

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*ZOOM ONLINE MEETING
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
30. APRIL, 2021*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

Aufgrund der Corona Krise findet die Vorlesung und die Übungstermine auch in diesem Semester nur Online statt.

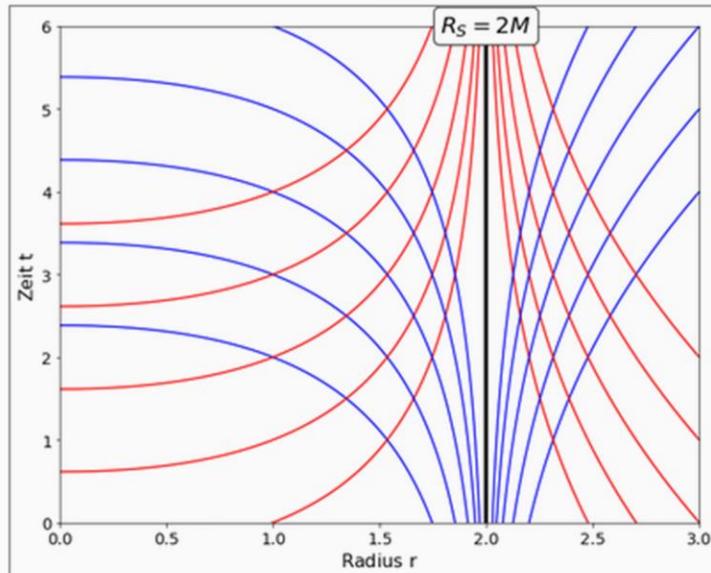
3. Vorlesung

Wiederholung: 2. Vorlesung

Vorlesung 2

Die Schwarzschild-Metrik beschreibt das raumzeitliche Verhalten eines kugelsymmetrischen, nicht rotierenden und nicht geladenen schwarzen Loches der Masse M , wobei die gesamte Masse des schwarzen Loches in einem singulären Punkt im Zentrum vereint ist. Der Ricci Tensor verschwindet identisch ($R_{\mu\nu} \equiv 0$), da man eine leere Raumzeit betrachtet. Die skalare Invariante des vollständig kontrahierten Quadrates des Riemannschen Krümmungstensors $K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, der sogenannte Kretschmann-Skalar K , wird im Ursprung singulär ($K = \frac{48 M^2}{r^6}$) und die Schwarzschild-Metrik besitzt daher eine echte Singularität bei $r = 0$. Neben dieser echten Singularität besitzt die Schwarzschild-Metrik eine Koordinatensingularität bei dem sogenannten Schwarzschild-Radius $R_S = 2M$. Im ersten Jupyter Notebook werden wir die wesentlichen Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik mittels eingebetteter Diagramme und anhand von Raumzeit-Diagrammen visualisieren. Im zweiten Jupyter Notebook werden wir den radialen Fall eines Probekörpers in ein schwarzes Loch numerisch berechnen.

Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik



Die Struktur der Raumzeit der Schwarzschild-Metrik kann man auf unterschiedliche Weisen visualisieren. Wir betrachten uns zunächst die sogenannten eingebetteten Diagramme der räumlichen Hypersphäre Σ_t der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Diese eingebetteten Diagramme besitzen eine Trichter-Form und zeigen eine Koordinatensingularität bei dem sogenannten Schwarzschild-Radius $R_S = 2M$. Zusätzlich zu diesen Diagrammen werden in dem Jupyter Notebook (Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik) die Raumzeit-Diagramme der Schwarzschild-Metrik in Schwarzschild-Koordinaten und Eddington-Finkelstein Koordinaten betrachtet. Die nebenstehende Abbildung zeigt das Raumzeit-Diagramm der Schwarzschild-Metrik ($M = 1$) und beschreibt somit das raumzeitliche Verhalten eines kugelsymmetrischen schwarzen Loches aus dem

Betrachtungspunkt eines im Unendlichen ruhenden Beobachters (Schwarzschild Koordinaten). Die roten Kurven

Vorlesung 2

In der zweiten Vorlesung werden wir die wohl bekannteste analytische Lösung der Einsteingleichung betrachten - die sogenannte *Schwarzschild-Lösung*. Bereits einige Monate nach der Publikation von Einsteins Artikel zur Allgemeinen Relativitätstheorie im Jahre 1915, erarbeitete Karl Schwarzschild in zwei Arbeiten mögliche analytische Lösungen der neuen Theorie der Raumzeitkrümmung. In der ersten dieser Arbeiten ("über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie", siehe Schwarzschild, K., Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften. Reimer, Berlin 1916, S. 189–196) betrachtete Herr Schwarzschild die Einsteingleichung für den freien, leeren Raum ($T_{\mu\nu} = 0 \rightarrow R_{\mu\nu} = 0$), wobei er annahm, dass sich die gesamte Materie/Energie in einem singulären Punkt im Ursprung befindet (Massenpunkt der Masse M). Die so von ihm gefundene Lösung der resultierenden Feldgleichungen ist heutzutage unter dem Namen *Schwarzschild-Metrik* bekannt und lautet:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

, wobei wir ein sphärisch symmetrisches Koordinatensystem benutzt wurde ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$). Diese Lösung ist von besonderer Bedeutung für astrophysikalische Betrachtungen, denn sie beschreibt einerseits die Metrik eines nicht-rotierenden schwarzen Loches und andererseits,

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 04.04.2021

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie mit EinsteinPy

Beispiel: Die Schwarzschildmetrik

Im Folgenden werden einige grundlegende Größen der allgemeinen Relativitätstheorie mit dem Python Modul "EinsteinPy" berechnet. Zunächst wird das Python Modul "EinsteinPy" eingebunden, welches auf dem Modul SymPy basiert und symbolische Berechnungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie relativ einfach möglich macht. EinsteinPy kann einfach mit "pip install einsteinpy" in einem Terminal installiert werden und stellt zusammen mit dem Modul SymPy ein wichtiges Tool der Computer Algebra Systeme im Bereich der allgemeinen Relativitätstheorie dar. Weiteres über das Modul finden Sie unter [EinsteinPy - Making Einstein possible in Python](#).

Bereits einige Monate nach der Publikation von Einsteins Artikel zur Allgemeinen Relativitätstheorie (siehe [Einstein, A. 1915, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzungsber., 778-786](#)) erarbeitete Karl Schwarzschild in seinen ersten dieser Arbeiten ("Über das Gravitationsfeld eines [kugelförmigen Körpers](#)" und "Über die [mögliche analytische Lösungen der neuen Theorie der Raumzeitkrümmung](#)". In der [Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften](#) [vertratete Herr Schwarzschild die Einstein-Gleichung für den](#)

Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum Herunterladen

Jupyter Notebook

Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik



Startseite | Lehren & Lernen | Kursangebote | Allgemeine Relativität...

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

- Literaturverzeichnis
- Einschreibung
- Kursinhalt
- Vorlesungsaufzeichnung
- Aufgaben
- Programme
 - Einführung in Jupyter Notebooks
 - Allgemeine Relativitätstheorie mit Python
 - Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik
 - Radialer Fall eines Probekörpers in der Schwarzschild-Metrik
 - Klassifizierung unterschiedlicher Bahnen
 - Maple Worksheets I
 - Jupyter Notebooks
- Mitteilungen
- Forum
- Gruppen



Sommersemester
Allgemeine Relativitätstheorie
Verantwortlich
Allgemeine Relativitätstheorie

In dieser Vorlesung werden die Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik, die Radiale Fall eines Probekörpers in der Schwarzschild-Metrik, die Klassifizierung unterschiedlicher Bahnen und die Erzeugung von Jupyter Notebooks und die Erzeugung von Maple Worksheets I erstellt. In der Vorlesung werden die Probleme der Schwarzschild-Metrik und die Erzeugung von Jupyter Notebooks und die Erzeugung von Maple Worksheets I

Weitere Informationen

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 04.04.2021

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Bewegung eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch in der Ebene

Teil I: Radialer Fall eines Probekörpers

Im Folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse Probekörper $m \ll M$ Masse schwarzes Loch) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht. Zunächst wird das Python Modul "EinsteinPy" eingebunden, welches auf dem Modul SymPy basiert und symbolische Berechnungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie relativ einfach möglich macht.

Definition der Koordinaten und der kovarianten Raumzeit-Metrik der Schwarzschildmetrik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Auf der OLAT Seite des Kurses
finden Sie die Jupyter Notebooks
zum Ansehen
und zum herunterladen

Jupyter Notebook

Radialer Fall eines Probekörpers
in ein nicht-rotierendes
Schwarzes Loch

GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Startseite | Lehren & Lernen | Kursangebote | Allgemeine Relativitätstheorie...

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

- Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer
 - Literaturverzeichnis
 - Einschreibung
 - Kursinhalt
 - Vorlesungsaufzeichnung
 - Aufgaben
 - Programme
 - Einführung in Jupyter Notebooks
 - Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer
 - Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik
 - Radialer Fall eines Probekörpers in der Ebene
 - Klassifizierung unterschiedlicher Bahnen
 - Maple Worksheets I
 - Jupyter Notebooks**
 - Mitteilungen
 - Forum
 - Gruppen



Sommersemester
Allgemeine Relativitätstheorie
Verantwortlich
Allgemeine Relativitätstheorie
In dieser Vorlesung
Kursen erbracht
Berechnungen
Notebooks
Lösungen
Programm
und die Er
erstellt. Im
visualisiert
Probleme
einem Sch
liegt sowo
Weitere In

3. Vorlesung

Vorlesung 3

Bevor wir die Geodätengleichung und die Klassifikation möglicher Bahnen von Probekörpern in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit mittels eines definierten effektiven Potentials in einem Jupyter Notebook behandeln, wird eine kurze Einführung in das Computeralgebra-System Maple gegeben. Mithilfe der kommerziellen Computeralgebra-Systeme Maple und Mathematica kann man ebenfalls die komplizierten Berechnungen der tensoriellen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie durchführen und numerische Simulationen der entstehenden Differentialgleichungen erstellen.

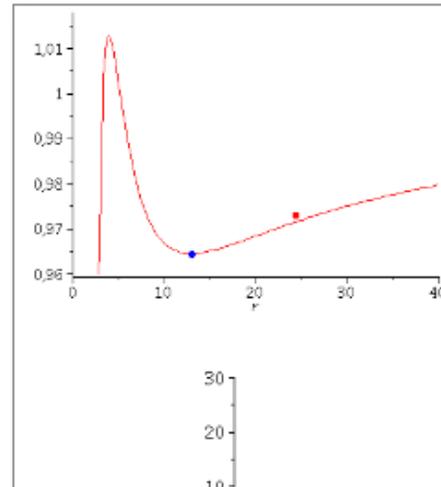
Das in dieser Vorlesung inhaltlich behandelte Thema (die Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch) ist ein astrophysikalisch sehr relevantes Problem. Schon Jahre bevor die ersten Bilder eines schwarzes Lochs entstanden, galt es schon als so gut wie bestätigt, dass im Zentrum unserer Galaxie ein superschweres schwarzes Loch existiert und Reinhard Genzel (Physik Nobelpreisträger 2021) verfolgt schon seit Jahrzehnten die Bewegung einzelner, sogenannter S-Sterne um dieses schwarzes Loch. Neben diesen aktuellen Erkenntnissen, gilt die Perihel-Drehung des Merkur als ein, durch die allgemeine Relativitätstheorie verursachter Effekt. Obwohl die Bewegung der Planeten unseres Sonnensystems um unser Zentralgestirn (die Sonne) ja sicherlich keine Bewegung um ein schwarzes Loch darstellt, können die Gleichungen der Planetenbewegungen in guter Approximation als solche beschrieben werden (siehe Birkhoff-Theorem).

Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

Analytische Berechnungen und numerische Simulationen im Bereich der Allgemeinen Relativitätstheorie können auch mittels des Computeralgebra-Systems Maple durchgeführt werden (siehe [alter Teil I der Vorlesung](#)). Die entsprechenden Maple Worksheets der bisher besprochenen Inhalte finden Sie unter den folgenden

Links:

- [Einführung in Maple](#)
- [Download Maple Worksheet](#)
- [Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie](#)



Vorlesung 3

Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse $m \ll M$ Masse schwarzes Loch) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht. Sie lässt sich demnach durch folgendes Variationsprinzip herleiten:

$$\delta \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = 0$$

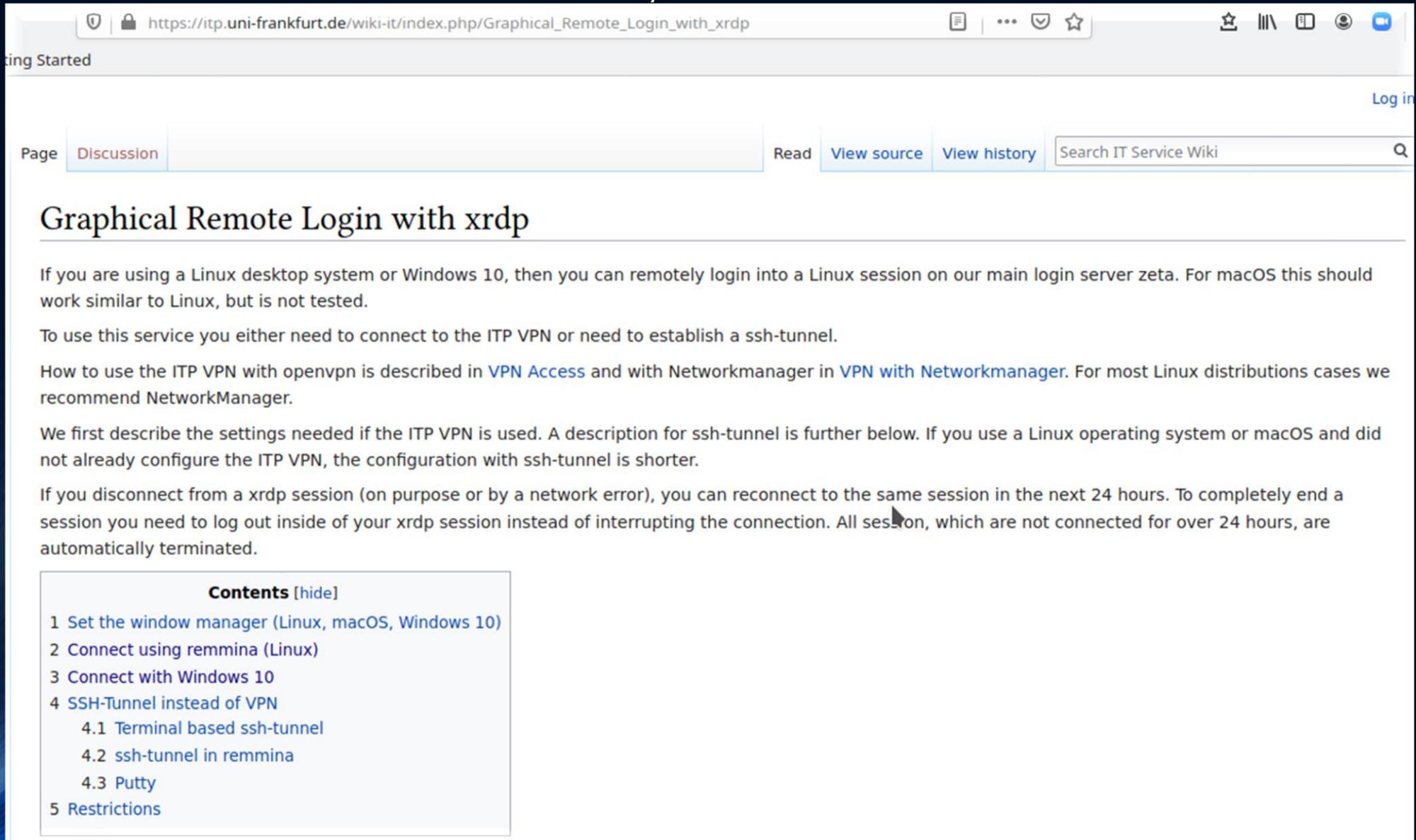
, wobei sich dann die Geodätengleichung mittels der Euler-Lagrange Gleichungen $L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$, bzw. alternativ $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ ergibt:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

$\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ sind die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit τ des Probekörpers). In der dritten Vorlesung werden wir die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit näher betrachten, wobei wir wieder ein sphärisches Koordinatensystem benutzen ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$). Die Geodätengleichung stellt ein System gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen dar

Maple oder Mathematica von zu Hause nutzen

„Wie mache ich von zuhause einen „Remote Login“ auf den Server des ITP
(Institut für Theoretische Physik der Goethe Universität)?“



The screenshot shows a web browser window with the address bar displaying `https://itp.uni-frankfurt.de/wiki-it/index.php/Graphical_Remote_Login_with_xrdp`. The page content includes a navigation bar with 'Page Discussion', 'Read View source View history', and a search box labeled 'Search IT Service Wiki'. The main heading is 'Graphical Remote Login with xrdp'. The text explains that users can remotely login to a Linux session on the main login server zeta. It provides instructions on using the ITP VPN or establishing an ssh-tunnel, and includes a table of contents for the page.

ing Started

Log in

Page [Discussion](#)

Read [View source](#) [View history](#)

Graphical Remote Login with xrdp

If you are using a Linux desktop system or Windows 10, then you can remotely login into a Linux session on our main login server zeta. For macOS this should work similar to Linux, but is not tested.

To use this service you either need to connect to the ITP VPN or need to establish a ssh-tunnel.

How to use the ITP VPN with openvpn is described in [VPN Access](#) and with Networkmanager in [VPN with Networkmanager](#). For most Linux distributions cases we recommend NetworkManager.

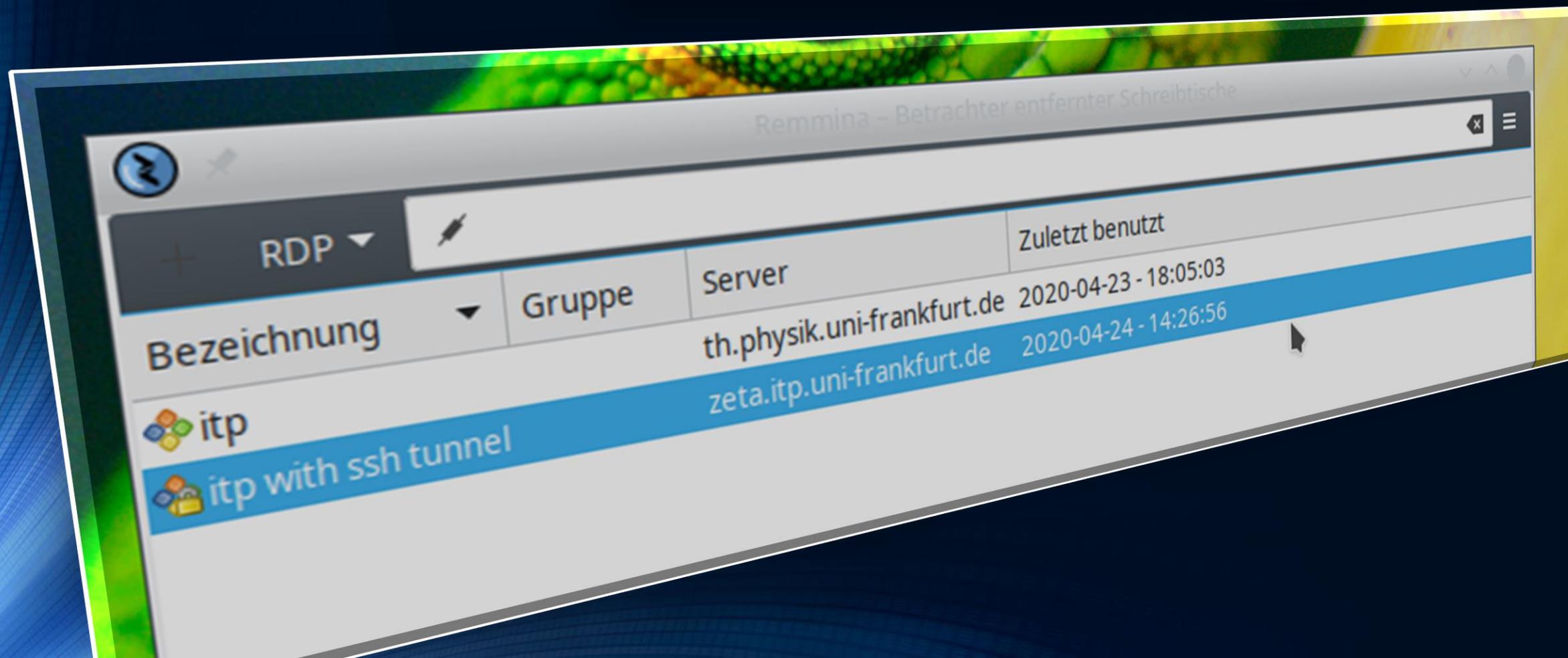
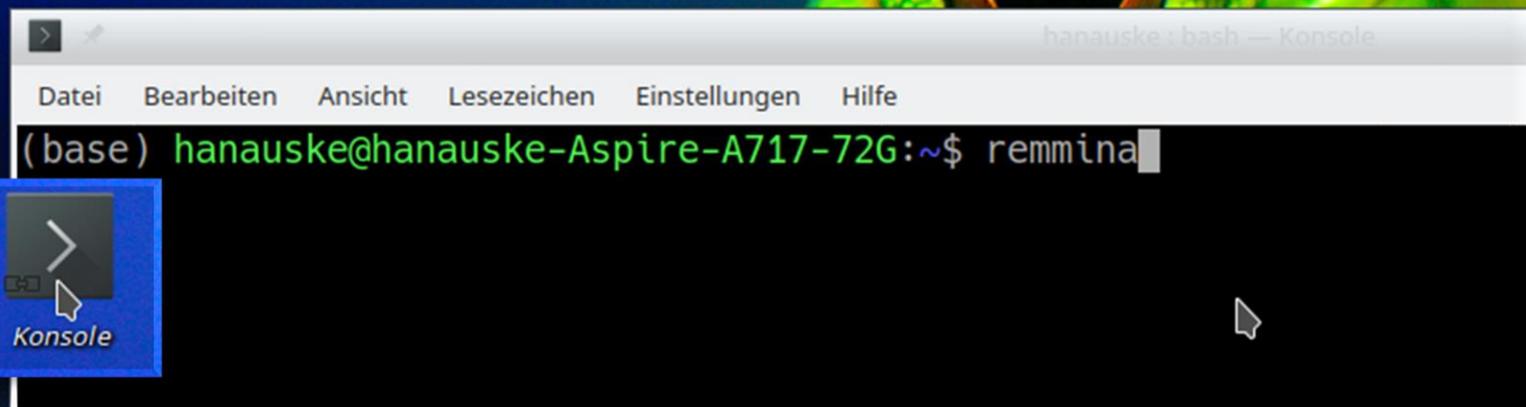
We first describe the settings needed if the ITP VPN is used. A description for ssh-tunnel is further below. If you use a Linux operating system or macOS and did not already configure the ITP VPN, the configuration with ssh-tunnel is shorter.

If you disconnect from a xrdp session (on purpose or by a network error), you can reconnect to the same session in the next 24 hours. To completely end a session you need to log out inside of your xrdp session instead of interrupting the connection. All sessions, which are not connected for over 24 hours, are automatically terminated.

