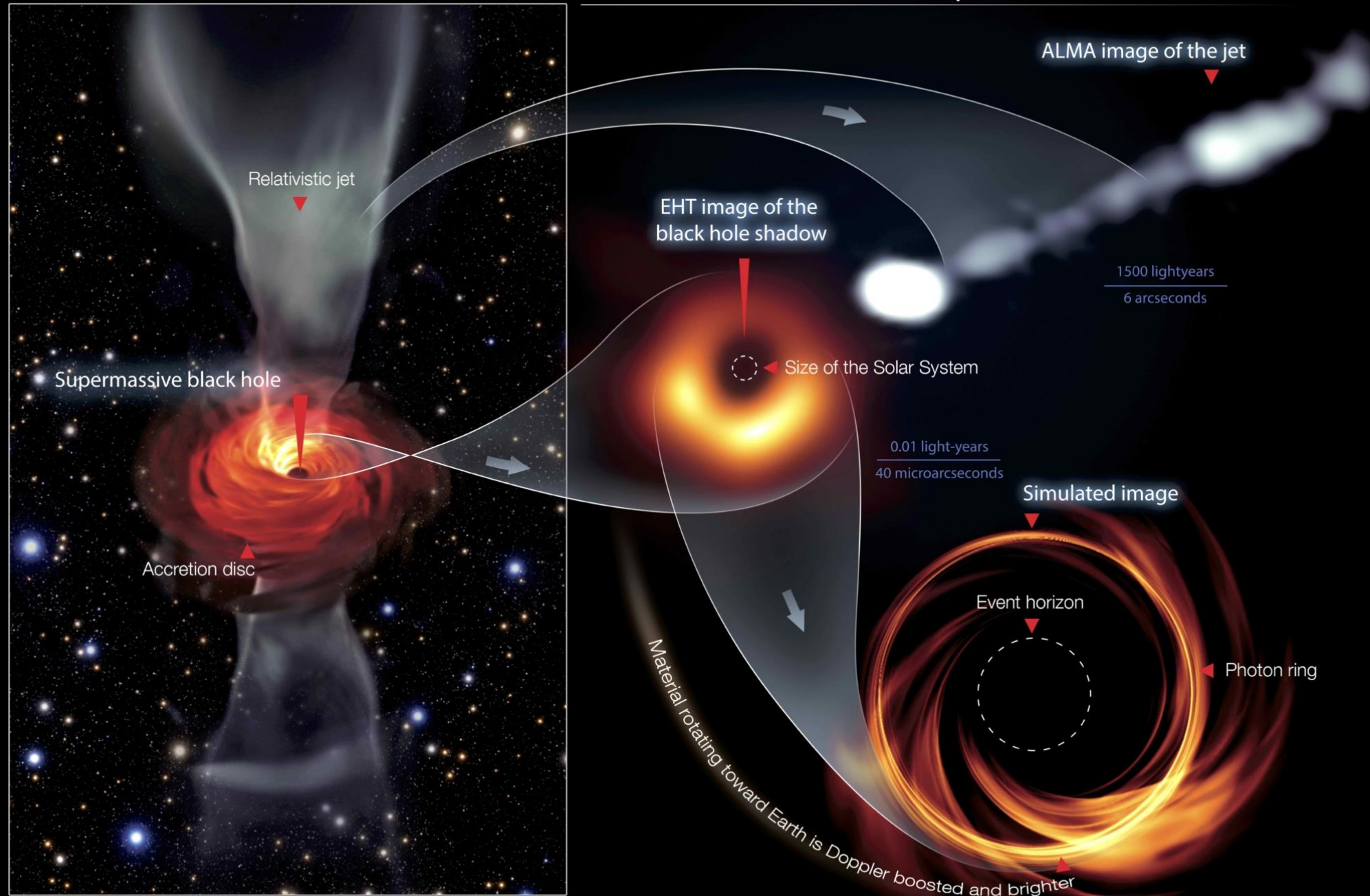
	M87	Sgr A*
Mass (M_{sun})	3-6 x 10^9 (?)	4 x 10^6
Distance	16 Mpc	8.5 kpc
Luminosity	10^{44} erg/s	10^{36} erg/s
Mdot (M_{edd})	10^{-4}	10^{-8}
BH Spin Axis	Gal disk?	10-25 deg los
@ the BH?	Maybe	Yes
B field @ BH	60-130 G	10-100 G
Scattered?	No	yes
Shadow Size	640 AU	0.5 AU
Shadow Angle	20-40 μas	52 μas
GM/c ³	8 hrs	20 sec
Jet Power	10^{42} - 10^{43} erg/s	?

Das erste Bild des Schwarzen Loches in M87

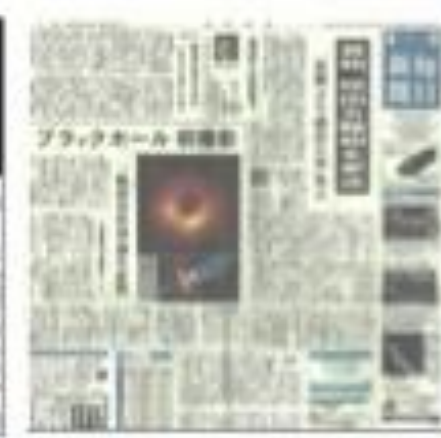
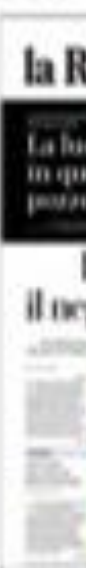
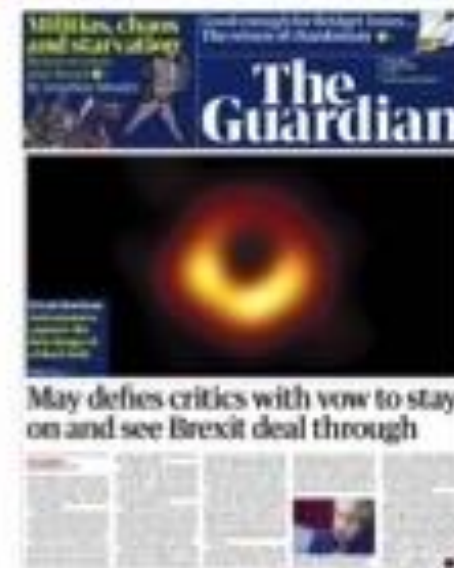
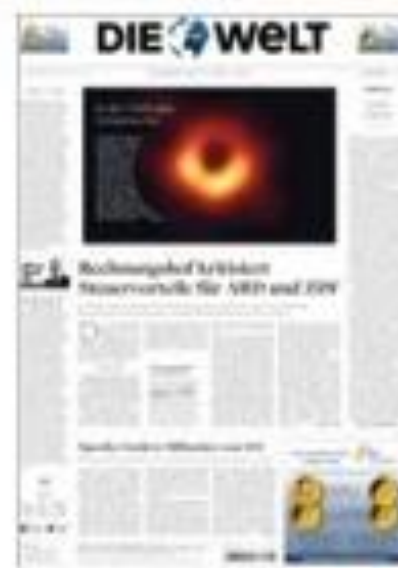
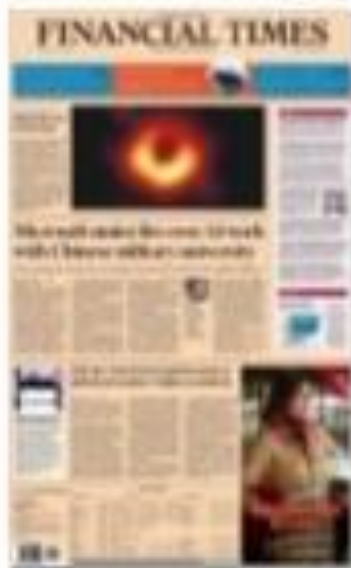


Eine Reise in das Herz von Messier 87

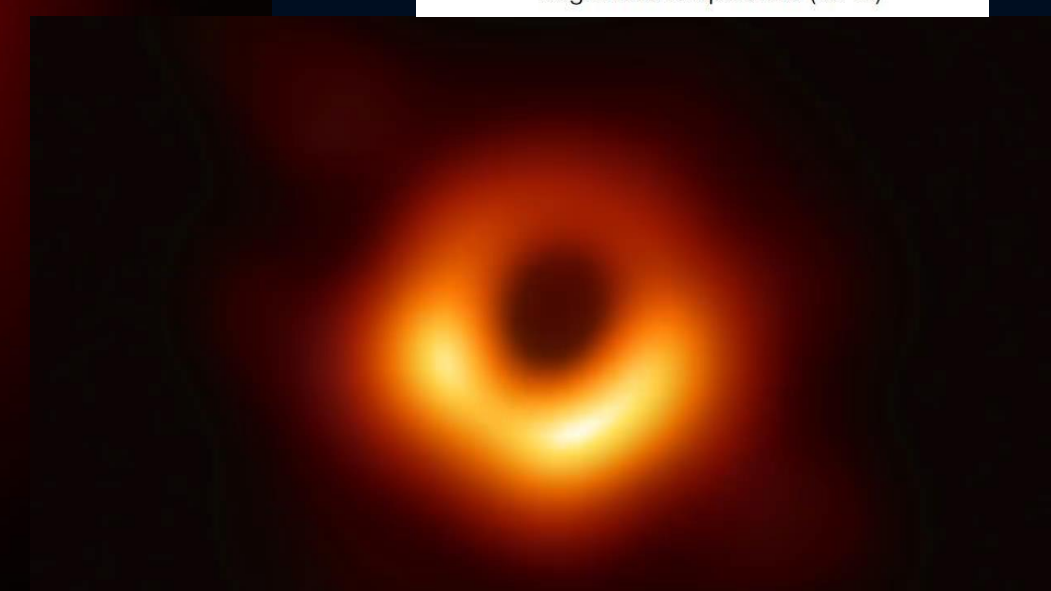
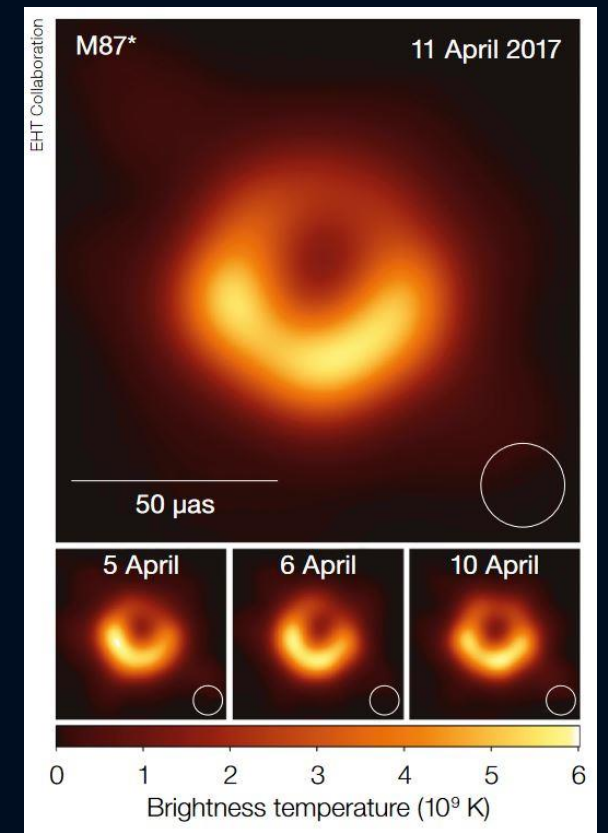
M87 Black Hole – Event Horizon Telescope



Die ersten Bilder eines Schwarzen Lochs



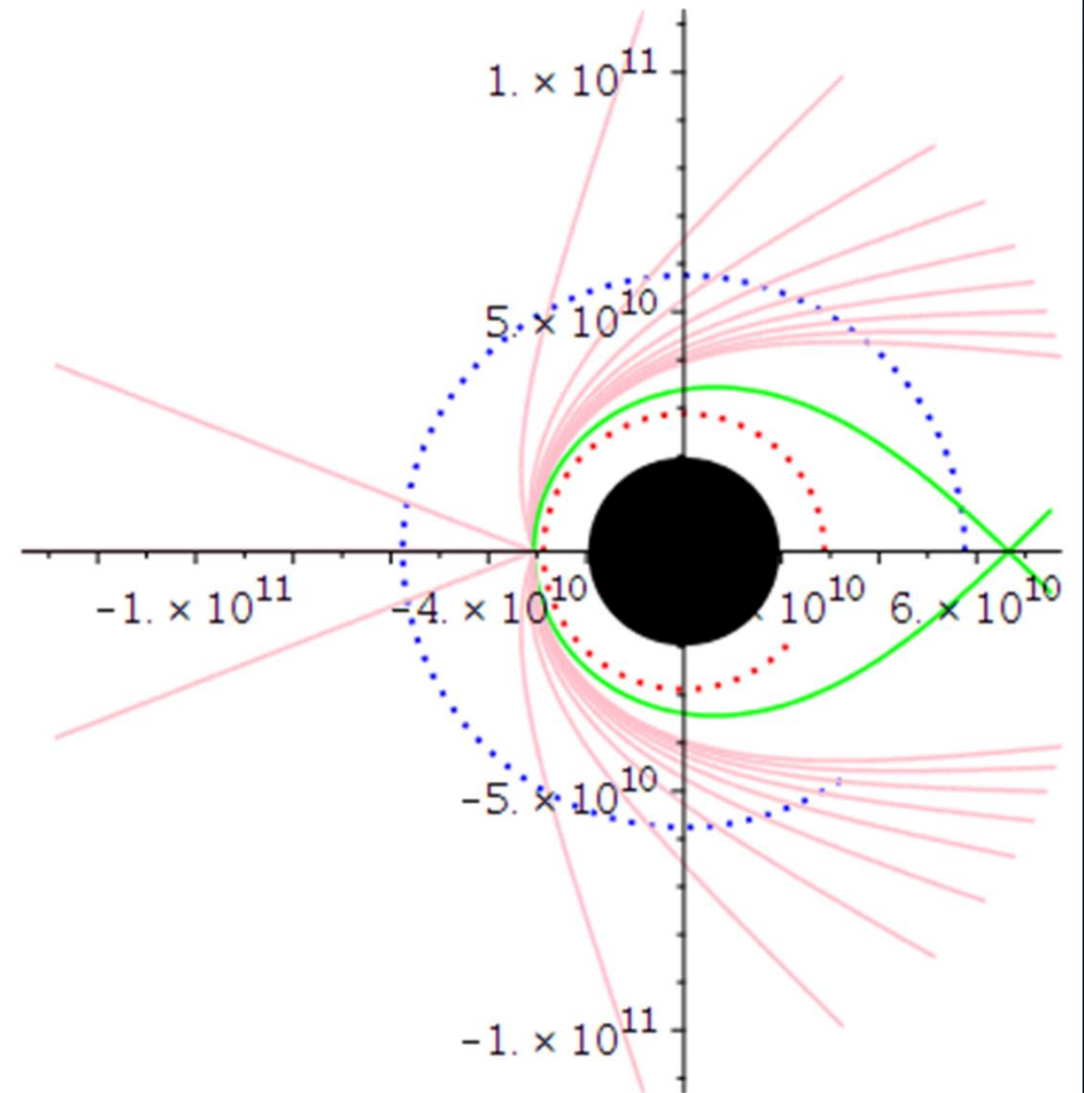
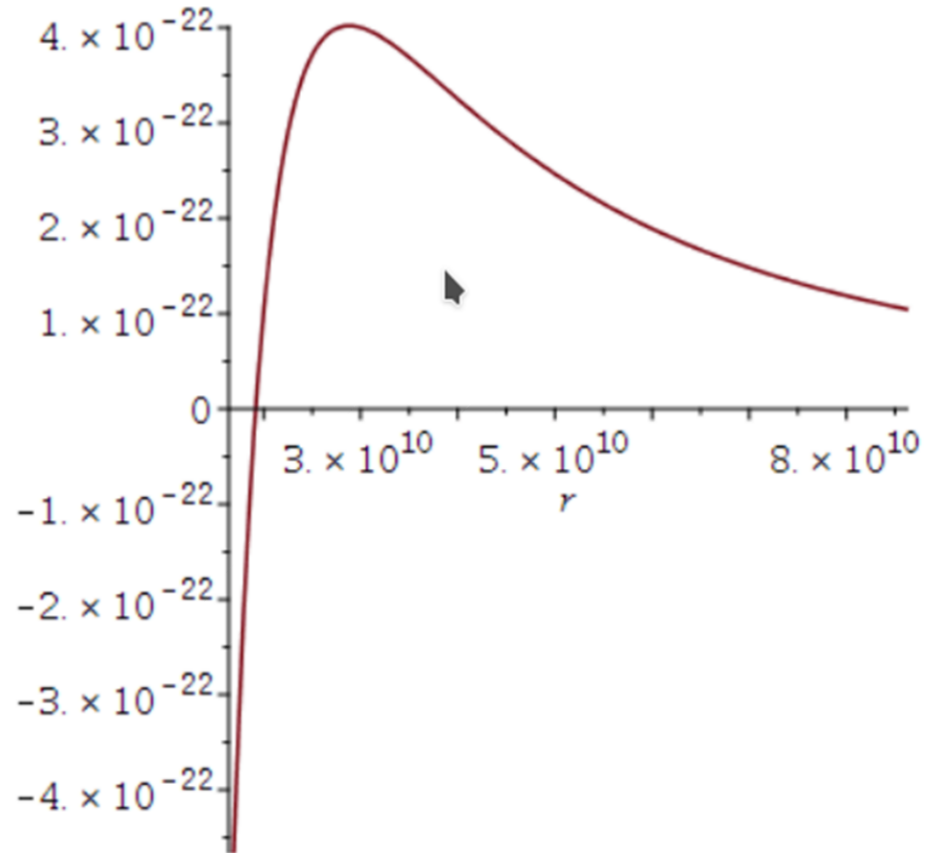
Aktuelle und zukünftige Bilder



Masselose Teilchen (Photonen): Das effektive Potential und die Photonensphäre bei $3M$

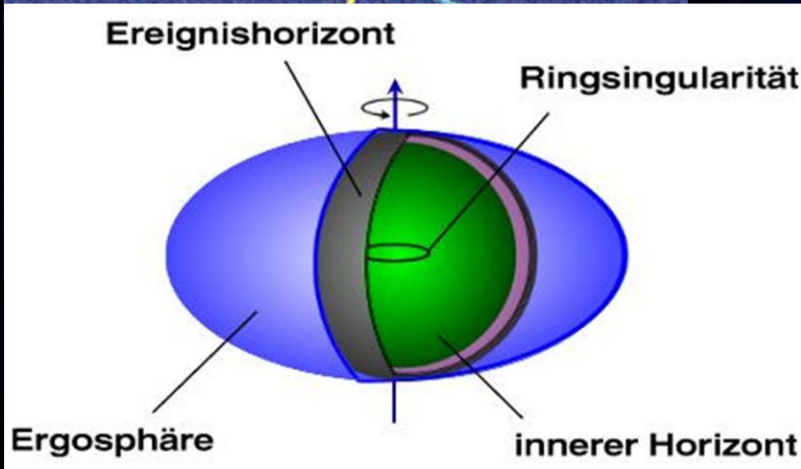
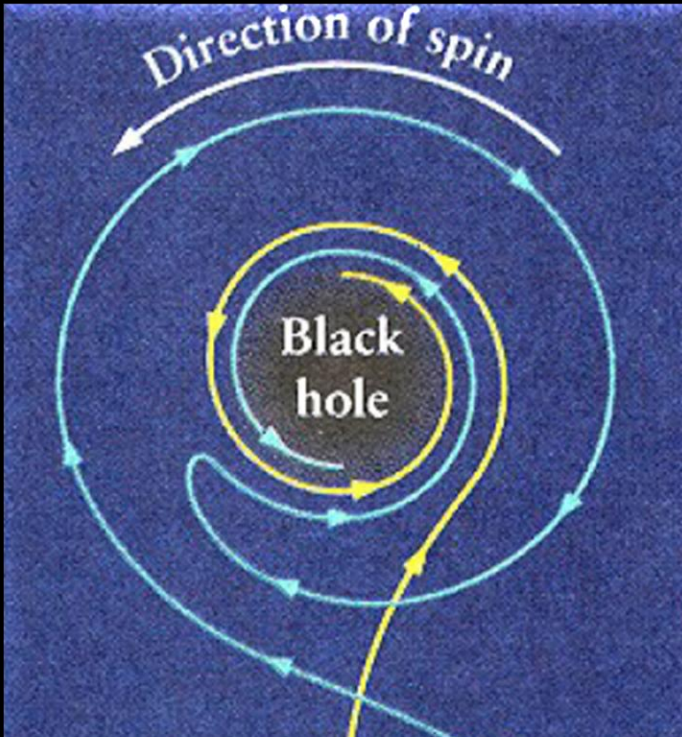
$$V_{\text{effPhotonHobson}} := (r, M) \mapsto \frac{1 - \frac{2M}{r}}{r^2}$$

Effektives Potential $V(r)$ (Def. nach Ref. 1-3) für
Photonen



Blau: ISCO , Rot: Photonensphäre

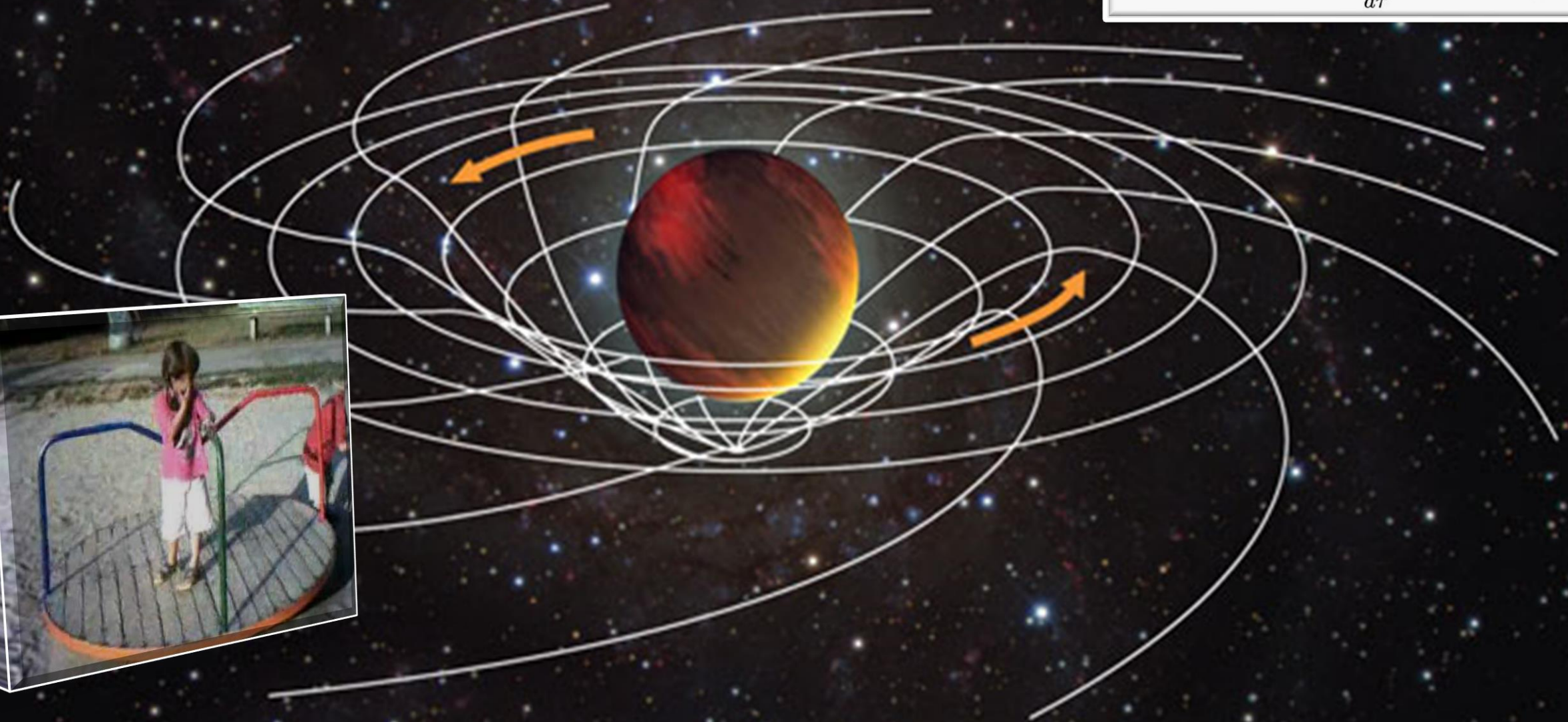
Rotierende schwarze Löcher und die Kerr Metrik



Der Mitführungseffekt der Raumzeit ("Frame-Dragging")

"Frame dragging" Frequenz der Raumzeit:

$$\omega(r, \theta) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}$$



Der Mitführungseffekt der Raumzeit ("Frame-Dragging")

Experimente zur Bestätigung des Effektes im Jahre 2004: Gravity Probe B

Étoile de référence
IM Pegasi
(HR 8703)

Effet Lense-Thirring
39 milliarcsecondes/année
(0,000011 degrés/année)

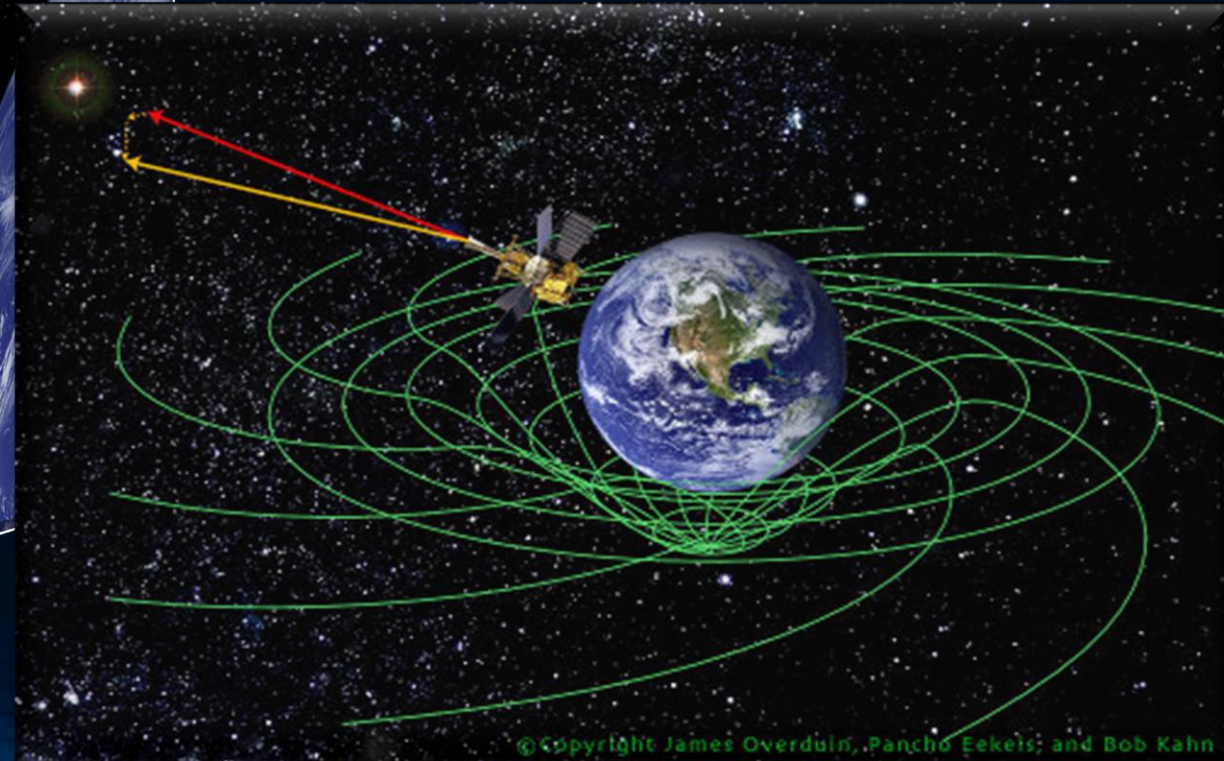
Précession géodétique
6 606 milliarcsecondes/année
(0,0018 degrés/année)

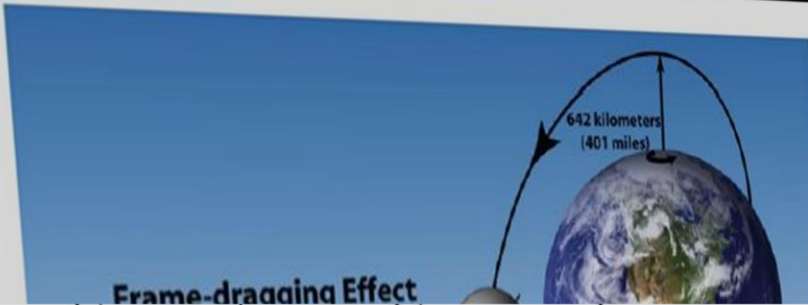
$$\Omega = \frac{3GM}{2c^2 R^3} (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) + \frac{GI}{c^2 R^3} \left[\frac{3R}{R^2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}) - \boldsymbol{\omega} \right]$$

Précession géodétique Effet Lense-Thirring

642 kilomètres
(~400 miles)

$$\omega(r, \theta) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}$$





Frame-dragging Effect

Gravity Probe B Testing Einsteins Universe

angles; taking \hat{s} as the gyro spin vector, Schiff found a drift rate $\frac{d\hat{s}}{dt} = (\vec{\Omega}_g + \vec{\Omega}_{fd}) \times \hat{s}$, where

$$\vec{\Omega}_g = \frac{3GM}{2c^2 r^3} (\vec{r} \times \vec{v}) \quad \text{and} \quad \vec{\Omega}_{fd} = \frac{GI}{c^2 r^3} \left[\frac{3\vec{r}}{r^2} (\vec{\omega}_e \cdot \vec{r}) - \vec{\omega}_e \right] \quad (1)$$

G being the gravitational constant, c the velocity of light, M , I , $\vec{\omega}_e$ the Earth's mass, moment of inertia and angular velocity, r and v the radius and velocity in the orbit. Other theories,

artificial satellite, the Russian satellite, searching for a related effect Ω_{fd} on gyroscopes (the geodetic term Ω_g , $\sim 168 \times$ larger, from spacetime curvature (the circumference of the orbit being $< 2\pi r$). In the polar orbit of figure 1 the two effects are of the same order of magnitude. Schiff found a drift rate $\frac{d\hat{s}}{dt} = (\vec{\Omega}_g + \vec{\Omega}_{fd}) \times \hat{s}$, where

$$\vec{\Omega}_g = \frac{3GM}{2c^2 r^3} (\vec{r} \times \vec{v}) \quad \text{and} \quad \vec{\Omega}_{fd} = \frac{GI}{c^2 r^3} \left[\frac{3\vec{r}}{r^2} (\vec{\omega}_e \cdot \vec{r}) - \vec{\omega}_e \right] \quad (1)$$

c the velocity of light, M , I , $\vec{\omega}_e$ the Earth's mass, moment of inertia and angular velocity, r and v the radius and velocity in the orbit. Other theories,

Past Missions
Future Missions
Launch Schedule
Mission Calendar

Worldbook at NASA

Relativity: Einstein's two theories are the "foundation blocks" of modern physics.