Contents [\[hide\]](#)

- [1 Set the window manager \(Linux, macOS, Windows 10\)](#)
- [2 Connect using remmina \(Linux\)](#)
- [3 Connect with Windows 10](#)
- [4 SSH-Tunnel instead of VPN](#)
 - [4.1 Terminal based ssh-tunnel](#)
 - [4.2 ssh-tunnel in remmina](#)
 - [4.3 Putty](#)
- [5 Restrictions](#)

Unter Linux
benutzt man am
besten remmina



Die folgenden Sachen müssen in remmina eingestellt werden

Einstellungen für entfernte Arbeitsflächen

Profil

Bezeichnung: itp with ssh tunnel

Gruppe: []

Protokoll: RDP - Remote Desktop Protokoll

Befehl vorher: command %h %u %t %U %p %g --option

Befehl nachher: /path/to/command -opt1 arg %h %u %t -opt2 %U %p %g

Grundlegend | **Erweitert** | SSH Tunnel

Server: zeta.itp.uni-frankfurt.de

Benutzername: []

Benutzerpasswort: []

Domain: []

Bildschirmauflösung: Auflösung des Klienten verwenden
 Benutzerdefiniert 640x480

Farbtiefe: Hohe Farbtiefe (15 bpp)

Ordner freigeben: (keine)

Automatische Verbindungswiederherstellung abschalten

Abbrechen | Als Vorgabe speichern | Speichern | Verbinden | Speichern und verbinden

Die folgenden Sachen müssen in remmina eingestellt werden

Einstellungen für entfernte Arbeitsflächen

Profil

Bezeichnung: itp with ssh tunnel

Gruppe:

Protokoll: RDP – Remote Desktop Protokoll

Befehl vorher: command %h %u %t %U %p %g --option

Befehl nachher: /path/to/command -opt1 arg %h %u %t -opt2 %U %p %g

Grundlegend | Erweitert | **SSH Tunnel**

Qualität: Niedrig (schnell)

Klang: Aus

Sicherheit: Verhandeln

RD-Zugangs-Server:

RD-Zugangsbenutzername:

RD-Zugangspasswort:

RD-Zugangsdomäne:

Klientname:

Startprogramm:

Startpfad:

Abbrechen | Als Vorgabe speichern | Speichern | Verbinden | Speichern und verbinden

Die folgenden Sachen müssen in remmina eingestellt werden

Hier bitte Ihren Login-Account eintragen

The screenshot shows the 'Einstellungen für angelegte Arbeitsflächen' (Settings for created workspaces) window in Remmina. The 'SSH Tunnel' tab is active. The 'Profil' (Profile) section is configured as follows:

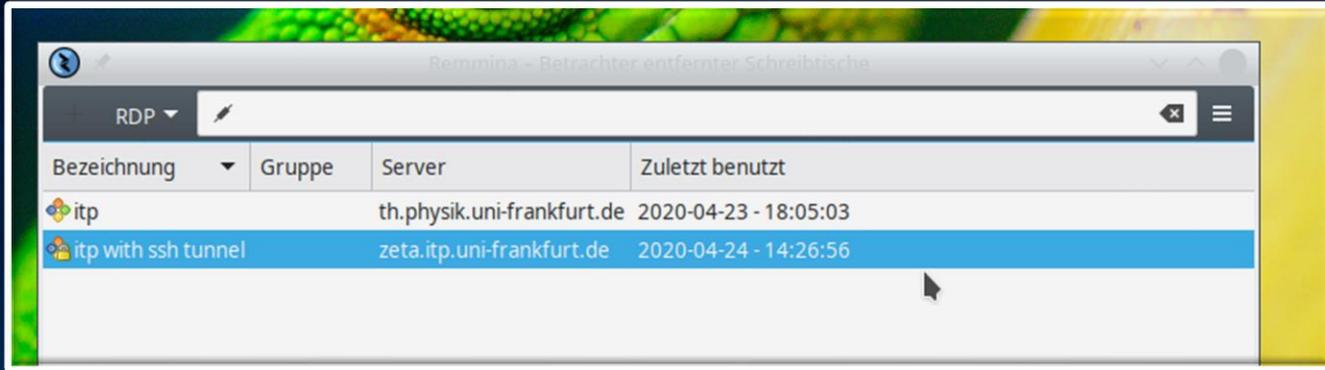
- Bezeichnung: itp with ssh tunnel
- Gruppe: (empty)
- Protokoll: RDP - Remote Desktop Protokoll
- Befehl vorher: command %h %u %t %U %p %g --option
- Befehl nachher: /path/to/command -opt1 arg %h %u %t -opt2 %U %p %g

The 'SSH Tunnel' section contains the following options:

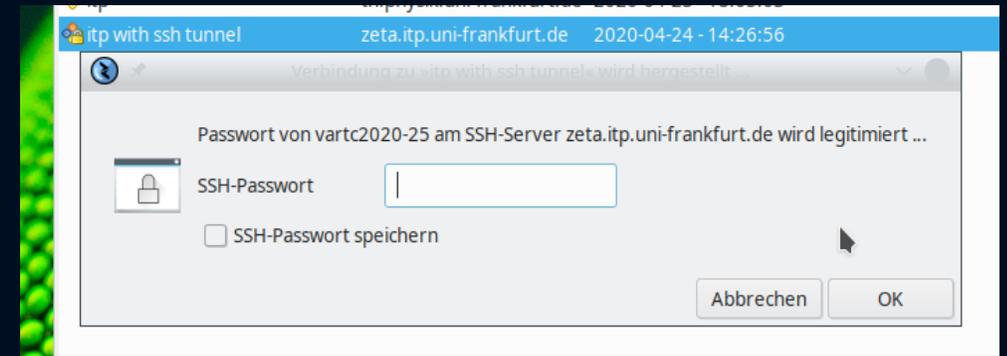
- SSH-Tunnel aktivieren
- Tunnel über Loopback-Adresse
- Selber Server an Port 22
- Benutzerdefiniert
- Zeichensatz: (empty)
- SSH-Legitimierung**
- Benutzername: vartc2020-25
- SSH Agent (automatisch)
- Passwort
- Öffentlicher Schlüssel (automatisch)
- Identitätsdatei: (keine)

At the bottom, there are five buttons: Abbrechen, Als Vorgabe speichern, Speichern, Verbinden, and Speichern und verbinden.

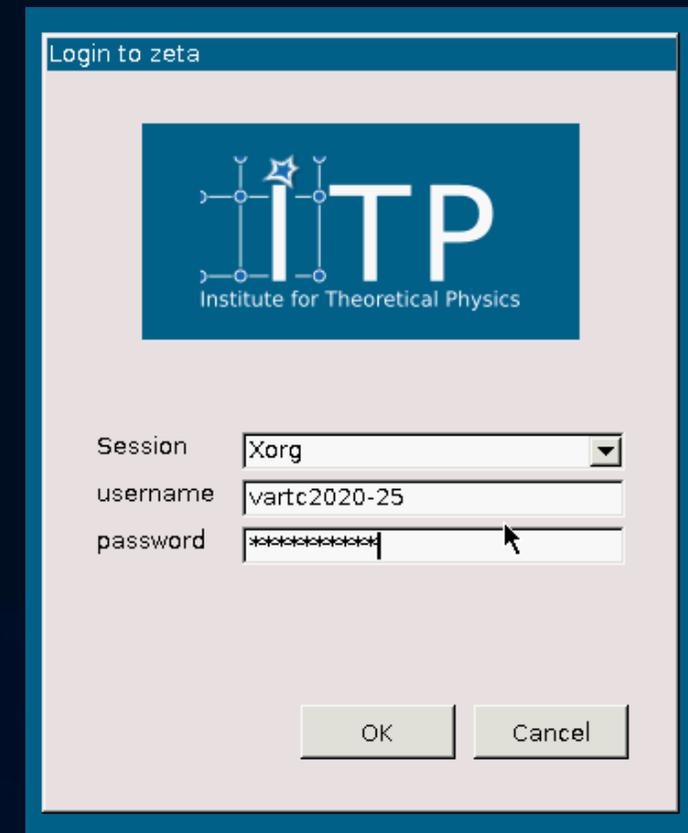
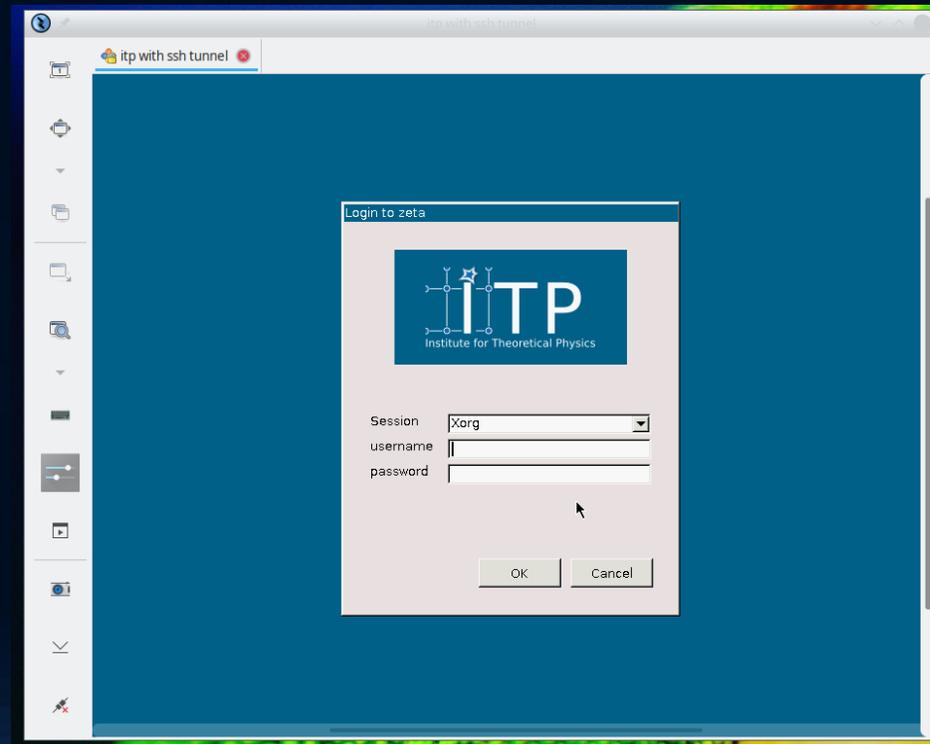
Doppelklick