Learn More

predictions derived from Einstein's general theory of relativity which the spacecraft was designed to test. The experiment, launched in 2004, used four ultra-precise gyroscopes to measure the hypothesized geodetic effect, the warping of space and time around a

<https://einstein.stanford.edu/>

https://www.nasa.gov/mission_pages/gpb/

The Gravity Probe B EXPERIMENT

Measuring the Frame-Dragging Effect

Excerpted from the movie
"Testing Einstein's Universe"



The Gravity Probe B
EXPERIMENT

**GP-B in the Context
of Black Holes**

Kip Thorne

Feynman Professor of Theoretical Physics
Caltech

GP-B Pre-launch Press Conference
NASA Headquarters, April 2, 2004



Experimentelle Bestätigung des "Frame-Dragging" !

PRL 106, 221101 (2011)

 Selected for a *Viewpoint in Physics*
PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
3 JUNE 2011



Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity

C. W. F. Everitt,^{1,*} D. B. DeBra,¹ B. W. Parkinson,¹ J. P. Turneure,¹ J. W. Conklin,¹ M. I. Heifetz,¹ G. M. Keiser,¹
A. S. Silbergleit,¹ T. Holmes,¹ J. Kolodziejczak,² M. Al-Meshari,³ J. C. Mester,¹ B. Muhlfelder,¹ V. G. Solomonik,¹
K. Stahl,¹ P. W. Worden, Jr.,¹ W. Bencze,¹ S. Buchman,¹ B. Clarke,¹ A. Al-Jadaan,³ H. Al-Jibreen,³ J. Li,¹ J. A. Lipa,¹
J. M. Lockhart,¹ B. Al-Suwaidan,³ M. Taber,¹ and S. Wang¹

¹*HEPL, Stanford University, Stanford, California 94305-4085, USA*

²*George C. Marshall Space Flight Center, Huntsville, Alabama 35808, USA*

³*King Abdulaziz City for Science and Technology, Riyadh, Saudi Arabia*

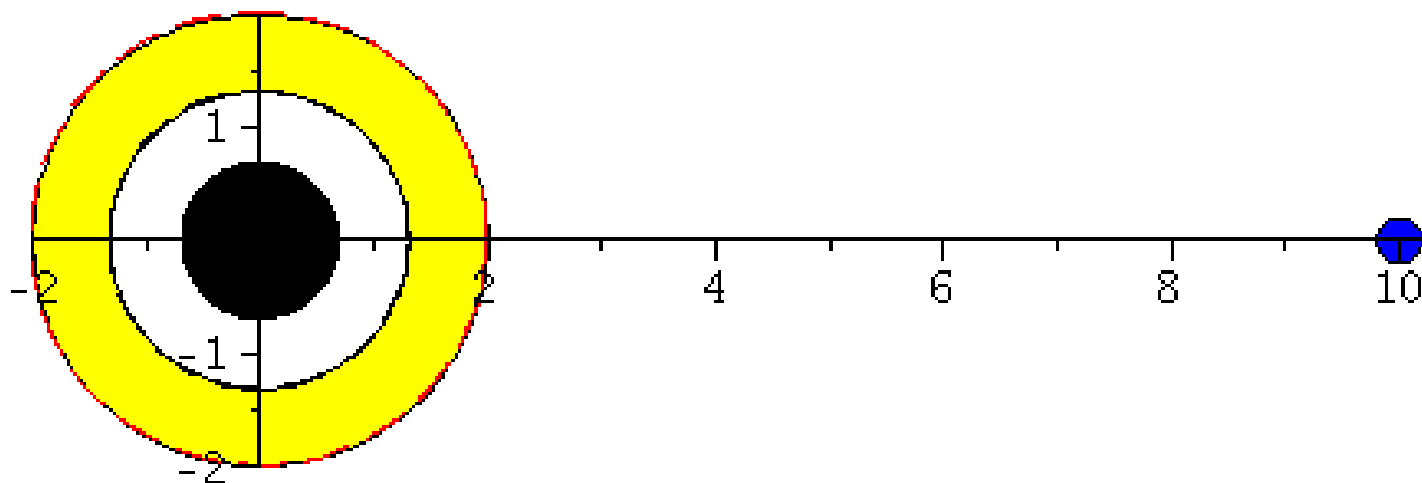
(Received 1 April 2011; published 31 May 2011)

Gravity Probe B, launched 20 April 2004, is a space experiment testing two fundamental predictions of Einstein's theory of general relativity (GR), the geodetic and frame-dragging effects, by means of cryogenic gyroscopes in Earth orbit. Data collection started 28 August 2004 and ended 14 August 2005. Analysis of the data from all four gyroscopes results in a geodetic drift rate of -6601.8 ± 18.3 mas/yr and a frame-dragging drift rate of -37.2 ± 7.2 mas/yr, to be compared with the GR predictions of -6606.1 mas/yr and -39.2 mas/yr, respectively ("mas" is milliarcsecond; $1 \text{ mas} = 4.848 \times 10^{-9}$ rad).

DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.221101

PACS numbers: 04.80.Cc

Der Mitführungseffekt der Raumzeit ("Frame-Dragging") und der Gravitomagnetische Effekt



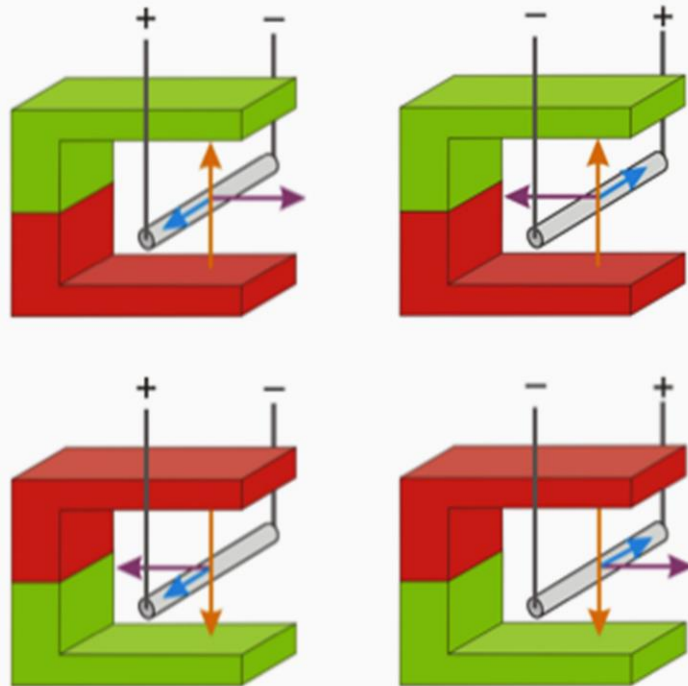
Blauer Probekörper fällt in
ein rotierendes schwarzes
Loch

Roter Probekörper fällt in
ein nicht-rotierendes
schwarzes Loch

Der gravitomagnetische Effekt

Beobachtung

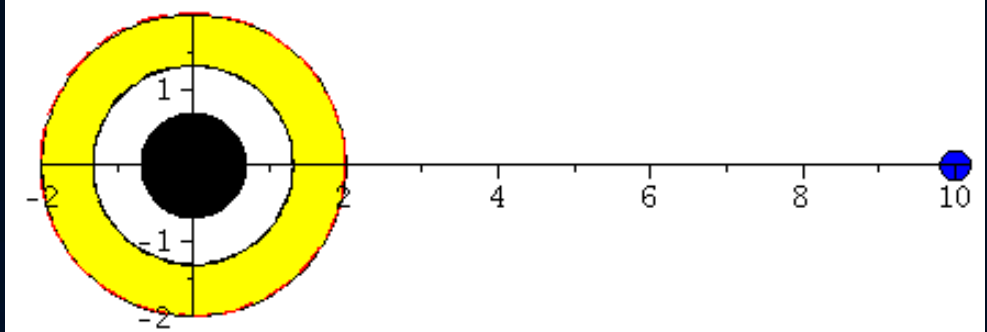
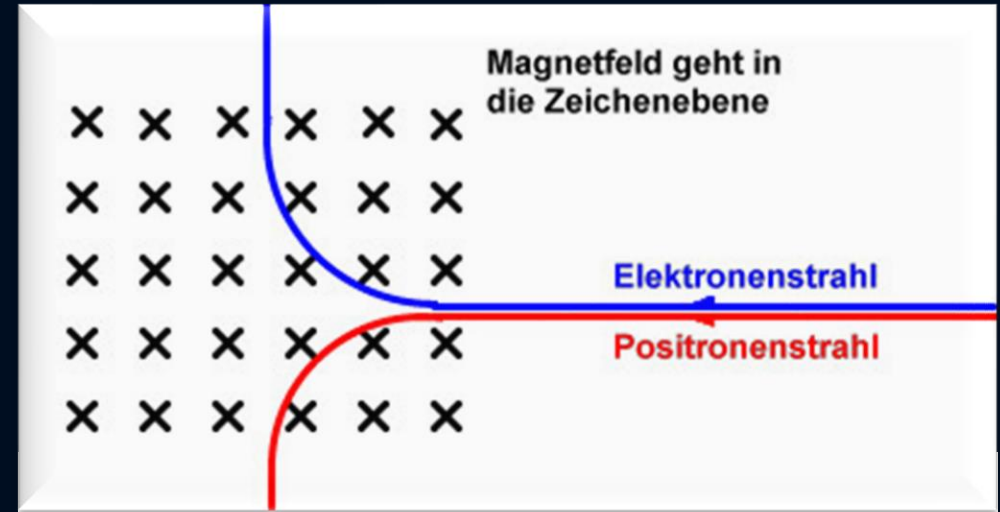
a) + b)



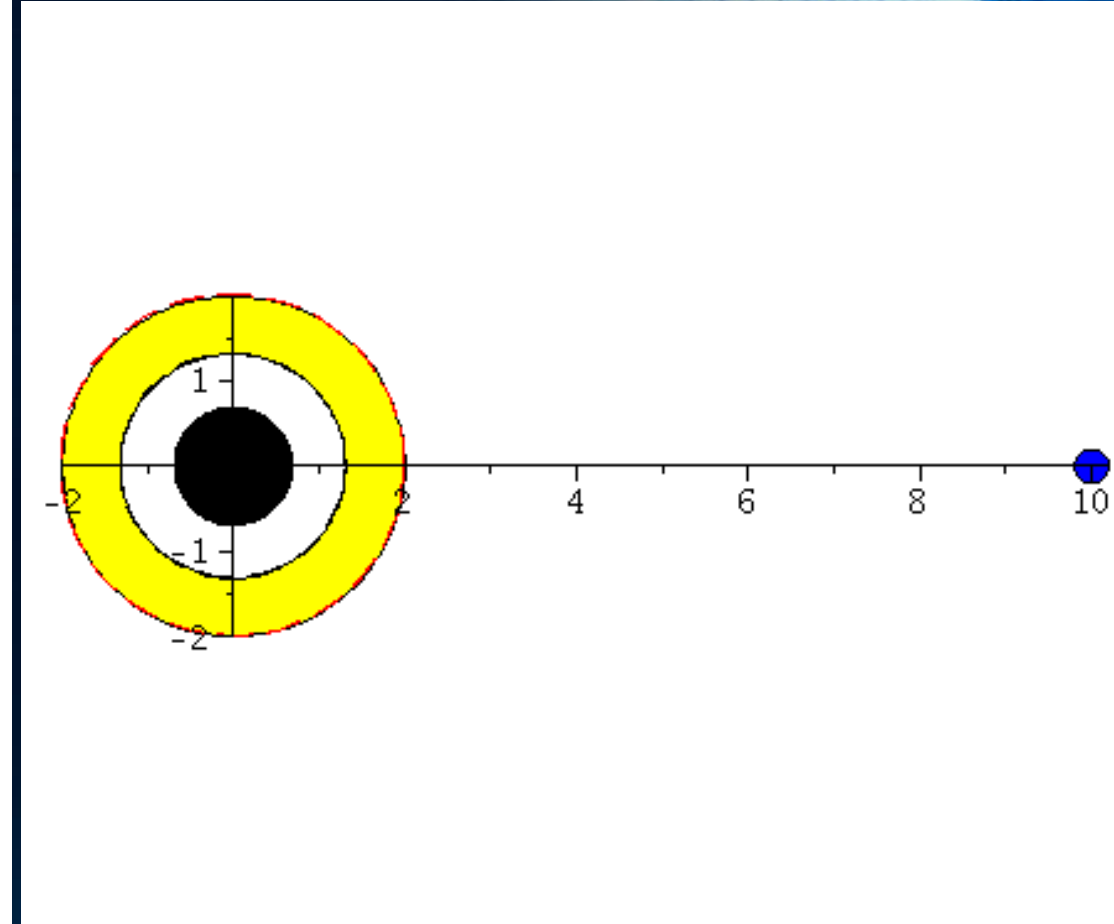
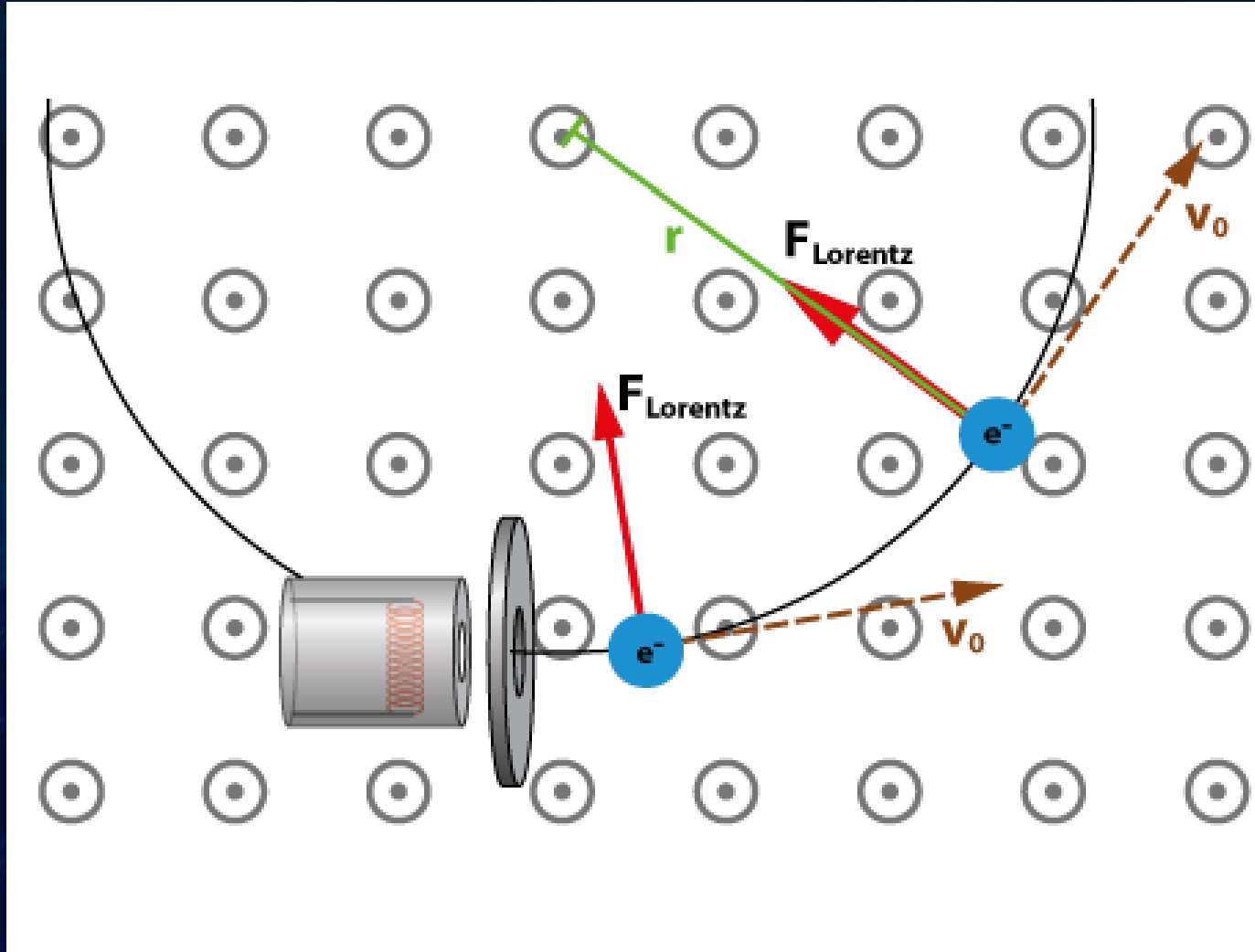
Versuche eine Regel mit Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger deiner linken Hand zu formulieren.



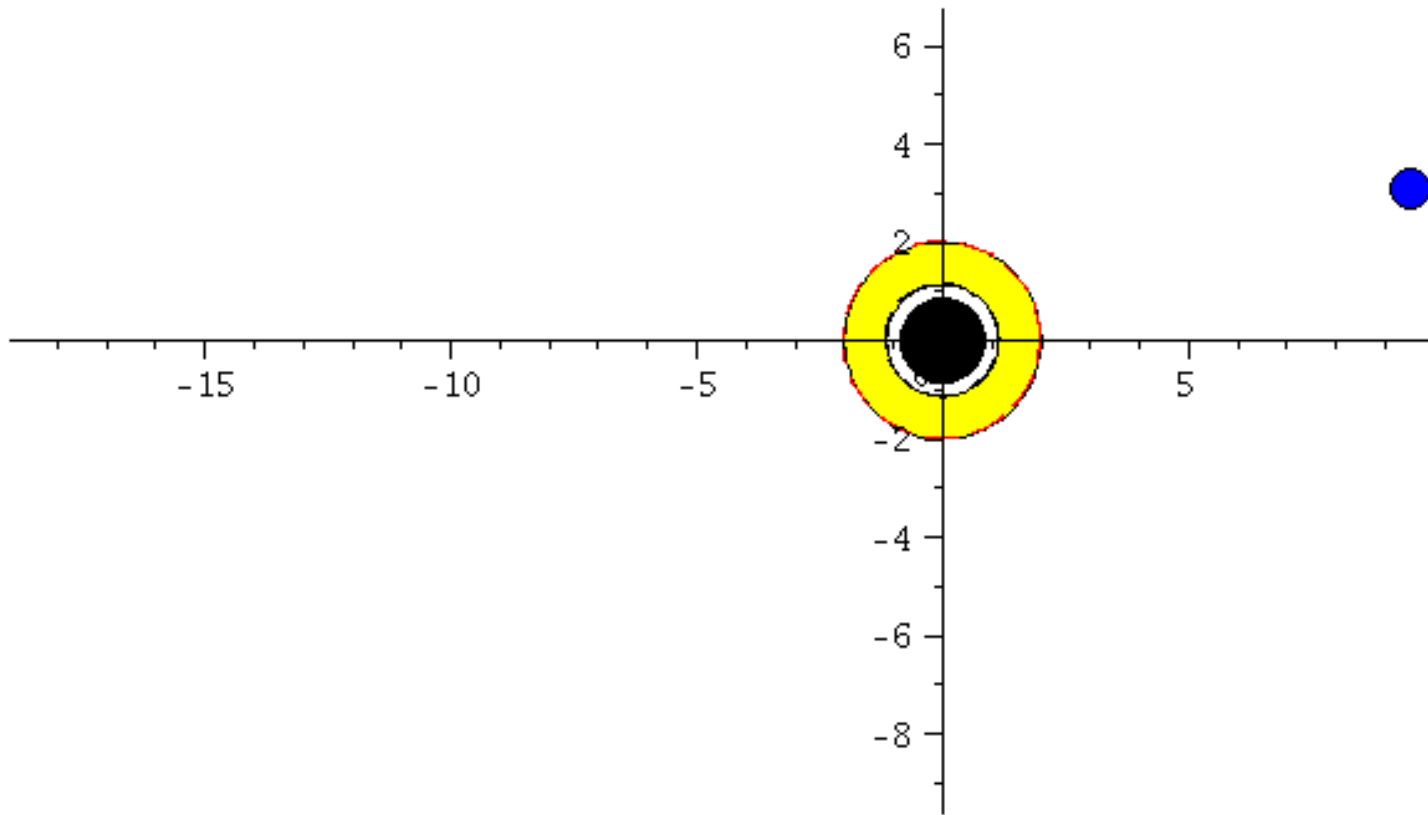
(C) Lorenz K Schröfl



Der gravitomagnetische Effekt



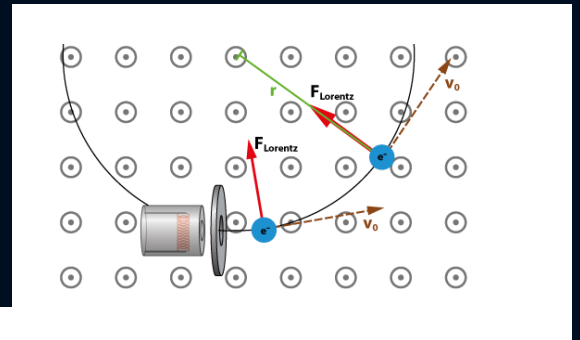
Kerr Metrik: Der gravitomagnetische Effekt



Die grüne Kurve entspricht einer Situation ohne Magnetfeld (nur Coulombkraft = nur gravitative Anziehung, keine Rotation, kein Frame dragging), die blaue Kurve entspricht einer Situation wo das gravitomagnetische Feld in +z-Richtung (schwarzes Loch rotiert entgegen dem Uhrzeigersinn) zeigt und bei der roten Kurve zeigt das gravitomagnetische Feld in -z-Richtung (schwarzes Loch rotiert im Uhrzeigersinn).

Der gravitomagnetische Effekt

Elektromagnetischer Effekt der Lorentzkraft:



Frame Dragging Frequenz:

$$\omega(r, \theta) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}$$

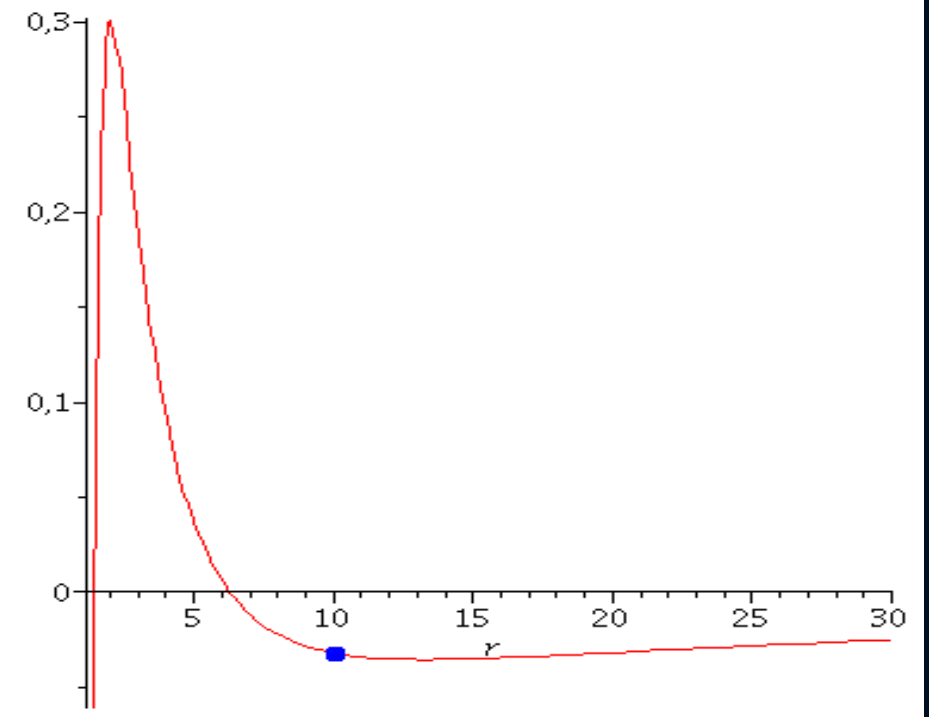
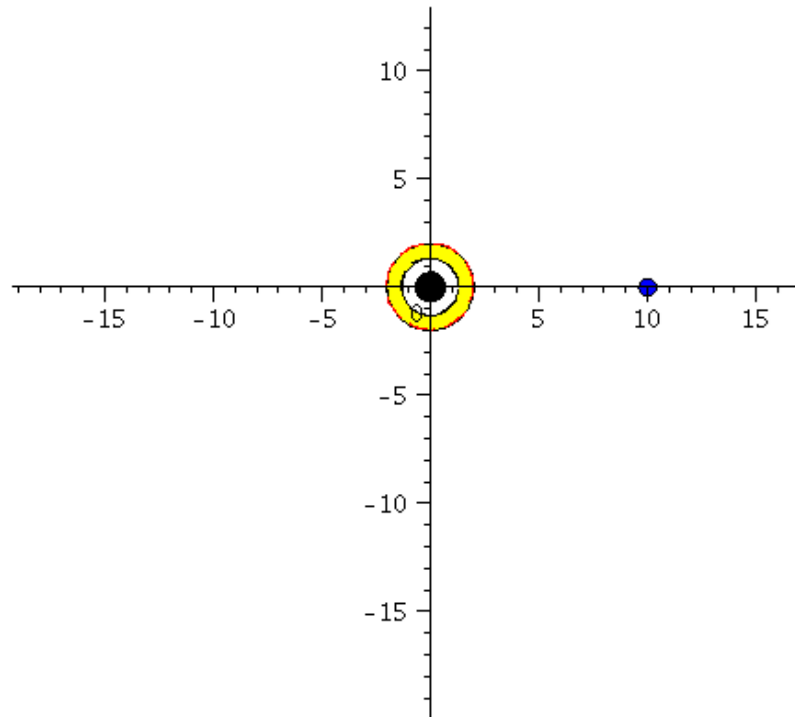
Diese "Frame dragging" Frequenz wirkt in ähnlicher Weise auf die Geschwindigkeit von Probekörpern, wie das Magnetfeld in der Elektrodynamik die Lorentzkraft verursacht. Im Fall 1 (grün) ist das gravitomagnetische Feld Null, im Fall 2 (blau) ist es aus der äquatorialen Ebene nach oben gerichtet und im Fall 3 zeigt es nach unten. In erster Näherung (siehe Fließbach Buch, S:172) ist die gravitomagnetische Lorentzkraft gleich $\sim 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$, wobei \times das Kreuzprodukt, $\boldsymbol{\omega}$ der axiale Vektor der "Frame dragging" Frequenz und \mathbf{v} der Geschwindigkeitsvektor des Probekörpers ist. Die Änderung des Geschwindigkeitsvektors nimmt in Schwachfeldnäherung dann die folgende Gestalt an:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \underbrace{-\text{grad } \Phi(\mathbf{r})}_{\text{gewöhnlicher Teil der gravitativen Kraft}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \times \mathbf{v}}_{\text{gravitomagnetische Lorentzkraft}} + \mathcal{O}(v^2/c^2),$$

wobei $\Phi(\mathbf{r})$ das Newtonsche Gravitationspotential und $\mathbf{v} = (v^r, v^\theta, v^\phi)$ der Geschwindigkeitsvektor des Probekörpers ist. Die unten abgebildete Grafik zeigt die "Frame dragging" Frequenz $\omega = \omega_z(r)$ für die Kerr Metrik, wobei bei der schwarzen Kurve $a=0$, bei der blauen Kurve $a=0.99$ und bei der roten Kurve $a=-0.99$ ist.