Passwort eingeben

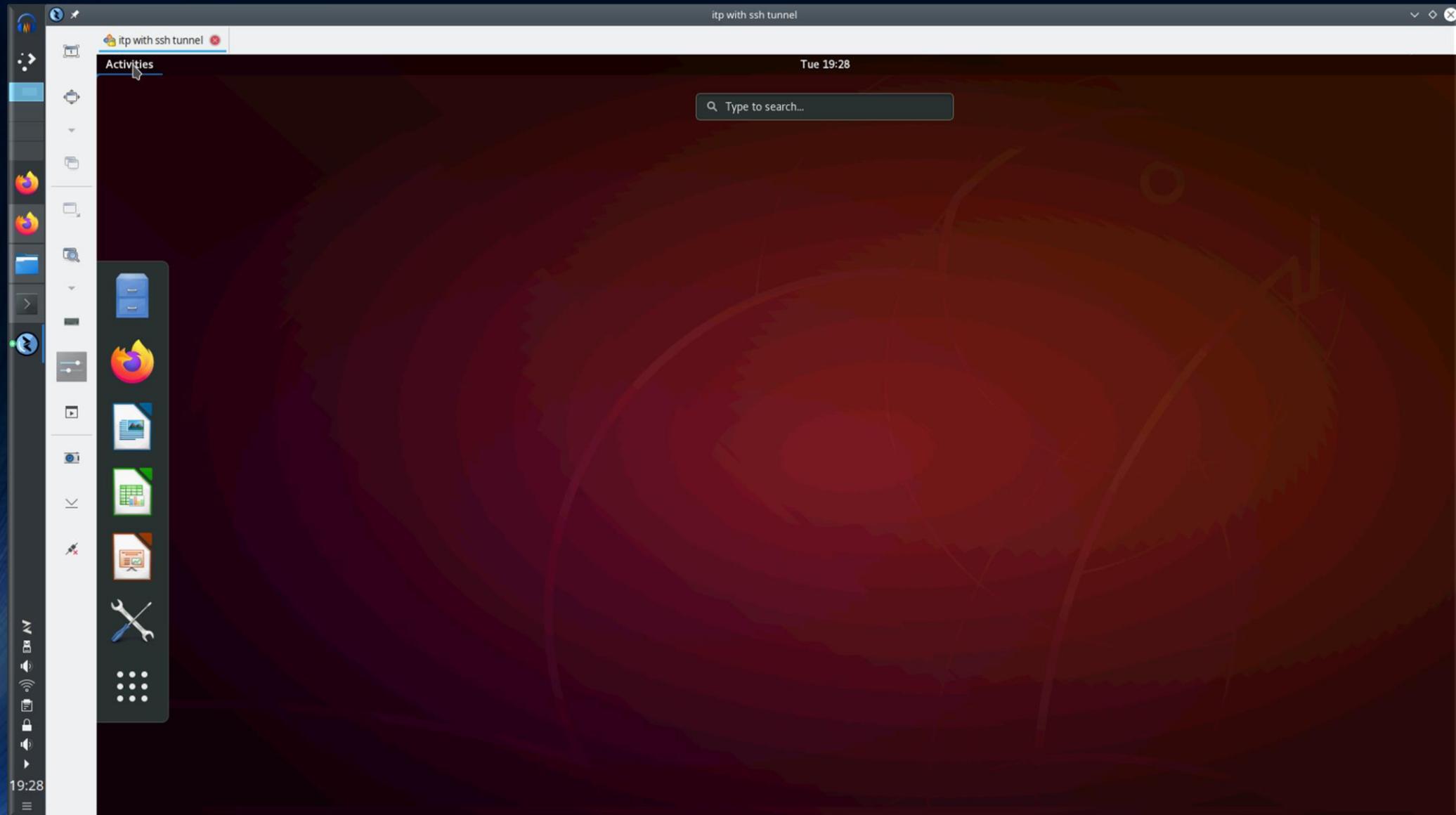


Dann nochmals den
Account Namen
und das
Passwort eingeben

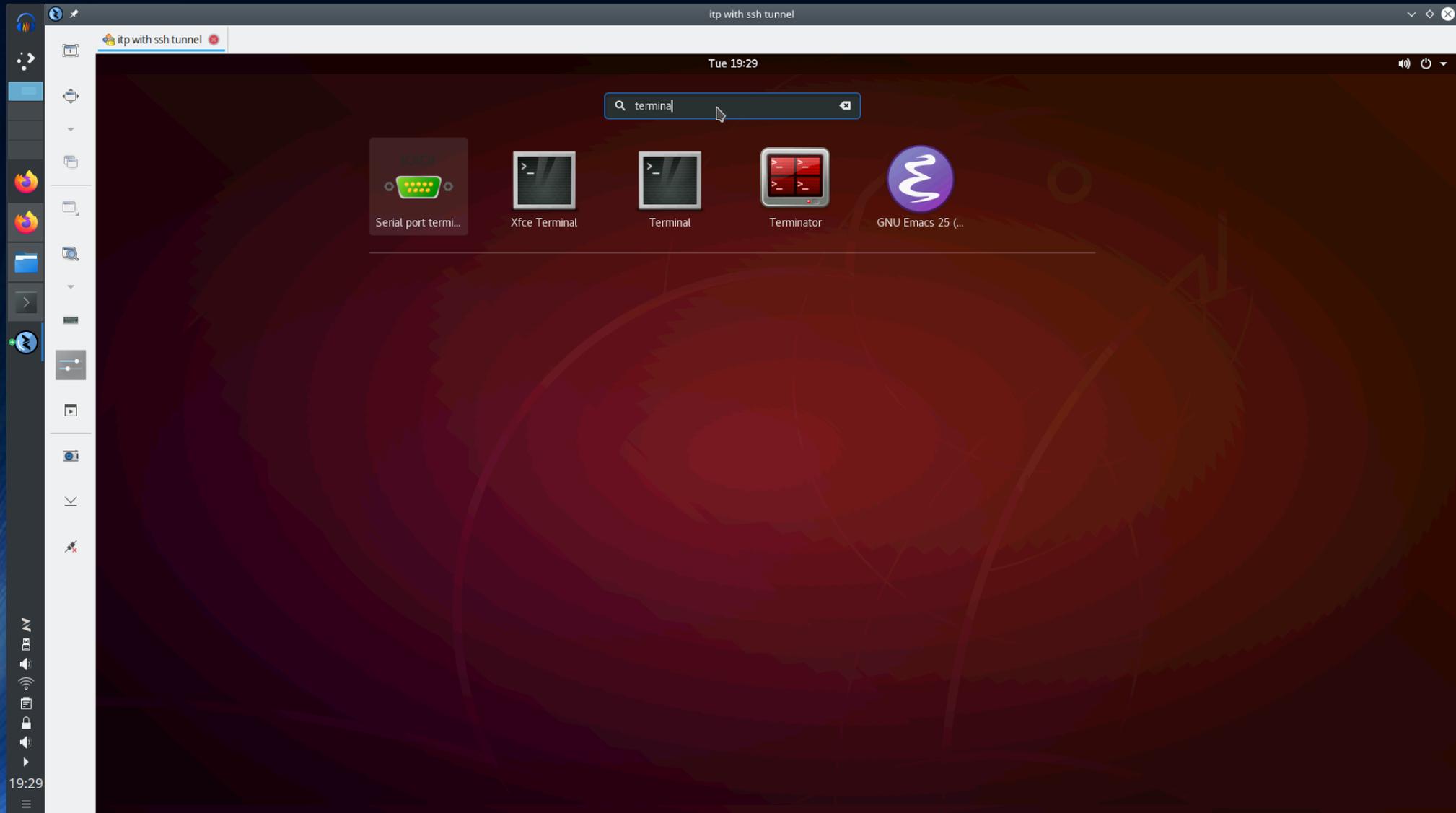


Geschafft!

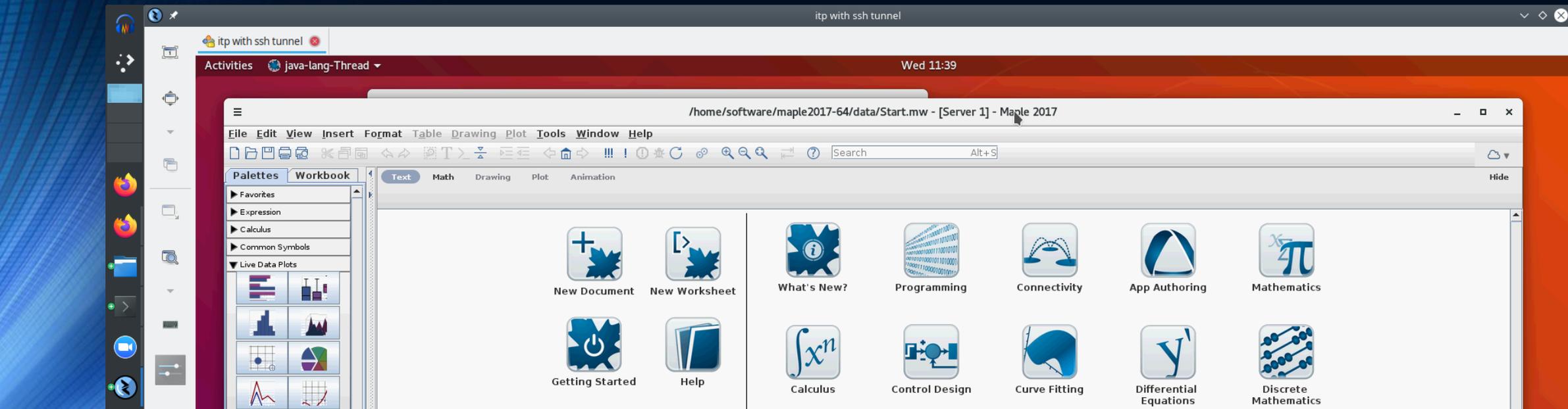
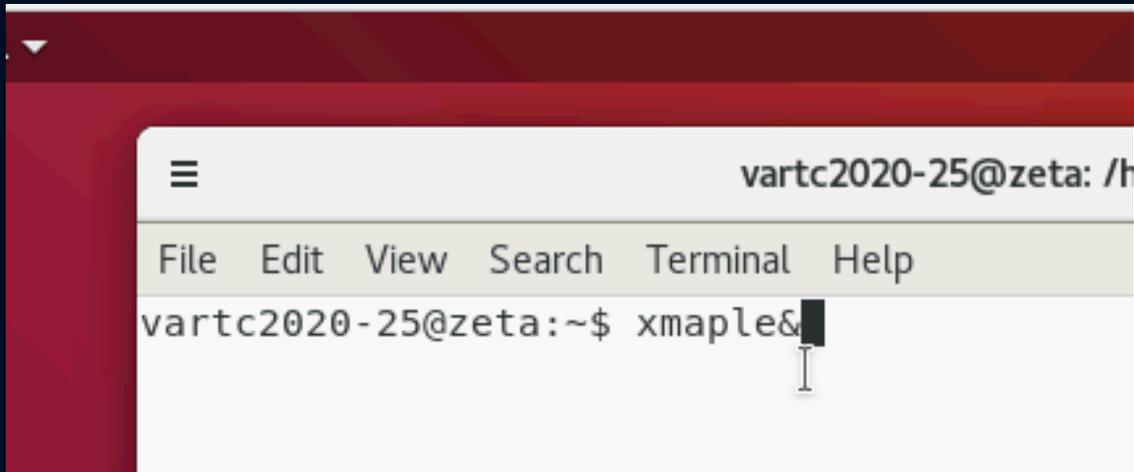
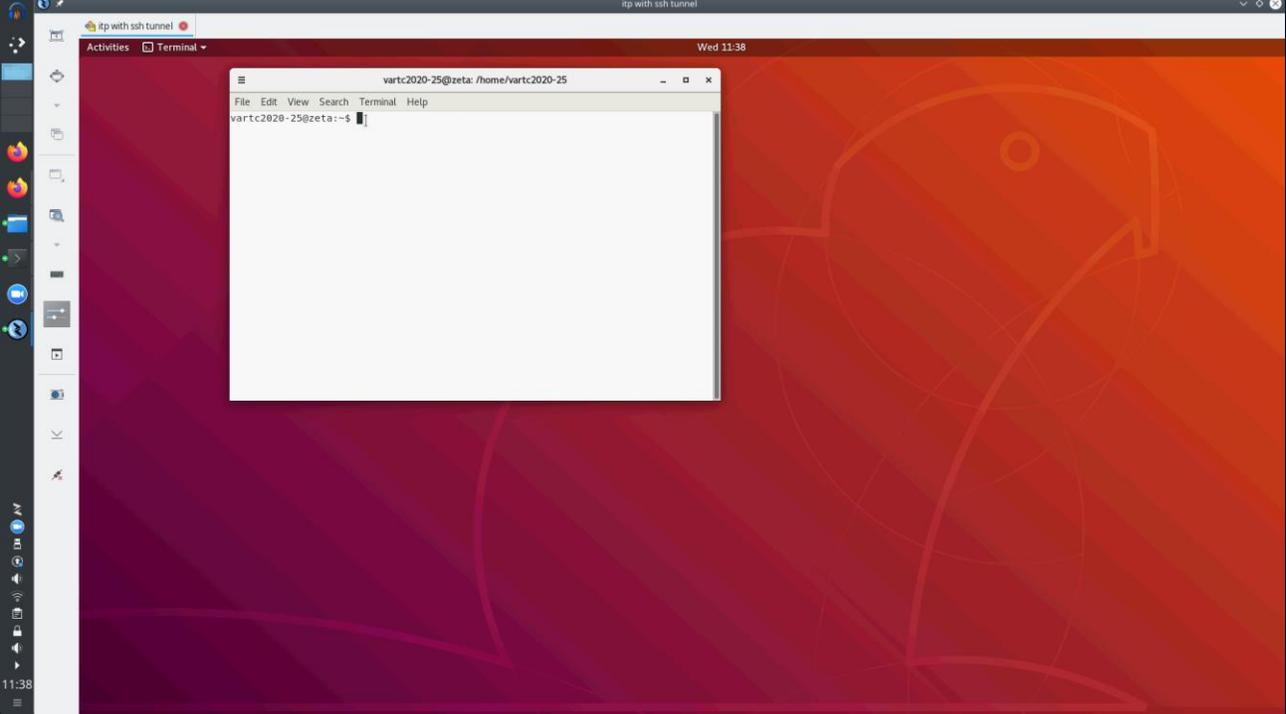
Sie sind auf dem Server des ITP !



Öffnen Sie ein Linux Terminal



Und starten
im Terminal Maple
(xmaple)



Führen Sie die folgenden weiteren Schritte aus

The image displays two sequential screenshots of the Maple 2017 software interface, demonstrating the steps to access the Options dialog.