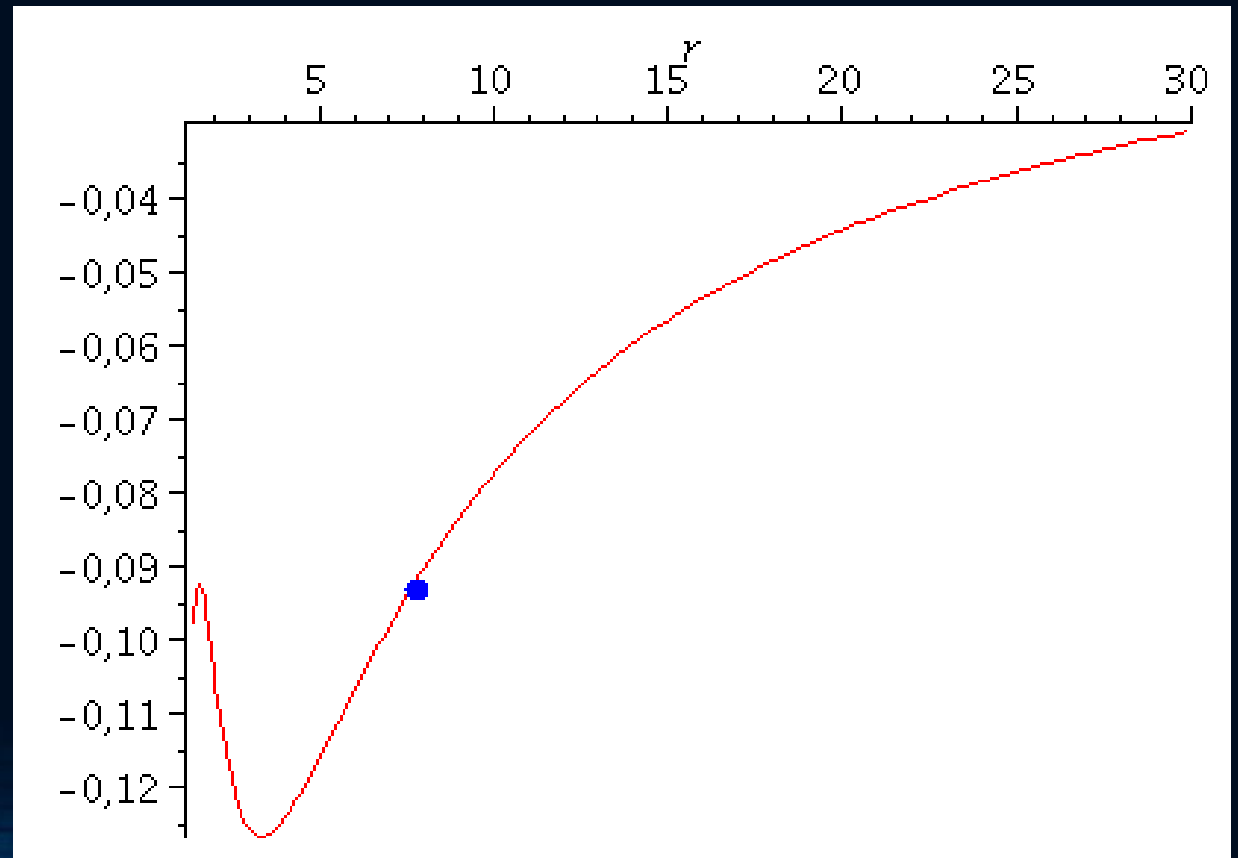
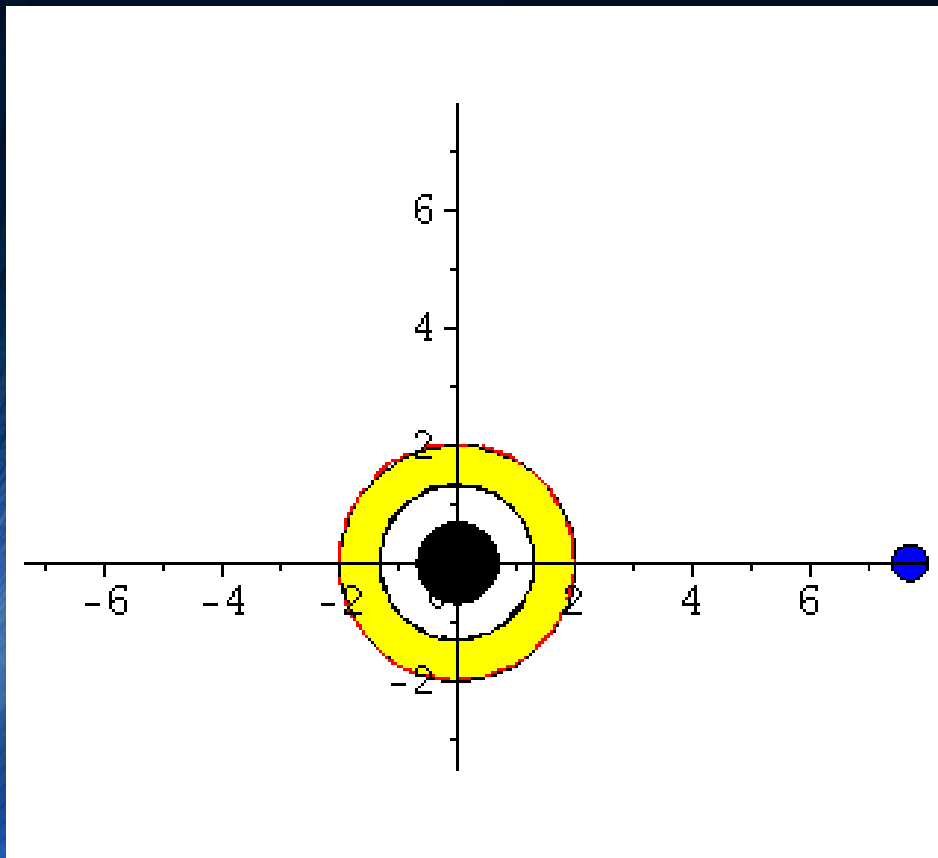
Kerr Metrik: Effektives Potential

$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(l - aE)^2}{r^3}$$



Kerr Metrik: Effektives Potential

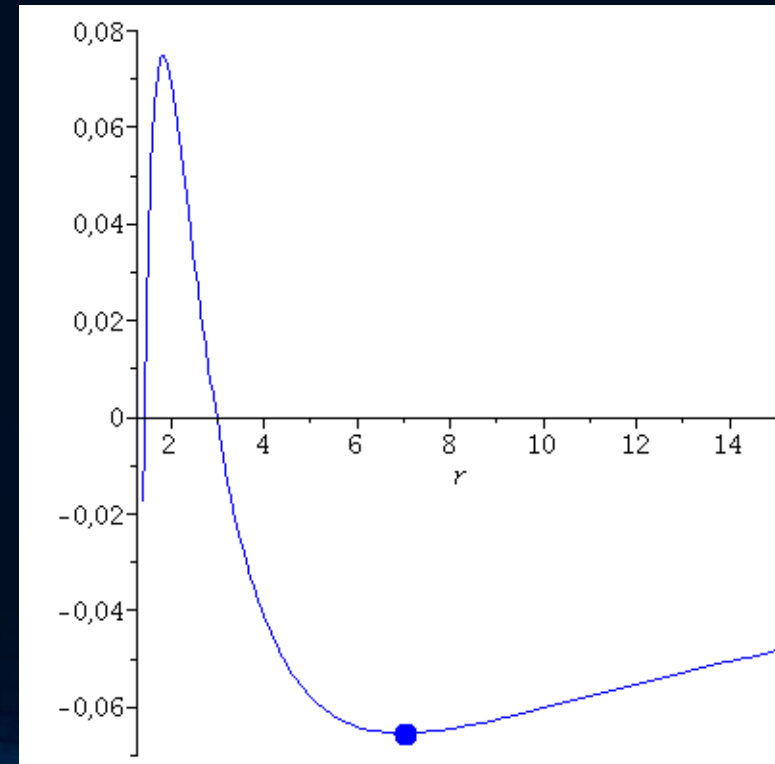
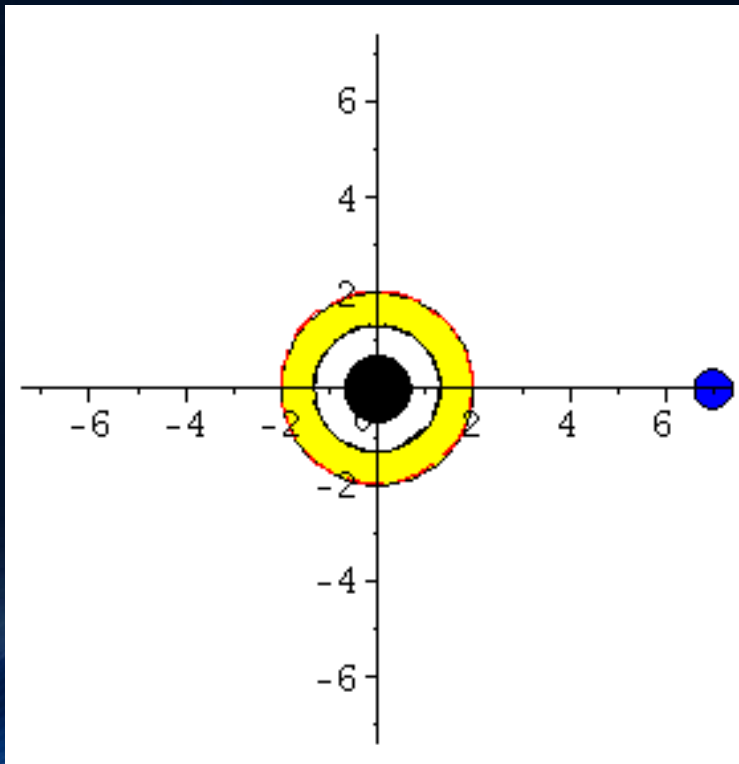
$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(l - aE)^2}{r^3}$$



Kerr Metrik: Effektives Potential

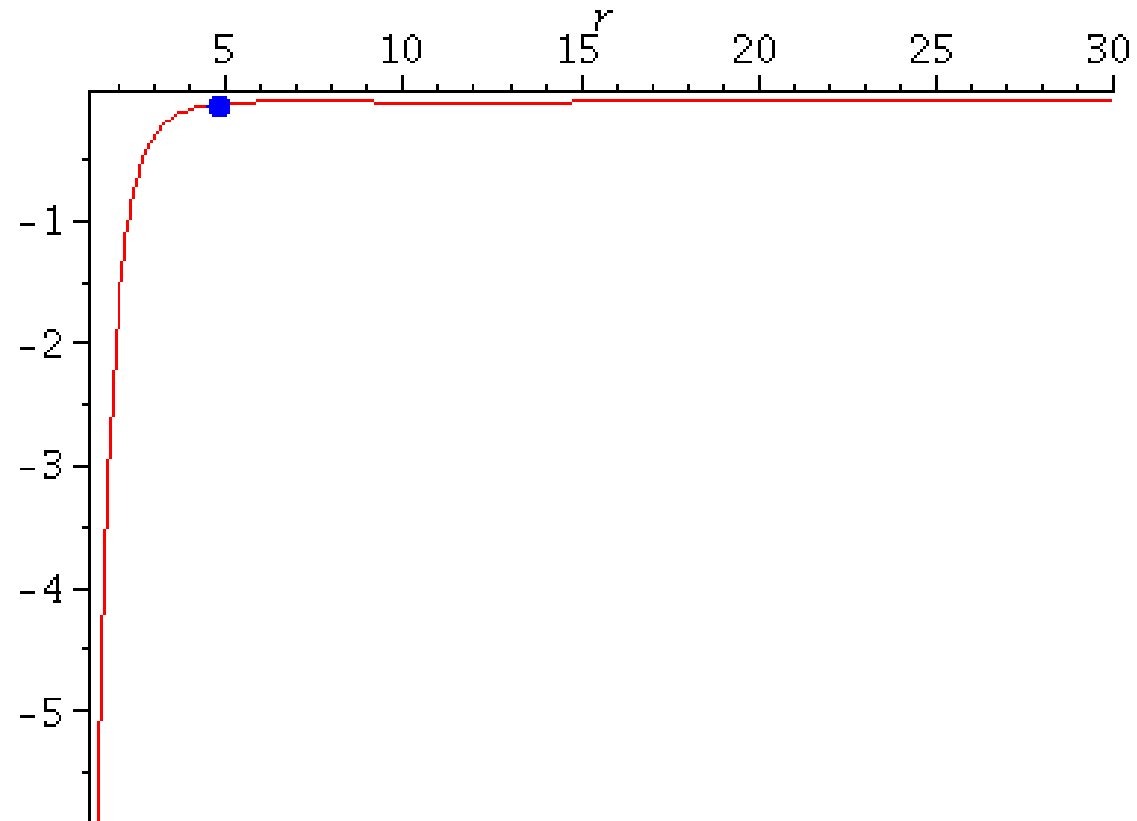
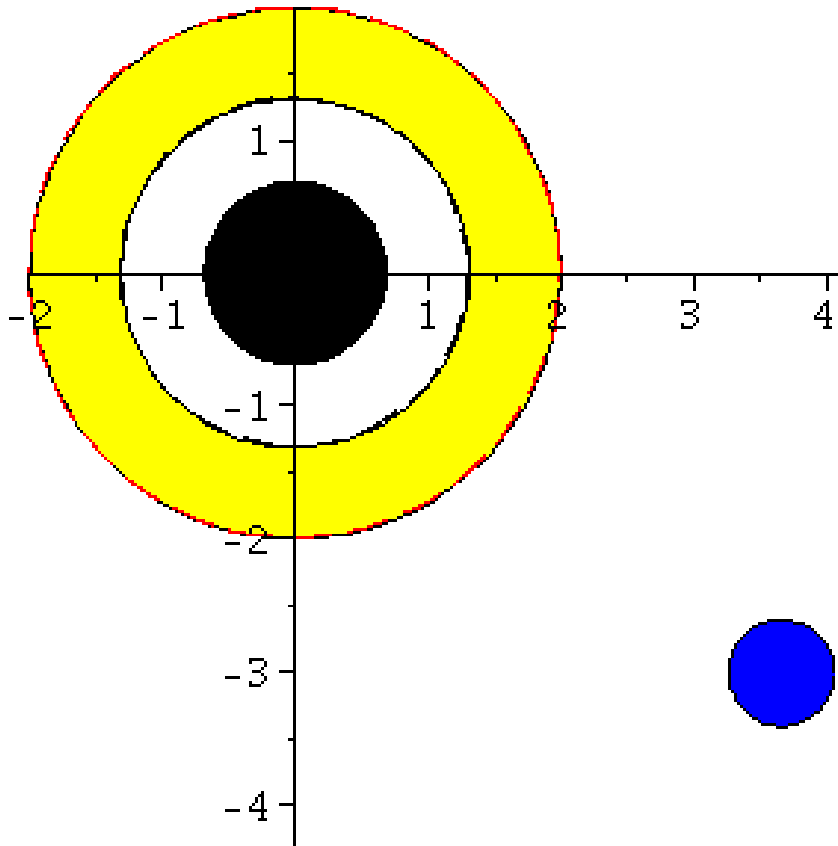
Kreisförmige Bahnbewegungen

$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(l - aE)^2}{r^3}$$



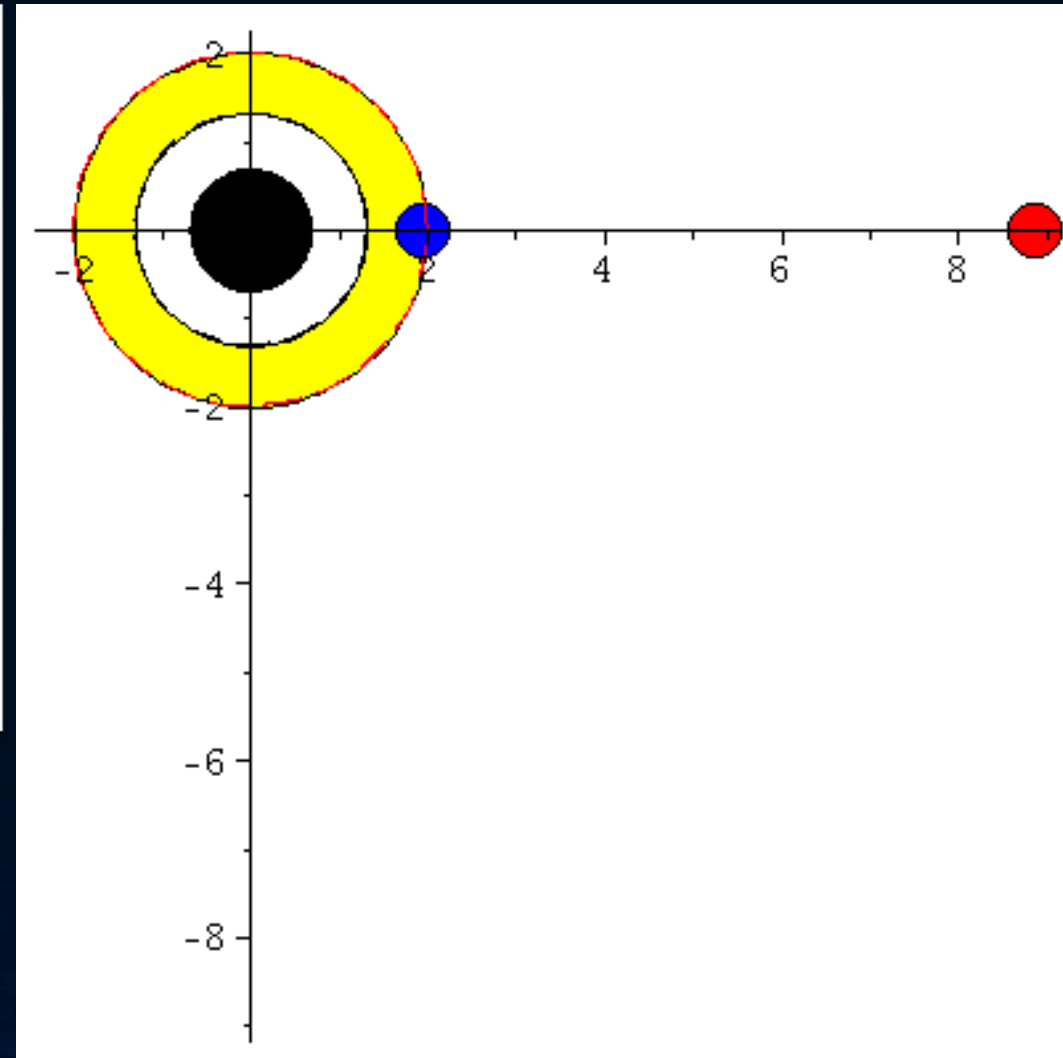
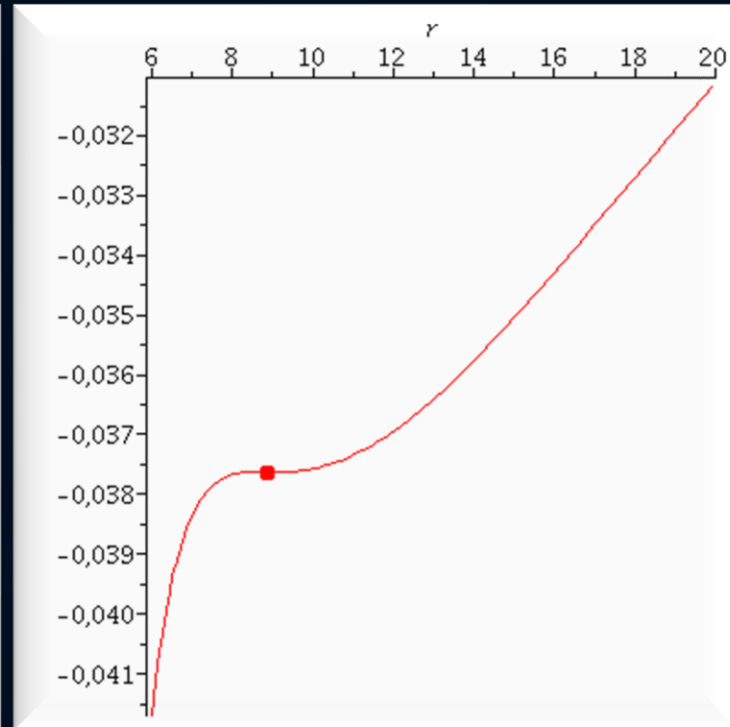
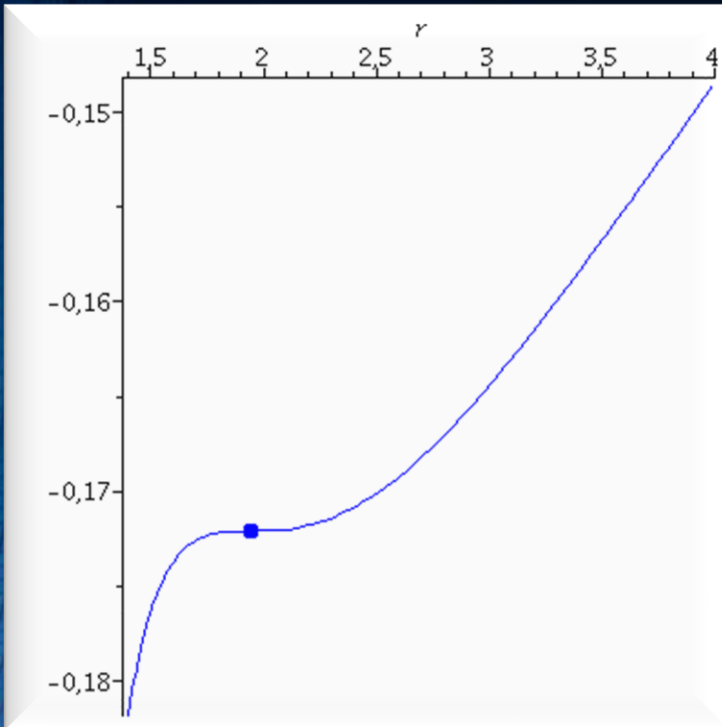
Kerr Metrik: Bewegungen innerhalb der Ergosphäre

Innerhalb der Ergosphäre (gelber Bereich in der unteren Abbildung) können sich Probekörper und auch Licht nur mit der Rotationsrichtung des schwarzen Lochs bewegen.



Kerr Metrik: Effektives Potential

Innerste „stabile“ kreisförmige Bahnbewegungen (ISCOs)



Probekörper rotiert mit
der Rotationsrichtung
des schwarzen Loches

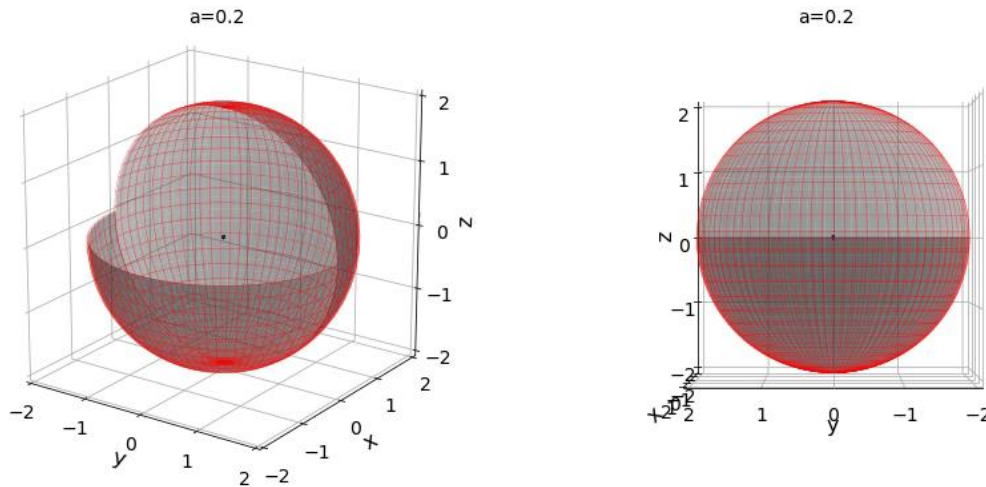
Probekörper rotiert
entgegen der
Rotationsrichtung des
schwarzen Loches

5. Vorlesung

Vorlesung 5

In dieser Vorlesung werden wir die Eigenschaften von rotierenden schwarzen Löchern und die Bewegung von Probekörper um diese mittels zweier Jupyter Notebook behandeln. Weiter unten in den "Weiterführende Links" werden auch die entsprechenden Maple Worksheets angegeben.

Rotierende schwarze Löcher und die Kerr-Metrik



Rotierende schwarze Löcher besitzen eine kompliziertere Struktur der Ereignishorizonte und die Flächen unendlicher Rotverschiebung und die Grenzflächen stationärer Bewegungen sind im Allgemeinen nicht identisch mit den Horizonten. Die nebenstehende obere Abbildung zeigt die wichtigen Flächen der Kerr-Metrik in einer Animation, wobei der Kerr-Rotationsparameter im Bereich $a \in [0.2, 1[$ variiert wurde. Rotiert das schwarze Loch, so existieren zwei

Vorlesung 5

In den beiden vorigen Vorlesungen hatten wir die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild-Metrik (Raumzeit eines nicht-rotierenden schwarzen Loches) betrachtet und die möglichen Bahnen von Probekörpern und Licht studiert, die Grenz-Orbits des ISCO und der Photonensphäre definiert und die Bedeutung dieser Orbits beim Verständnis des Bildes des schwarzen Lochs in M87 diskutiert. Da dieses schwarze Loch und auch generell die allermeisten durch astrophysikalische Beobachtungen bekannten schwarzen Löcher nicht von statischer Natur sind, werden wir in dieser Vorlesung die Eigenschaften von rotierenden schwarzen Löchern besprechen.

Im Folgenden betrachten wir die Bewegung eines massiven Probekörpers um ein rotierendes schwarzes Loch und lösen die Geodätengleichung in vorgegebener Kerr-Raumzeit (in Boyer-Lindquist Koordinaten). Die kovariante Kerr-Metrik eines rotierenden schwarzen Lochs der Masse M und Rotation a ($a \in [-1, 1]$ ist ein spezifischer Drehimpuls $a = J/M$ und wird als der sogenannte Kerr-Rotationsparameter bezeichnet) besitzt in Boyer-Lindquist Koordinaten folgendes Aussehen:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt}(r, \theta) & 0 & 0 & g_{t\phi}(r, \theta) \\ 0 & g_{rr}(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta}(r, \theta) & 0 \\ g_{\phi t}(r, \theta) & 0 & 0 & g_{\phi\phi}(r, \theta) \end{pmatrix}$$
$$g_{tt}(r, \theta) = \left(\frac{1 - 2Mr}{\rho^2} \right), \quad g_{t\phi}(r, \theta) = \frac{2aMr \sin^2(\theta)}{\rho^2}$$

Allgemeine Relativitätstheorie

General Theory of Relativity

Vorlesung gehalten an der JGU (2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias

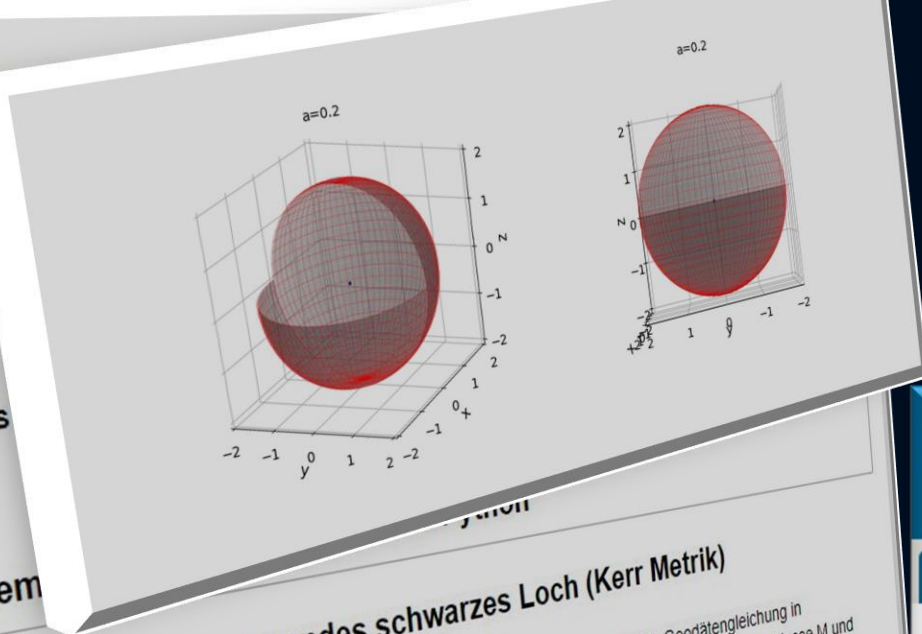
Frankfurt am Main 04.04.2021

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie

Bewegung eines Probekörpers um ein rotierendes schwarzes Loch (Kerr Metrik)