Left Screenshot: The Maple 2017 application window is open, showing the 'Tools' menu. The 'Options' option is highlighted. Below the menu, a 'Start' page is visible, which provides instructions on how to use the software. The 'Start' page includes the following text:

Start

Use the icons on this page to create a new document or worksheet, view help pages, or find sample worksheets to help you get started with your own projects.

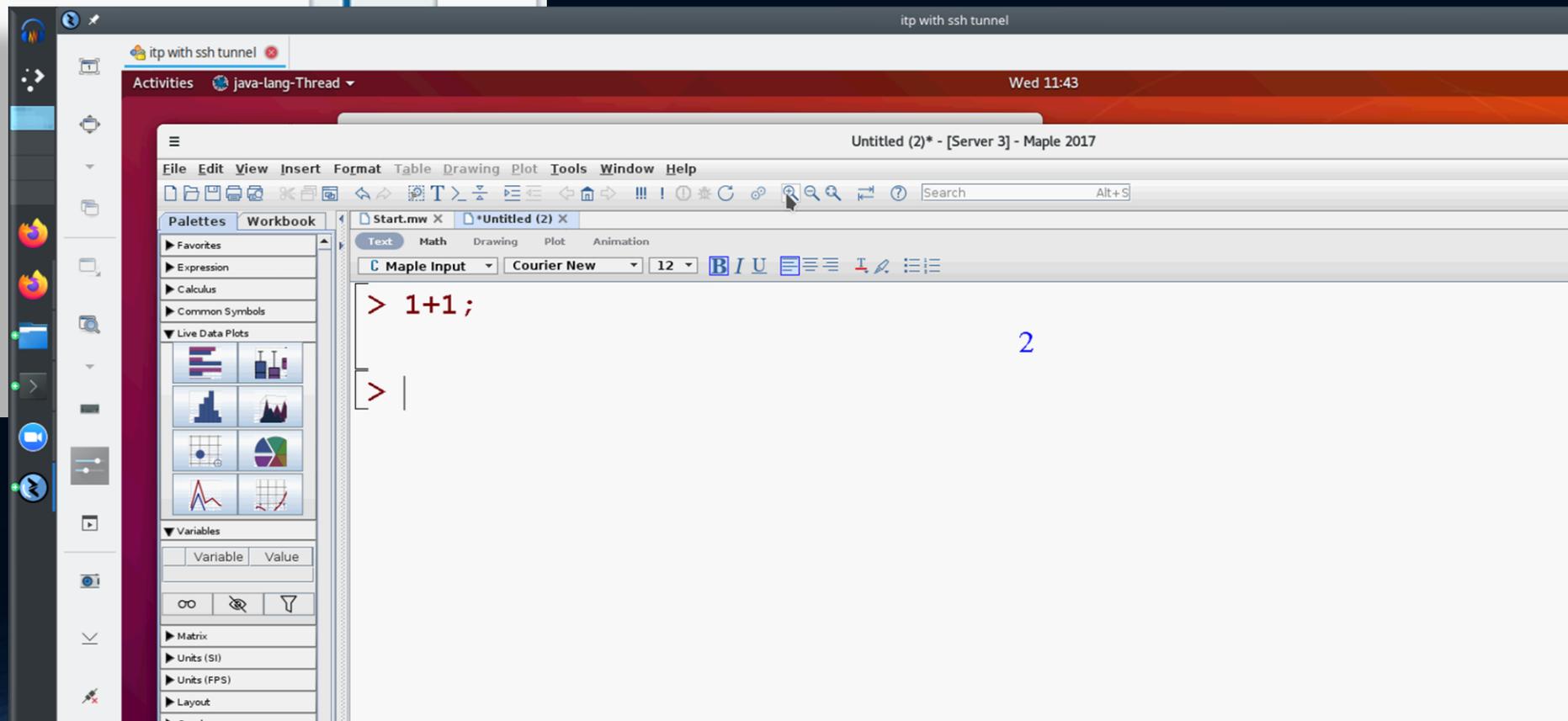
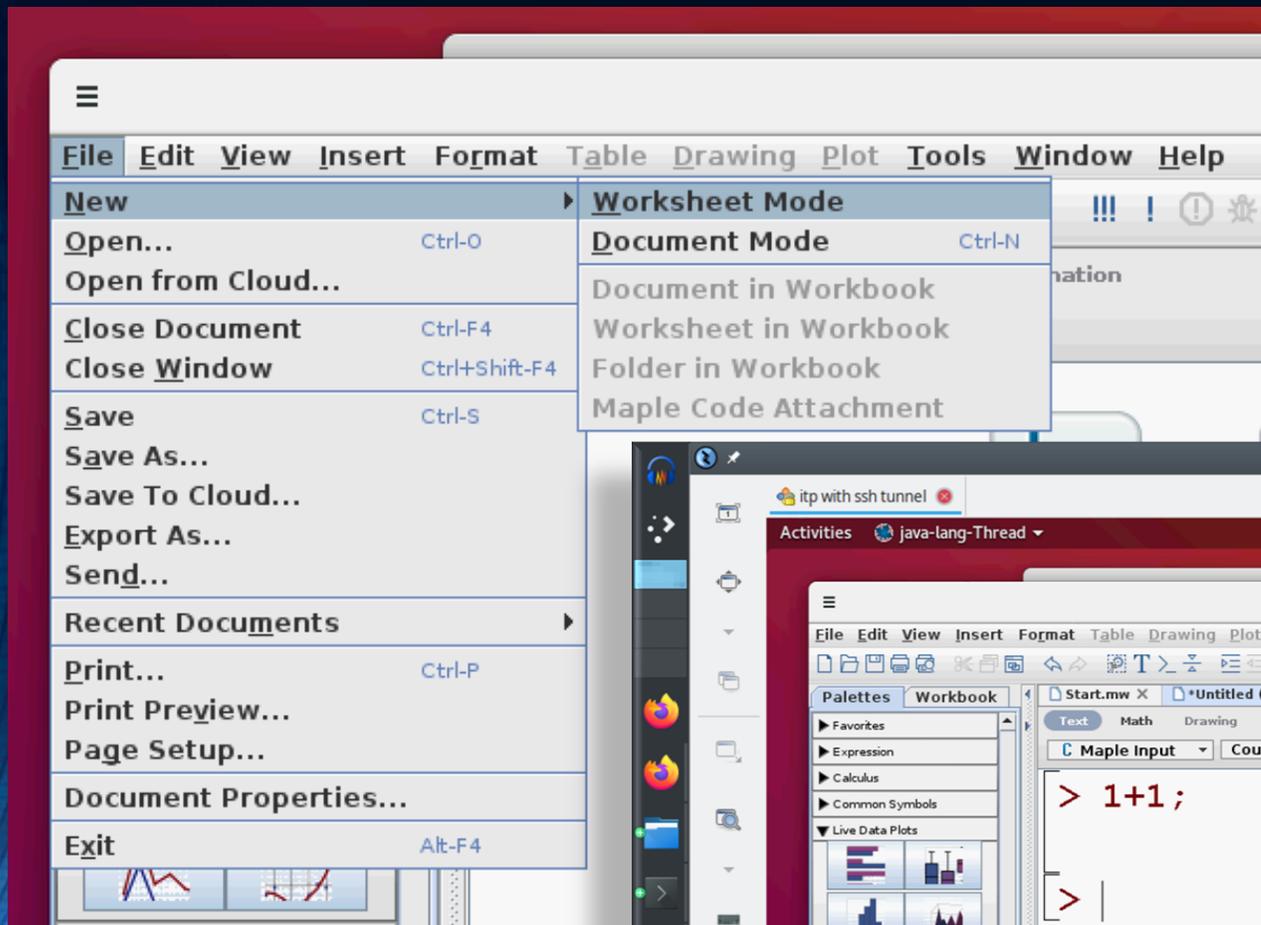
[Learn how to create your own start page.](#)

Right Screenshot: The 'Options' dialog box is open, showing the 'General' tab. The dialog box contains various settings for the software's appearance and behavior. The settings shown are:

- Input display: Maple Notation
- Output display: 2-D Math Notation
- Typesetting level: Extended
- Assumed variables: Trailing Tildes
- Plot anti-aliasing: Enabled
- Font anti-aliasing: Default
- Plot display: Inline
- Default Point Probe mode: None
- Show task variables on insert: Only On Naming Conflict
- Task content to insert: Standard Content
- Enable rollover highlighting in plots
- Use hardware acceleration for plots
- Always insert new execution group after executing
- Show equation labels
- Enable self-documenting context menu evaluations
- Expose commands inserted from Load/Unload Package menus

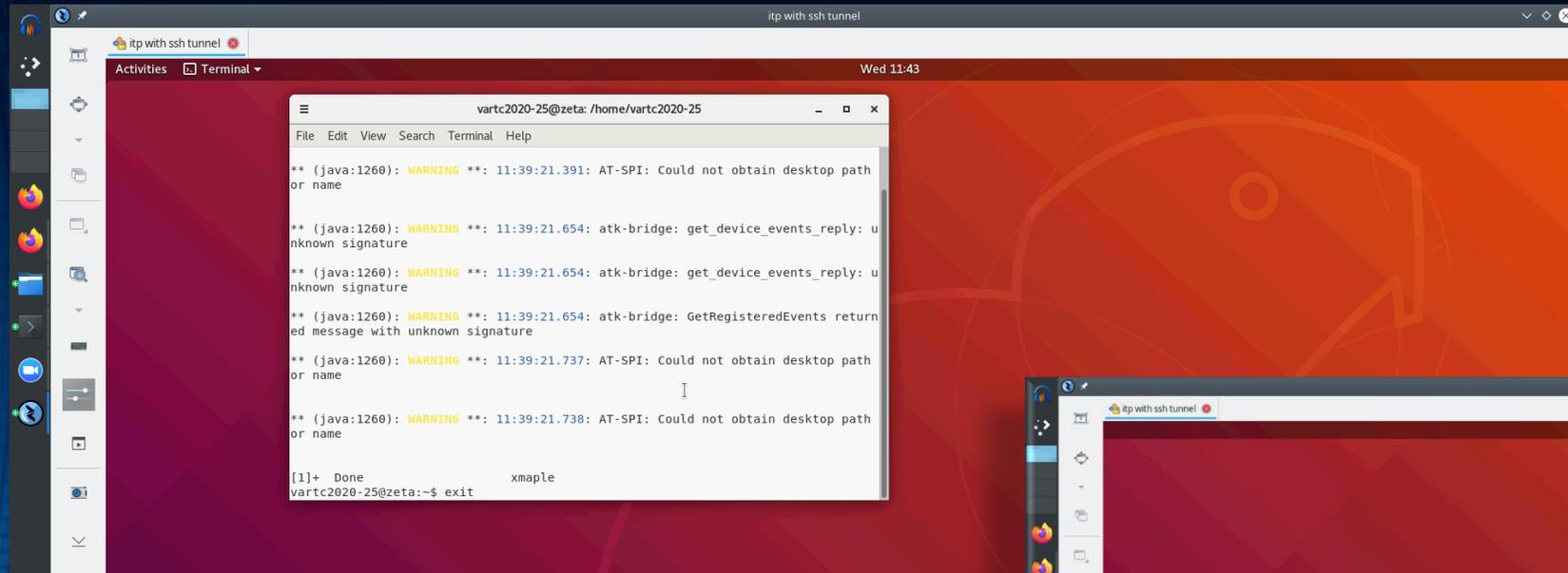
The dialog box also features buttons for 'Apply to Session', 'Apply Globally', and 'Cancel'. The status bar at the bottom of the window shows 'Maple Default Profile', the current file path, memory usage (4.18M), time (0.08s), zoom (100%), and 'Math Mode'.

Öffnen Sie ein neues Maple Worksheet und ...