Im Folgenden betrachten wir die Bewegung eines massiven Probekörpers um ein rotierendes schwarzes Loch und lösen die Geodätengleichung in vorgegebener Kerr-Raumzeit (in Boyer-Lindquist Koordinaten). Die kovarianten Kerr Raumzeit-Metrik eines rotierenden schwarzen Lochs der Masse M und Rotation a ($a \in [-1, 1]$) ist ein spezifischer Drehimpuls $a = J/M$ und wird als der sogenannte Kerr-Rotationsparameter bezeichnet) besitzt in Boyer-Lindquist Koordinaten folgendes Aussehen:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt}(r, \theta) & 0 & 0 & g_{t\phi}(r, \theta) \\ 0 & g_{rr}(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta}(r, \theta) & 0 \\ g_{\phi t}(r, \theta) & 0 & 0 & g_{\phi\phi}(r, \theta) \end{pmatrix}$$
$$g_{tt}(r, \theta) = \left(\frac{1 - 2Mr}{\rho^2} \right), \quad g_{t\phi}(r, \theta) = \frac{2aMr \sin^2(\theta)}{\rho^2}$$
$$g_{rr}(r, \theta) = -\frac{\rho^2}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta}(r, \theta) = -\rho^2$$
$$\rho^2 = r^2 + a^2 \sin^2(\theta), \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$



Jupyter Notebook

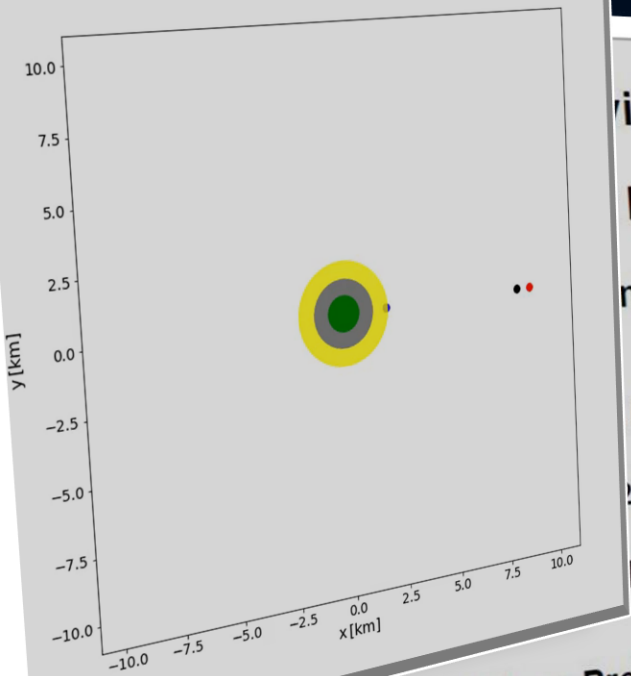
Das rotierende schwarze Loch: Struktur der Horizonte und radialer Fall eines Körpers

Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum herunterladen



Jupyter Notebook

Das rotierende schwarze Loch:
Struktur der Horizonte und
radialer Fall eines Körpers



Relativitätstheorie mit dem Computer

Relativity on the Computer

an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester)

Matthias Hanauske

2021

Titel: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Bewegung eines Probekörpers um ein rotierendes schwarzes Loch (Kerr Metrik)

Das effektive Potential, kreisförmige Bewegungen, die innerste stabile Kreisbahn (ISCO) und der gravitomagnetische Effekt

Im Folgenden betrachten wir die Bewegung eines massiven Probekörpers um ein rotierendes schwarzes Loch und lösen die Geodätengleichung in vorgegebener Kerr-Raumzeit (in Boyer-Lindquist Koordinaten). Die kovarianten Kerr Raumzeit-Metrik eines rotierenden schwarzen Lochs der Masse M und Rotation a ($a \in [-1, 1]$) ist ein spezifischer Drehimpuls $a = J/M$ und wird als der sogenannte Kerr-Rotationsparameter bezeichnet) besitzt in Boyer-Lindquist Koordinaten folgendes Aussehen:

$$\xi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \xi_{tt}(r, \theta) & 0 & 0 & \xi_{t\phi}(r, \theta) \\ 0 & \xi_{rr}(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{\theta\theta}(r, \theta) & 0 \\ \xi_{\phi t}(r, \theta) & 0 & 0 & \xi_{\phi\phi}(r, \theta) \end{pmatrix}$$

$\frac{2aMr \sin^2(\theta)}{r^2}$

Auf der OLAT Seite des Kurses
finden Sie die Jupyter Notebooks
zum Ansehen
und zum herunterladen

GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Startseite | Lehren & Lernen | Kursangebote | Allgemeine Relativität...

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

- Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer
 - Literaturverzeichnis
 - Einschreibung
 - Kursinhalt
 - Vorlesungsaufzeichnung
 - Aufgaben
 - Programme
 - Einführung in Jupyter Notebook
 - Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer
 - Eigenschaften der Schwarzschild
 - Radialer Fall eines Probekörper
 - Klassifizierung unterschiedlicher
 - Der ISCO und die Photonensphäre
 - Maple Worksheets I
 - Das rotierende schwarze Loch
 - Das rotierende schwarze Loch
 - Maple Worksheets II
 - Jupyter Notebooks

Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. [Matthias Hanauske](#)

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Aufgaben im Kurs allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Aufgaben im Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

[Berechnung von Christoffelsymbolen der Schwarzschild-Metrik](#)

[Berechnung des Riemann Tensors der Schwarzschild-Metrik](#)

[Probekörper fällt radial in ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Geodätische Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

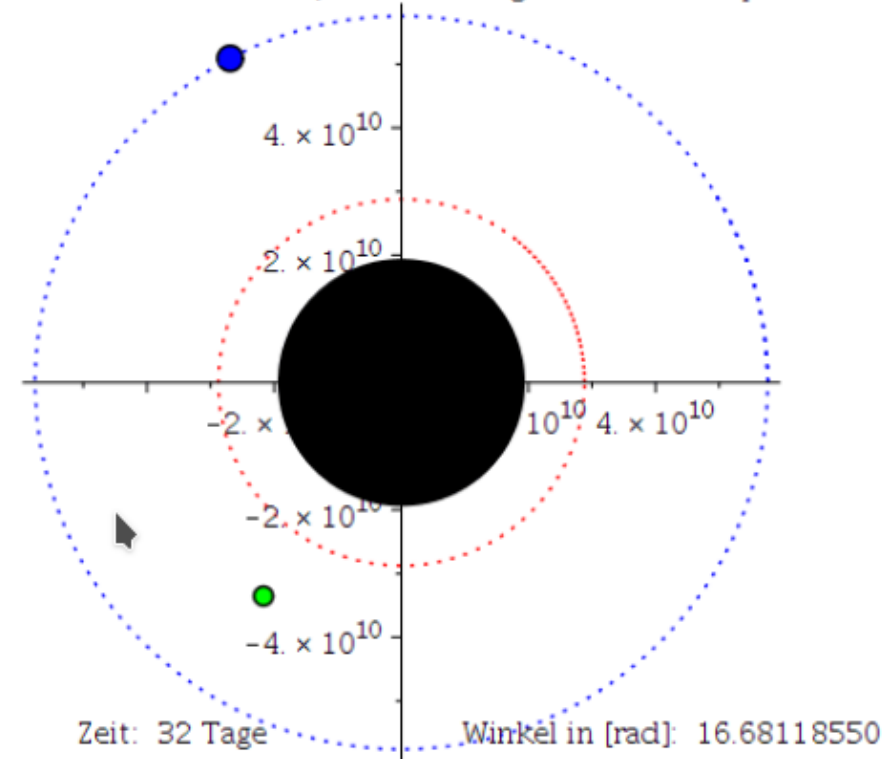
[Radialer Wurf eines Probekörpers in der Nähe eines nichtrotierenden schwarzen Lochs](#)

[Berechnung eines Neutronensterns](#)

[Berechnung eines Weißen Zwergs](#)

Die nebenstehende Animation zeigt die Bewegung zweier massiver Probekörper um das schwarze Loch (SL) im Zentrum der Galaxie M87. Es wurde hierbei angenommen, dass das SL nicht rotiert und eine gravitative Masse von $M = 6.5 \cdot 10^9 M_{\odot} \approx 9.5979 \cdot 10^9 [km]$ besitze. Die blaue Trajektorie zeigt die letzte stabile kreisförmige Bahnbewegung (ISCO) und der grüne Probekörper beschreibt den zeitlichen Verlauf eines in das schwarze Loch einfallenden Körpers (Anfangsbedingungen: Körper ist bei $t=0$ in der äquatorialen Ebene auf der ISCO-Trajektorie bei $\phi_0 = 0$ und erhält einen Kick $\frac{dr}{d\tau} = -0.12$ in radialer Richtung hin zum SL. Wieviel Zeit benötigt der grüne einfallende Probekörper um die Photonensphäre (rote kreisrunde Bahn in der Animation) zu erreichen (gemessen in der Eigenzeit τ des Körpers, Einheit [Tage] Umrechnungsfaktor $3.860695545 \cdot 10^{-11}$). Geben Sie zusätzlich den vom Körper durchschrittenen Winkel ϕ in Radiant [rad] an.

Vom ISCO startender, einfallender grüner Probekörper

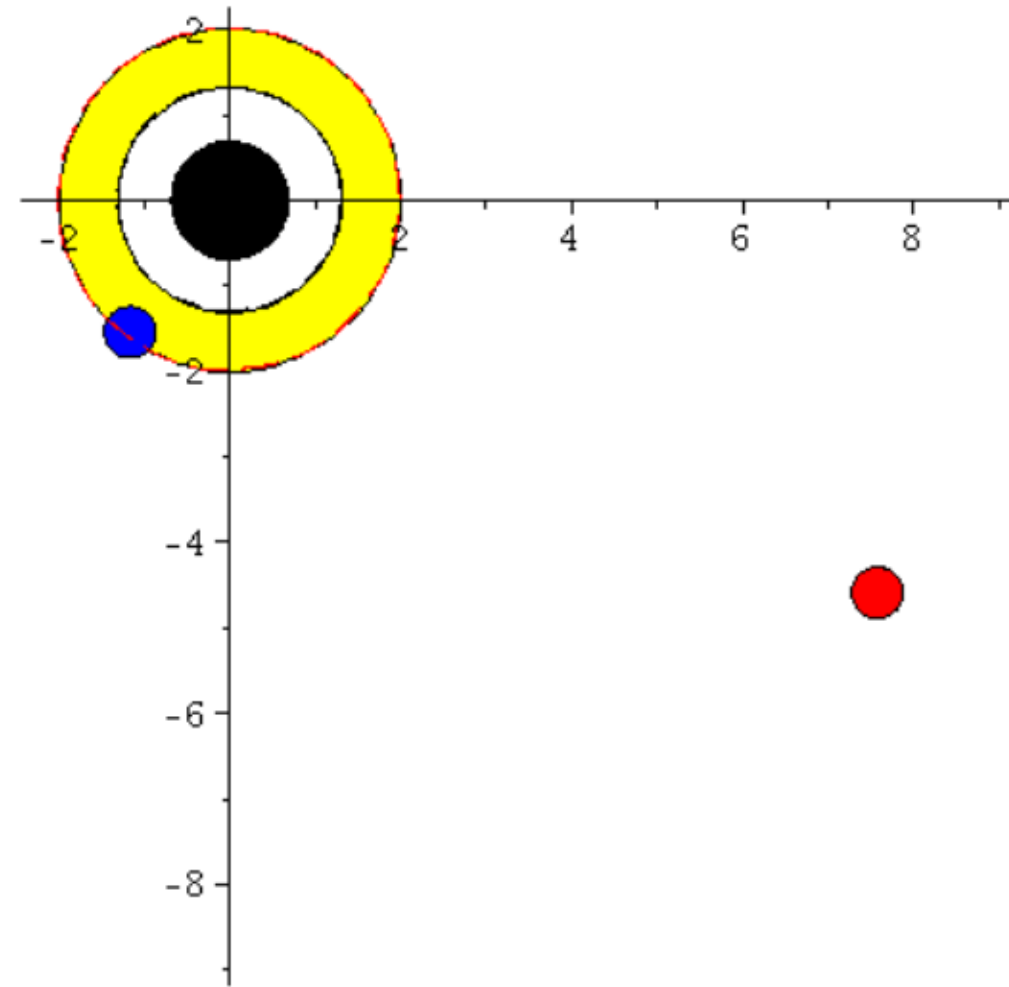


benötigte Zeit [Tage] $\Delta\tau =$, durchschnittener Winkel [rad] $\Delta\phi =$

Antwort einreichen

Versuche 0/20

Betrachten Sie ein rotierendes schwarzes Loch der Masse $M=1$ mit einem Kerr-Rotationsparameter $a=0.15$ in Boyer-Lindquist Koordinaten. Die innerste, quasi-stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines Probekörpers hängt davon ab, ob dieser mit oder entgegen der Rotationsrichtung des Kerr schwarzen Loches rotiert. Berechnen Sie den radialen Abstand des ISCOs des Probekörpers vom Zentrum des schwarzen Loches, wenn dieser im Uhrzeigersinn (r_2) und entgegen dem Uhrzeigersinn (r_1) rotiert.

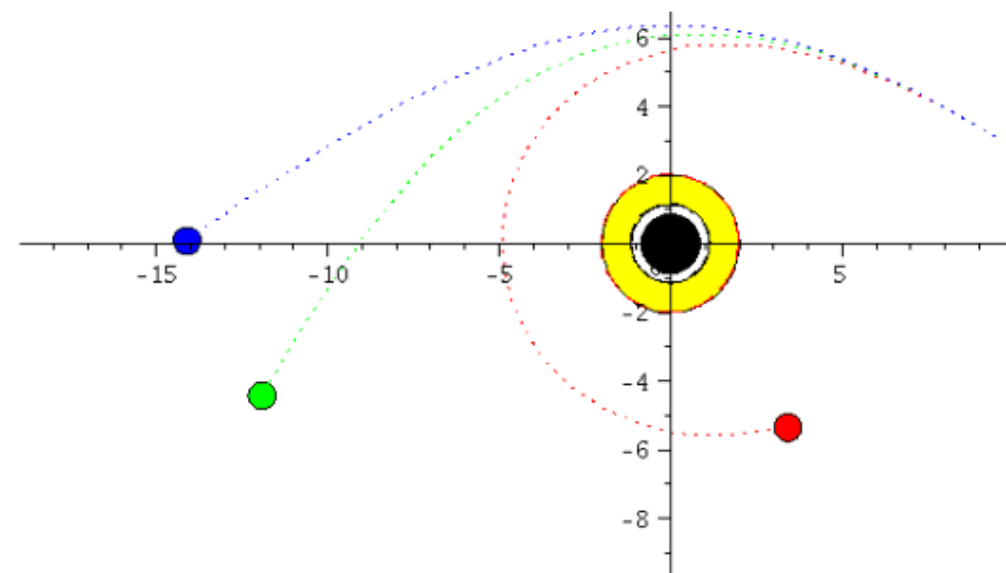


$r_1 =$, $r_2 =$

Antwort einreichen

Versuche 0/20

Betrachten Sie ein rotierendes schwarzes Loch in Boyer-Lindquist Koordinaten. Ein Probekörper befände sich zur Eigenzeit $\tau = 0$ an folgendem Ort (Angabe in sphärischen Koordinaten) $x^\mu(\tau = 0) = (0, r_0 = 10 \text{ km}, \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \phi_0 = \pi/10)$ und besitze die folgenden Anfangsgeschwindigkeiten $\frac{dr}{d\tau} = -0.6$, $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$ und $\frac{d\phi}{d\tau} = 0.0685$. Zusätzlich zur allgemeinrelativistischen, gravitativen Anziehung existiert aufgrund der Rotation des schwarzen Loches ein gravitomagnetischer Effekt der durch die Mitführungseigenschaft der Raumzeit (Frame-Dragging) verursacht wird. Wie stark dieser Effekt ist, hängt von dem Kerr-Rotationsparameter "a" ab, welcher den spezifischen Drehimpuls $a=J/M$ des schwarzen Loches darstellt. Der axiale Vektor der Frame-Dragging Frequenz wirkt hier in ähnlicher Weise auf die Geschwindigkeit des Probekörpers ein, wie es das Magnetfeld in der Lorentzkraft in der Elektrodynamik macht (gravitomagnetischer Effekt). Die nebenstehende Abbildung veranschaulicht diesen Effekt: Der grüne Körper bewegt sich hierbei um ein nichtrotierendes schwarzes Loch, der rote Körper um ein im Uhrzeigersinn rotierendes schwarzes Loch ($a = 0.99$) und der blaue Körper um ein entgegen dem Uhrzeigersinn rotierendes schwarzes Loch ($a = -0.99$). Wo befindet sich der Probekörper nach $\tau = 300$ (ca. eine Millisekunde), wenn das schwarze Loch mit $a = -0.09$ rotiert? Geben Sie den radialen Abstand r in Kilometern und den Azimutwinkel ϕ in Grad an.



Bemerkung: Für ein nichtrotierendes schwarzes Loch ($a=0$, siehe grüne Kurve in der nebenstehenden Abbildung) würden sich die folgenden Werte ergeben: $r=215.1363 \text{ km}$ und $\phi=240.415 \text{ Grad}$.

$r =$, $\phi =$

Antwort einreichen

Versuche 0/20

das Bild des schwarzen Lochs

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der *Allgemeine Relativitätstheorie* der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde (erstes Bild eines schwarzen Lochs, siehe rechte Abbildung).

Echte Singularität im Zentrum

Ereignishorizont

Photonensphäre
Letzte stabile
kreisförmige
Bahnbewegung eines
masselosen Teilchens

Akkretionsscheibe
Letzte stabile kreisförmige Bahn-
bewegung eines massiven
Probekörpers
Last Stable Circular Orbit (ISCO)

Benutzen Sie hierfür das vorgestellte Maple worksheet und nehmen Sie an das schwarze Loch in M87 rotiere nicht und habe eine Masse von $6.5 \cdot 10^9$ Sonnenmassen. Berechnen Sie wo sich der Ereignishorizont und die letzte stabile kreisförmige Bahnbewegung eines massiven Körpers (ISCO) befindet (in Einheiten von km). Wie viel Zeit benötigt ein Körper auf der ISCO-Trajektorie um einmal um das schwarze Loch zu kreisen?

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer von Dr.phil.nat.Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I](#)

[Teil II](#)

[Teil III](#)

[E-Learning](#)

[Download Maple Worksheed](#)

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 01.05.2019

[Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple](#)

Das Schwarze Loch in M87

(ohne Rotation)

Einführung

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der Allgemeine Relativitätstheorie der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der Allgemeine Relativitätstheorie der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde:

Vergleich der Simulationsergebnisse mit dem Bild des schwarzen Lochs in M87

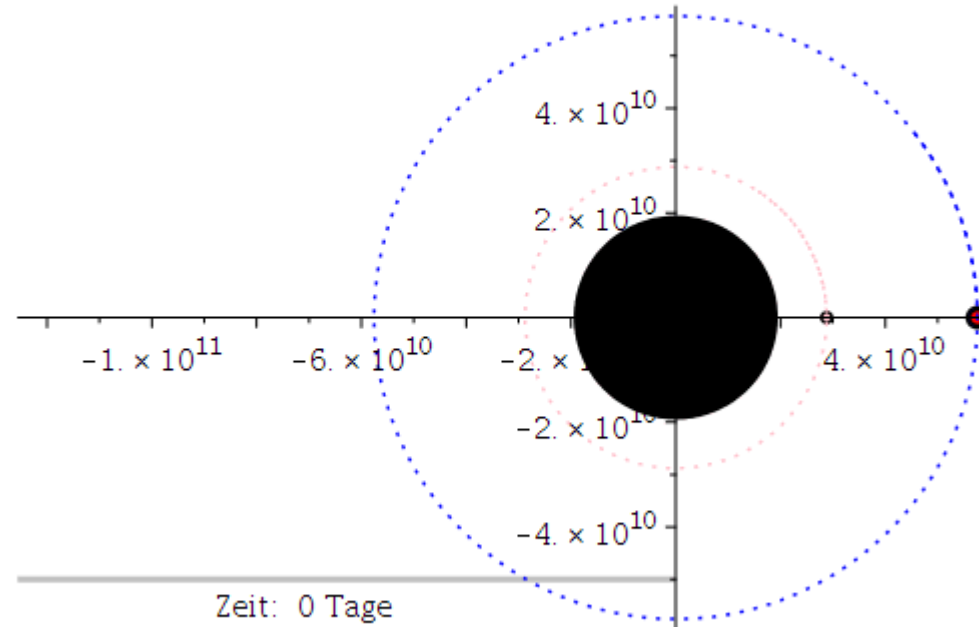
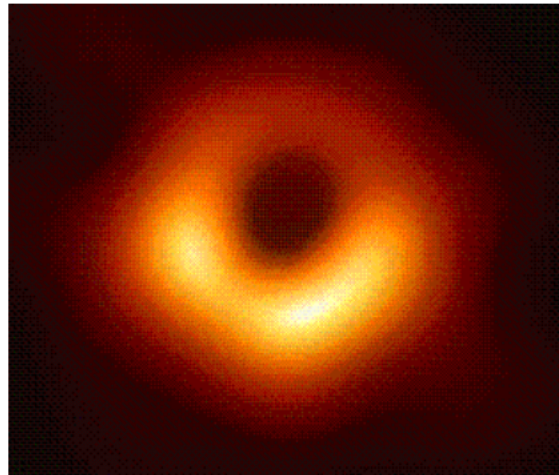


Abb. 1: Erstes Bild eines schwarzen Lochs im Vergleich mit den Simulationsergebnissen des Maple- Worksheets.

Das Bild zeigt das schwarze Loch im Zentrum unserer Nachbargalaxie M87; bzw. ein wenig genauer, die um ein schwarze Loch entstehende Radiostrahlung (das Bild wurde mittels eines weltweiten Verbunds von Radiowellenteleskopen (EHT: Event Horizon Teleskop) sichtbar gemacht). In Kürze (voraussichtlich im Sommer 2019) werden die aufgenommenen

Der Merkurtransit in Allgemeiner Relativitätstheorie

Download Maple Worksheet

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

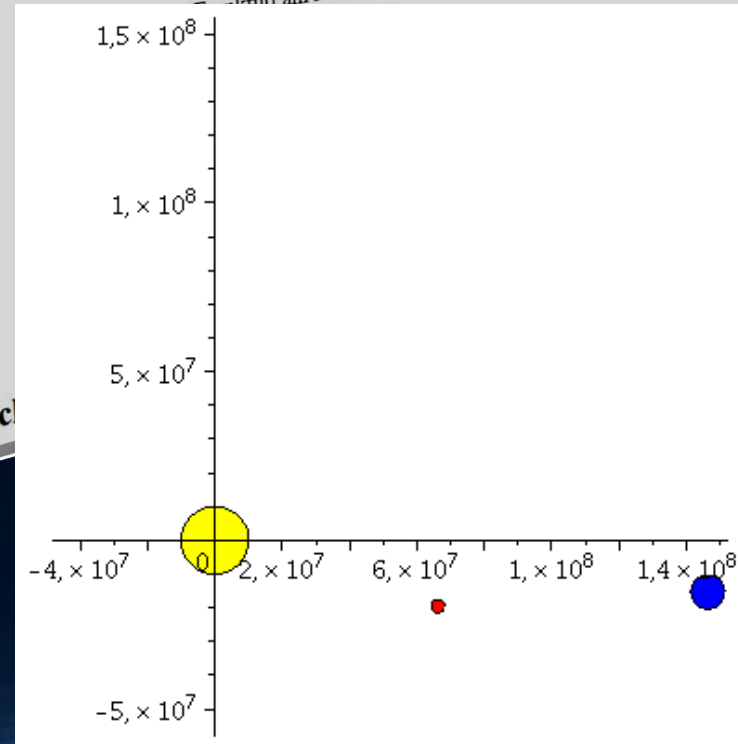
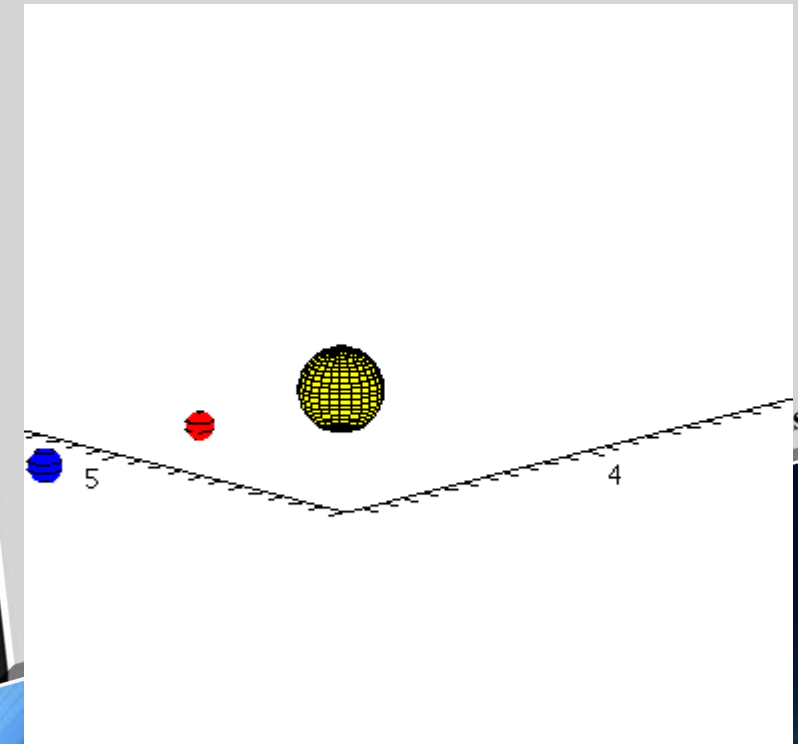
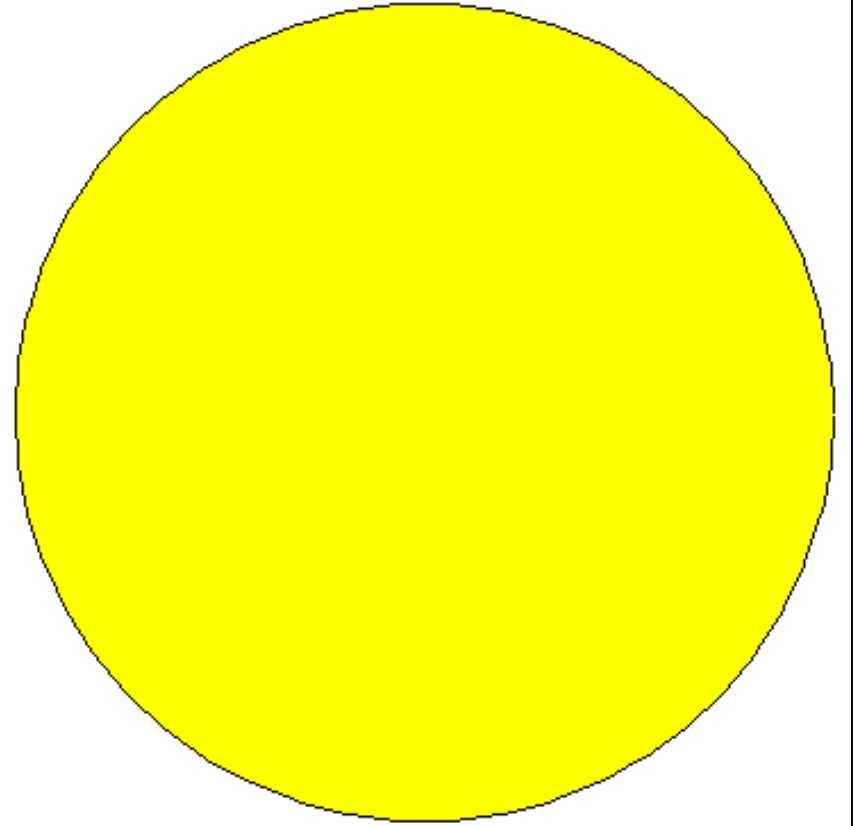
General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Zeit: -.494 Stunden



Die Bewegung der Planeten in allgemeiner Relativitätstheorie

Obwohl die Bewegung der Planeten unseres Sonnensystems um unser Zentralgestirn (die Sonne) in sehr guter Näherung mittels der Newtonschen Gravitationstheorie beschrieben werden kann und unsere Sonne ja sicherlich kein schwarzes Loch darstellt, können die Bahnen der Planeten auch allgemein-relativistisch mittels der Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit berechnet werden. Dies ist aufgrund des Birkhoff-Theorems möglich, was besagt, dass eine sphärisch symmetrische

Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen außerhalb einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung (Sonne) statisch sein muss und diese Lösung der Schwarzschild-Lösung entspricht.

Die Periheldrehung des Merkur ist ein Beispiel eines nur in der allgemeinen Relativitätstheorie vorkommenden Effektes, der in der Newtonschen Gravitationstheorie nicht entsteht. Beim Klicken auf die nebenstehende Abbildung gelangt man zu einem Maple Worksheet, das die Bewegung der Erde und des Merkur um die Sonne allgemein-relativistisch berechnet und den Merkurtransit am 9.Mai 2016 simuliert.