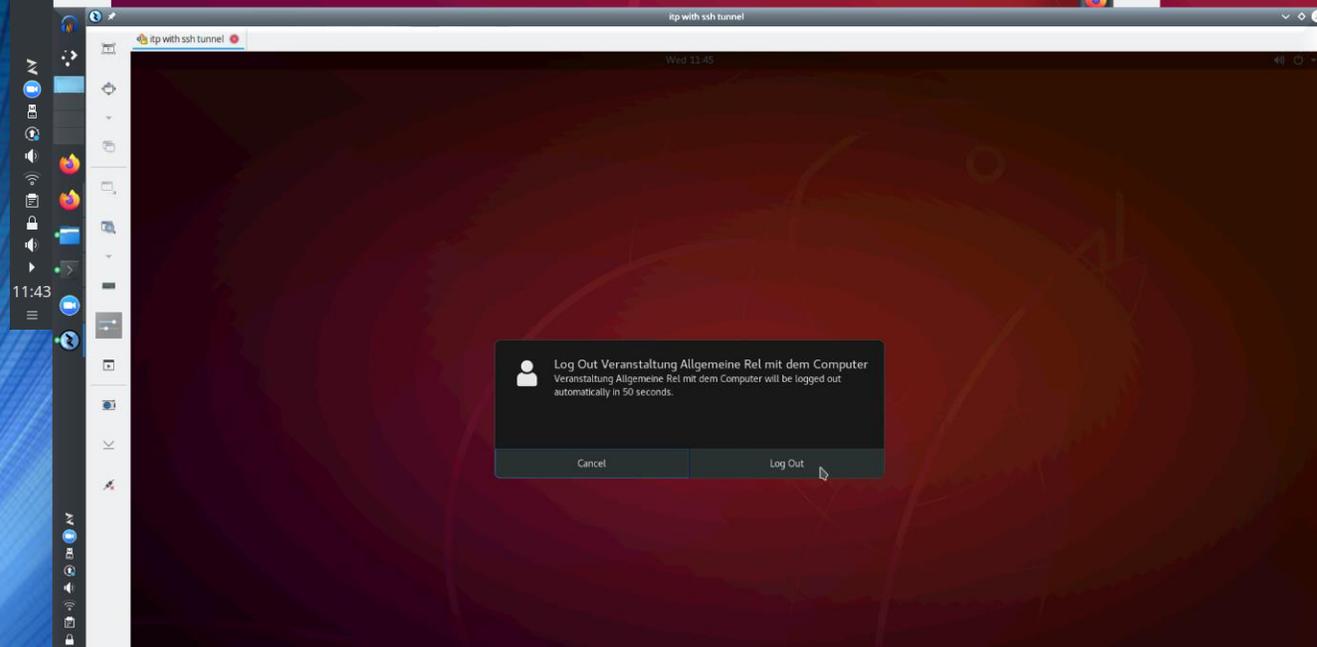
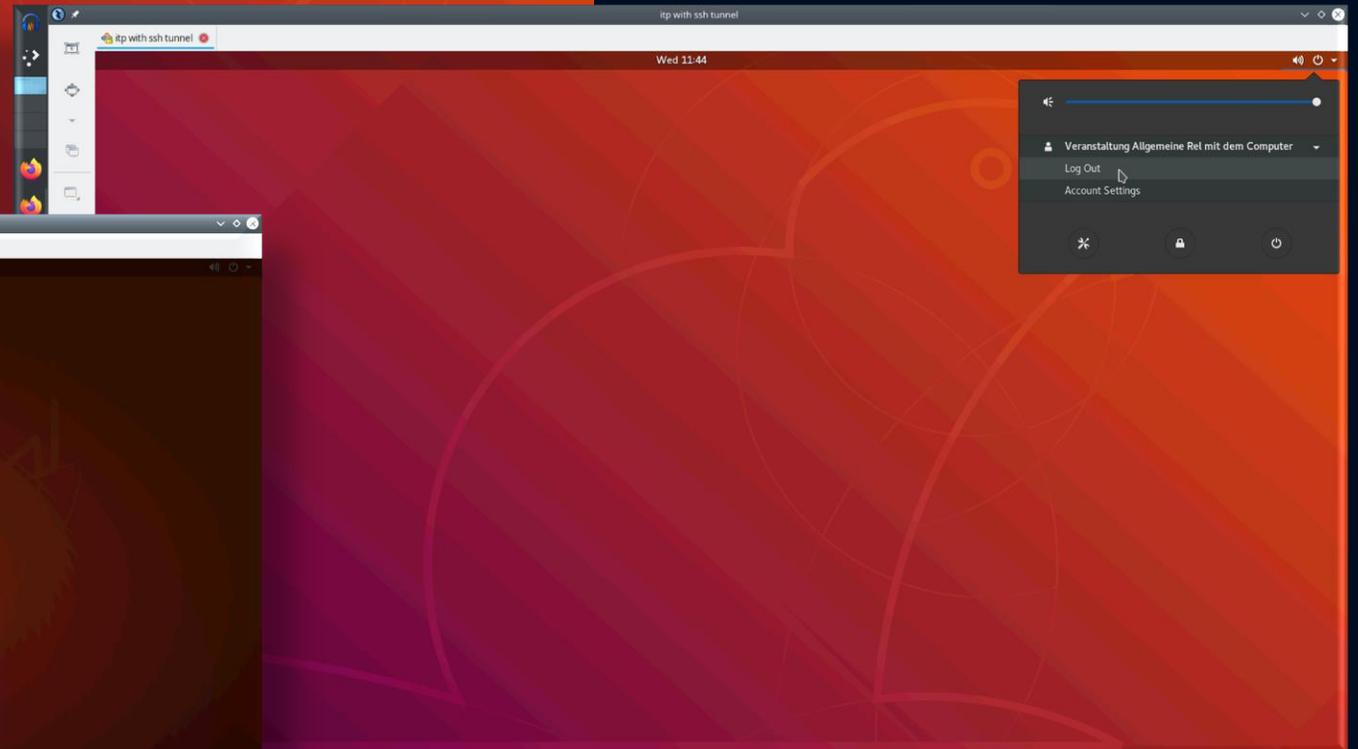


Beenden Sie Maple und das Terminal (exit)

... und loggen sich dann wieder vom ITP Server aus



```
itp with ssh tunnel
Activities Terminal Wed 11:43
vartc2020-25@zeta: /home/vartc2020-25
File Edit View Search Terminal Help
** (java:1260): WARNING **: 11:39:21.391: AT-SPI: Could not obtain desktop path or name
** (java:1260): WARNING **: 11:39:21.654: atk-bridge: get_device_events_reply: unknown signature
** (java:1260): WARNING **: 11:39:21.654: atk-bridge: get_device_events_reply: unknown signature
** (java:1260): WARNING **: 11:39:21.654: atk-bridge: GetRegisteredEvents returned message with unknown signature
** (java:1260): WARNING **: 11:39:21.737: AT-SPI: Could not obtain desktop path or name
** (java:1260): WARNING **: 11:39:21.738: AT-SPI: Could not obtain desktop path or name
[1]+ Done xmaple
vartc2020-25@zeta:~$ exit
```



Grundlagen von
Berechnungen
der Allgemeinen
Relativitätstheorie in
Maple

[Teil I](#)

[Teil II](#)

[Teil III](#)

[E-Learning](#)

Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

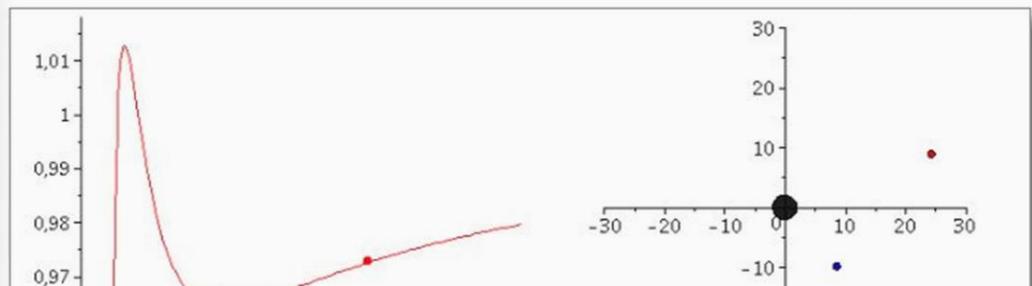
Einführung in Maple (LibreOffice Datei , PDF Datei)

Am Anfang des ersten Teils der Vorlesung wird eine kurze Einführung in das Computeralgebra-System Maple gegeben. Im folgenden werden einige grundlegende Größen der allgemeinen Relativitätstheorie am Beispiel der allgemeinen statischen, isotropen Metrik erläutert und aufgezeigt, wie man diese in Maple berechnet. Zunächst wird das "tensor"-Paket eingebunden. Die mit roter Schrift gekennzeichneten Wörter stellen die vom User eingegebenen Befehle dar und die blauen Wörter sind die vom Maple-Program ausgegebenen Größen. Hier werden im speziellen die im "tensor"-Paket neu definierten Befehle ausgegeben. Möchte man die eingegebenen Befehle zwar ausführen, aber nicht ausgeben lassen, so hat man am Ende des Befehls einen Doppelpunkt und kein Semikolon zu schreiben.

1) Grundlegende Größen der ART

Die komplizierten und zeitaufwendigen Berechnungen der tensoriellen Gleichungen der ART können mit Hilfe von Maple erleichtert werden und numerische Simulationen der entstehenden Differentialgleichungen sind ohne viel Aufwand möglich. Im Teil I.1) dieser Vorlesung wird zunächst gezeigt, wie man die grundlegende Größen der allgemeinen Relativitätstheorie im Maple implementiert (Metrik, Christoffelsymbole, Riemann- und Riccitenor, Einsteingleichung, Geodätengleichung, ...).

2) Das nichtrotierende schwarze Loch (Version 1 , Version 2 , Mathematica Notebook der Version 2 , Der Merkur-Transit , Das schwarze Loch in M87 (nicht rotierend))



Das im Vorwort vorgestellte Bild eines schwarzen Lochs (SL) im Zentrum unserer Nachbargalaxie M87, ist ein erster Versuch, die um ein schwarze Loch entstehende Radiostrahlung mittels eines weltweiten Verbunds von Radiowellenteleskopen sichtbar zu machen. In Kürze (voraussichtlich im Sommer 2019) werden die aufgenommenen Bilder von Sagittarius A*, das schwarze Loch im Zentrum unserer Galaxie, ebenfalls ausgewertet sein, und weitere Bilder in verbesserter Auflösung werden wohl in einigen Jahren folgen.

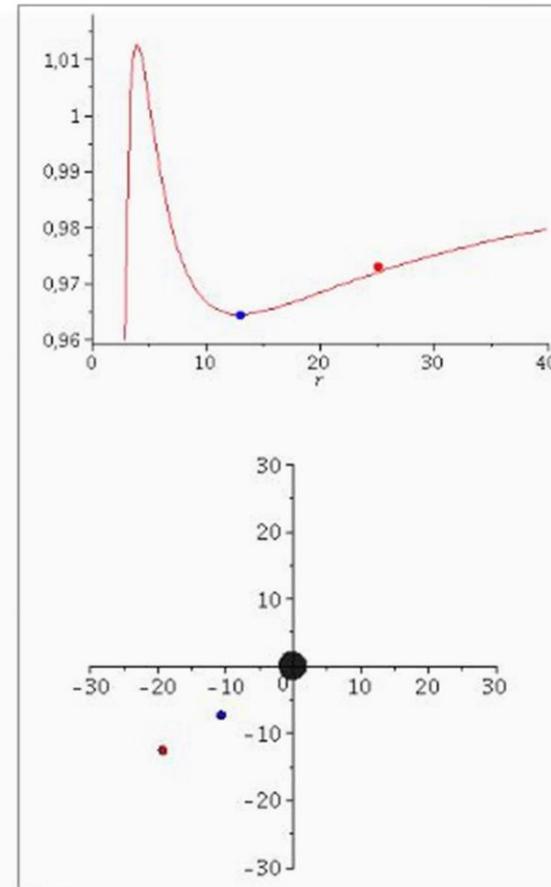
In beiden Systemen (SL in M87 und Sagittarius A*) kreist Materie in einer Akretionsscheibe um ein supermassives SL und emittiert beim Einfallen

3. Vorlesung

Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

Analytische Berechnungen und numerische Simulationen im Bereich der Allgemeinen Relativitätstheorie können auch mittels des Computeralgebra-Systems Maple durchgeführt werden (siehe alter Teil I der Vorlesung). Die entsprechenden Maple Worksheets der bisher besprochenen Inhalte finden Sie unter den folgenden Links:

- [Einführung in Maple](#)
[Download Maple Worksheet](#)
- [Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie](#)
[Download Maple Worksheet](#)
- [Die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit \(Version 1\)](#)
[Download Maple Worksheet](#)
- [Die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit \(Version 2\)](#)
[Download Maple Worksheet](#)



Die nebenstehende Animation stammt aus dem untersten Maple Worksheet und zeigt die simulierten Ergebnisse der möglichen Bahnen eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch. Diese Ergebnisse werden weiter unten im Jupyter Notebook diskutiert.

Weitere Maple Worksheets: [Das Foucaultsche Pendel](#), [Euler-Lagrange Theorie des Doppelpendels](#), [Hamilton Theorie des Doppelpendels](#), [Das begleitende Dreibein](#), [Der harmonische Oszillator mit Dämpfung](#), [Physik mit dem Computer](#), [Physik der sozio-ökonomischen Systeme](#), [Physik der sozio-ökonomischen Systeme \(alt\)](#)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} &= \frac{d^2 t}{d\lambda^2} = - \\ \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} &= \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = - \\ \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} &= \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} = - \\ \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} &= \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} = - \end{aligned}$$

Man kann zeigen (siehe z.B. Seite [introduction for physicists by M. A. N. Lasenby](#)), dass sich die ersten Systems von Differentialgleichungen um

1. Gleichung: $\frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0$
 $\rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = \text{const}$

2. Gleichung: $\frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} \right) = 0$
 $\rightarrow r^2 \sin^2(\theta) = \text{const}$

[Einführung](#)

[Teil I](#)

[Teil II](#)

[Teil III](#)

[E-Learning](#)

[Download Maple Worksheed](#)

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

3. Vorlesung

Einführung

Basierend auf den Ergebnissen der zweiten Vorlesung des ersten Teils wird im folgenden eine Klassifizierung der Umlaufbahnen eines Probekörpers um ein schwarzes Loch vorgestellt und mit den Newtonschen Umlaufbahnen verglichen.

Nobel Preis 2020

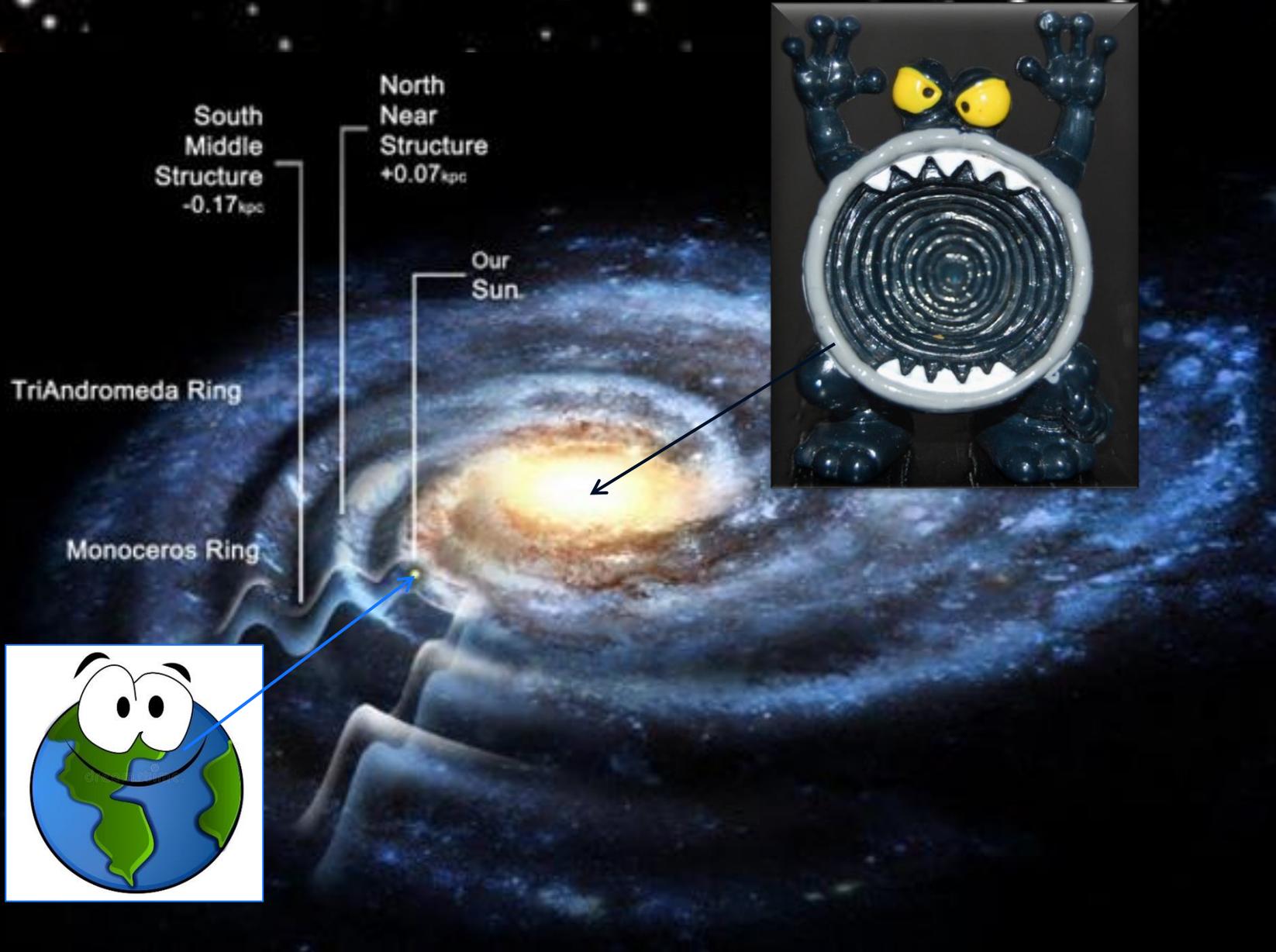
IN PHYSICS 2020

Illustrations: Niklas Elmehed



Für die Entdeckung, dass die Bildung von Schwarzen Löchern eine robuste Vorhersage der allgemeinen Relativitätstheorie ist (R. Penrose) und die Entdeckung eines supermassiven kompakten Objekts im Zentrum unserer Galaxie (R. Genzel und).

Das schwarze Loch im Zentrum unserer Galaxie



Die Geodätengleichung

Wie bewegt sich ein Probekörper in vorgegebener raumzeitlicher Struktur?

Im Folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse Probekörper $m \ll M$ Masse schwarzes Loch) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht.

Sie lässt sich demnach durch folgendes Variationsprinzip herleiten:

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \rightarrow \text{Extremal}$$

, wobei sich dann die Geodätengleichung mittels der Euler-Lagrange Gleichungen $L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$, bzw. alternativ

$L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ ergibt:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

$\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ sind die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit τ des Probekörpers).

Die Geodätengleichung

Wir betrachten im Folgenden die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

, wobei wir wieder ein sphärisches Koordinatensystem benutzen ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$).

Die Geodätengleichung

Ein System gekoppelter nicht-linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung?

, wobei wir wieder ein sphärisches Koordinatensystem benutzen ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$). Die Geodätengleichung stellt ein System gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen dar

$$\begin{aligned}\frac{d^2 t}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \quad ,\end{aligned}$$

wobei λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit τ), t , r , θ und ϕ die Koordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen.

Die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Maple Ausgabe bei festgelegter Schwarzschild-Raumzeit

$$\begin{aligned} \text{eqns} := & \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda) - \frac{2M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(-r+2M)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ & - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + \\ & - r + 2M \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

wobei die $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit) darstellen.

Radial in ein schwarzes Loch einfallender Probekörper

```
> restart:
with( tensor ):
with(plots):
with(plottools):
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse M in Schwarzschildkoordinaten:

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
g_compts[1,1] := 1-2*M/r: g_compts[2,2] := -1/g_compts[1,1]:
g_compts[3,3] := -r^2: g_compts[4,4] := -r^2*sin(theta)^2:
g := create( [-1,-1], eval(g_compts));
```

$$g := \text{table} \left(\begin{array}{c} \text{index_char} = [-1, -1], \text{compts} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (2.1.1)$$

Berechnung der kontravarianten Metrik und der Christoffel Symbole:

```
> ginv := invert( g, 'detg' ):
D1g := d1metric( g, coord ):
D2g := d2metric( D1g, coord ):
Cf1 := Christoffel1( D1g ):
Cf2 := Christoffel2( ginv, Cf1 ):
```

Berechnung der Geodätengleichung als Funktion des affinen Parameters λ : Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \end{aligned} ,$$

wobei λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t, r, θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen.

```
> eqns:=geodesic_eqns( coord, lambda, Cf2 );
```

$$\begin{aligned} eqns := & \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{d\lambda^2} t(\lambda) - \frac{2M}{r(-r+2M)} \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \\ + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + & \\ -r+2M \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Wir lassen nur radiale Bewegung zu und setzen die Masse des schwarzen Lochs auf $M=1$:

```
> eq1:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[1]):
eq2:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[2]):
eq3:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[3]):
eq4:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[4]):
eq1:=simplify(subs({r=r(lambda)}, eq1)):
eq4:=simplify(subs({r=r(lambda)}, eq4)):
```

Anfangsbedingungen

Zum Lösen des Systems von Differentialgleichungen müssen die Anfangsbedingungen des Probekörpers festgelegt werden

z.B. wo befindet sich der Probekörper zur Eigenzeit $\lambda=0$: $r(0)=10$

Die Anfangsbedingung für $t'(0)$ erhält man z.B. mittels der folgenden Bedingungen aus dem infinitesimalen Weglängenelement ds :

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \xRightarrow{\substack{dr=d\theta=d\phi=0 \\ \text{bei } t=0}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Keine Anfangsgeschwindigkeit

Anfangsgeschwindigkeit in der äquatorialen Ebene:

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \xRightarrow{\substack{dr=d\theta=0, \\ \theta=\pi/2 \text{ bei } t=0}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} - r^2 \frac{d\phi^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \sqrt{\frac{1 + r^2 \frac{d\phi^2}{d\lambda^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

$$\begin{aligned}
 eq1 &:= \frac{\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda)\right) r(\lambda)^2 - 2 \left(\frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda)\right) r(\lambda) + 2 \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda)\right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)}{r(\lambda) (r(\lambda) - 2)} = 0 \\
 eq4 &:= \frac{1}{r(\lambda)^3 (r(\lambda) - 2)} \left(\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^4 - 2 \left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^3 \right. \\
 &\quad + \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda)\right)^2 r(\lambda)^2 - 4 \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda)\right)^2 r(\lambda) + 4 \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda)\right)^2 \\
 &\quad \left. - \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 r(\lambda)^2 \right) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1.3}$$

Anfangswerte:

Zur Zeit $t=0$ sei der fallende Körper bei einem Radius von $r=10=5 \cdot r_s$ (Schwarzschildradius), die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers sei 0. Wir beschreiben den Fall aus der Sichtweise eines im unendlichen ruhenden Beobachters. Bemerkung: Der Anfangswert dt_0 ergibt sich hierbei aus der Bedingung des infinitesimalen Weglängenelements $\frac{ds^2}{d\lambda^2} = u^\mu u_\mu = 1$, wobei hierbei der affine Parameter λ als Eigenzeit τ interpretiert wird und u^μ die 4er-Geschwindigkeit des Körpers darstellt.

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{dr=d\theta=d\phi=0 \text{ bei } t=0} \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

```

> r0:=10:
  t0:=0:
  dr0:=0:
  dt0:=evalf(1/sqrt(1-2/r0)):
  
```

Numerisches Lösen der Geodätengleichung:

```

> Loes:=dsolve({eq1,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0,D(r)(0)=0,D(t)(0)=dt0},{r(lambda),t(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):
  
```

Zum Vergleich lösen wir auch die Bewegungsgleichung nach Newton:

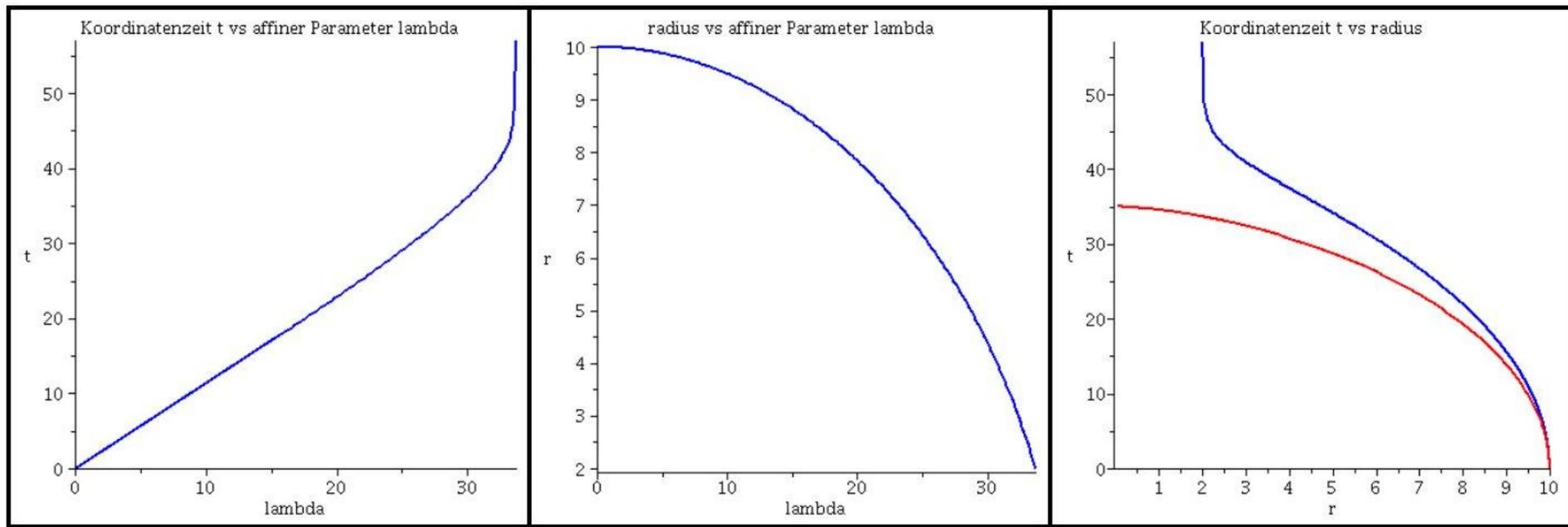
$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{r^2}$$

Grafische Veranschaulichung der Lösung (rote Kurve ist die nach Newton berechnete):

```

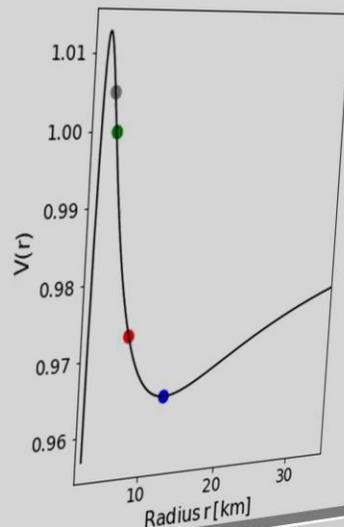
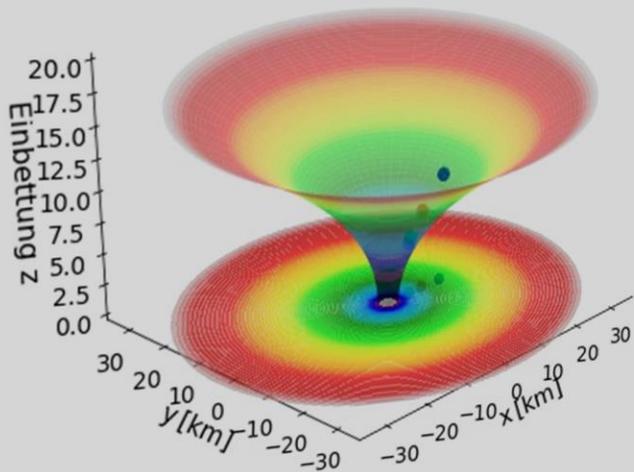
>
      lend:=33.7:
      lendn:=35.12:
Plot1:=odeplot(Loes, [lambda, t(lambda)], 0..lend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter
      lambda"):
Plot2:=odeplot(Loes, [lambda, r(lambda)], 0..lend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="radius vs affiner Parameter lambda"):
Plot3:=odeplot(Loes, [r(lambda), t(lambda)], 0..lend, numpoints=700, color=blue, thickness=2, title="Koordinatenzeit t vs radius"):
Plot_newton:=odeplot(Loes_newton, [r(lambda), lambda], 0..lendn, numpoints=100, color=red, thickness=2):
display(Matrix(1, 3, [Plot1, Plot2, display(Plot3, Plot_newton)]));

```



Jupyter Notebook

Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen um ein nicht-rotierendes Schwarzes Loch



Bewegung eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch in der Ebene

Teil II: Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen

Im Folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse Probekörper $m \ll M$ Masse schwarzes Loch) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht.

Sie lässt sich demnach durch folgendes Variationsprinzip herleiten:

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \rightarrow \text{Extremal}$$

Sie lässt sich demnach durch folgendes Variationsprinzip herleiten:

$$d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

wobei sich dann die Geodätengleichung mittels der Euler-Lagrange Gleichungen $L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$, bzw. alternativ $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ ergibt

$\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ sind die Christoffel Symbole zweiter Art

Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum Herunterladen

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Startseite | Lehren & Lernen | Kursangebote | Allgemeine Relativität...

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

- Allgemeine Relativitätstheorie mit
 - Literaturverzeichnis
 - Einschreibung
 - Kursinhalt
 - Vorlesungsaufzeichnung
 - Aufgaben
 - Programme
 - Einführung in Jupyter Notebook:
 - Allgemeine Relativitätstheorie m
 - Eigenschaften der Schwarzschild
 - Radialer Fall eines Probekörper:
 - Klassifizierung unterschiedlicher
 - Jupyter Notebooks**
 - Mitteilungen
 - Forum
 - Gruppen

Sommersemester 2021

Allgemeine Relativitätstheorie

Verantwortliche/r: Matt...

Allgemeine Relativitätstheorie

In dieser Vorlesung wird... Im ersten Teil des Kurses... komplizierten und zeit... Einstein- und Geodät... implementiert, quasi... numerischen Berechn... Programmierkenntnis... Zusätzlich wird hierbe... des Kurses werden z... Inhaltlich wird hierbe... Probleme behandelt... Neutronenstern zu ein... der gesamten interak...

Weitere Informationen

Literaturverzeichnis

- Internetseite der Vorlesung

Während der Bewegung erhaltene Größen

Energie und Drehimpuls des Probekörpers

Literatur:

1. *General relativity : An introduction for physicists* von M. P. Hobson, G. P. Efstathiou und A. N. Lasenby
2. *Gravity : An introduction to Einstein's general relativity* von James B. Hartle
3. *Allgemeine Relativitätstheorie* von Torsten Fließbach
4. *Relativistic hydrodynamics* von Luciano Rezzolla und Olindo Zanotti

Man kann zeigen (siehe z.B. Seite 206 in [General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby](#)), dass sich die erste und vierte Gleichung des Systems der Differentialgleichungen der Geodätengleichung in die folgenden Gleichungen umschreiben läßt:

$$1. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \right] = 0$$

$$\rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = e = \text{const}$$

$$2. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0$$

$$\rightarrow r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\tau} = l = \text{const} \quad ,$$

wobei die während der Bewegungen erhaltenen Größen e (Teilchenenergie pro Masse, $e = \frac{E}{m}$) und l (Drehimpuls pro Masse m , $l = \frac{L}{m}$) sich aus der

Definition des Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu = m g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = m \left(g_{tt} \frac{dt}{d\tau}, g_{rr} \frac{dr}{d\tau}, g_{\theta\theta} \frac{d\theta}{d\tau}, g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\tau} \right)$ ergeben (Voraussetzung: diagonale Form der Metrik). Für die

Schwarzschildmetrik erhält man:

$$p_t = p_0 = m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m e$$

$$p_\phi = p_3 = m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l$$

1. *General relativity : An introduction for physicists* von M. P. Hobson, G. P. Efstathiou und A. N. Lasenby
2. *Gravity : An introduction to Einstein's general relativity* von James B. Hartle
3. *Allgemeine Relativitätstheorie* von Torsten Fließbach
4. *Relativistic hydrodynamics* von Luciano Rezzolla und Olindo Zanotti

Das effektive Potential $V(r, M, l)$

Die Klassifikation möglicher Bahnen von Probekörpern in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit kann mittels eines definierten effektiven Potentials illustriert werden. Dieses Potential hängt von dem, bei der Bewegung erhaltenen Drehimpuls pro Masse m ab. Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l : Drehimpuls pro Masse m und e : Energie pro Masse) charakterisiert. Die Definition des effektiven Potential erfolgt mittels der radialen, 2. Geodätengleichung. So definieren z.B. die Literaturangaben 1-3 (siehe Angaben oben) das effektive Potential wie folgt:

$$2. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} .$$

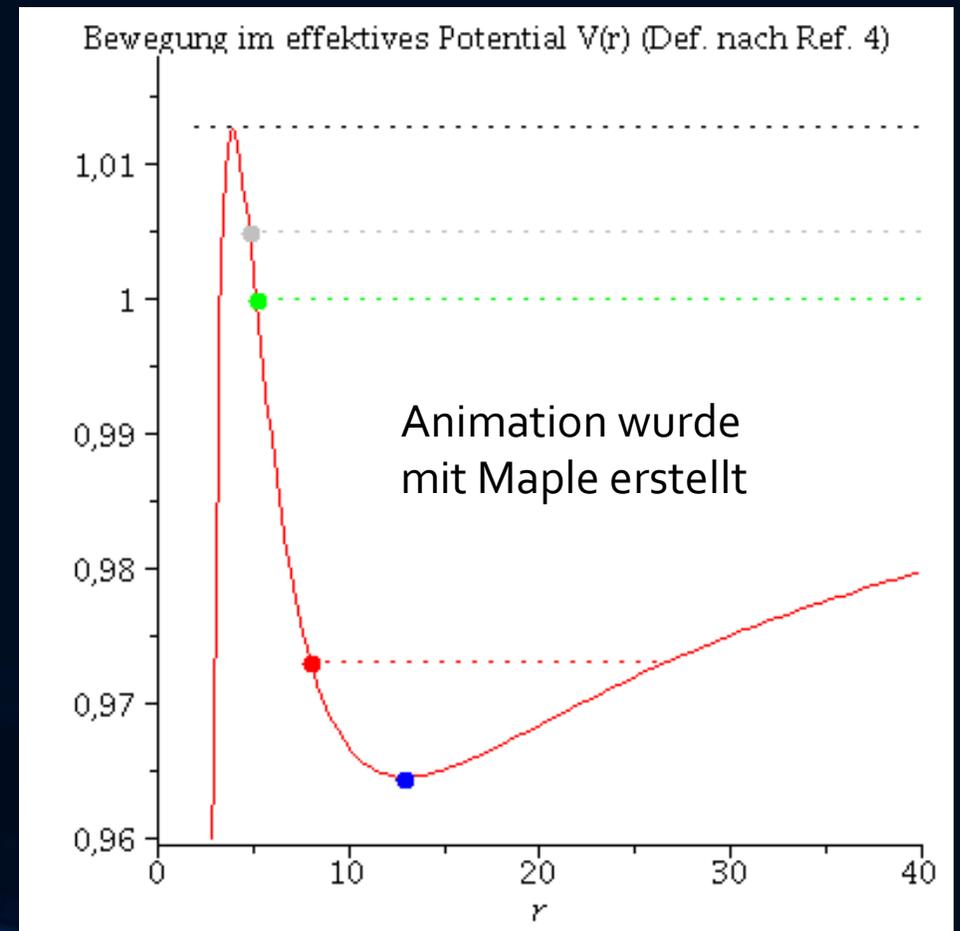
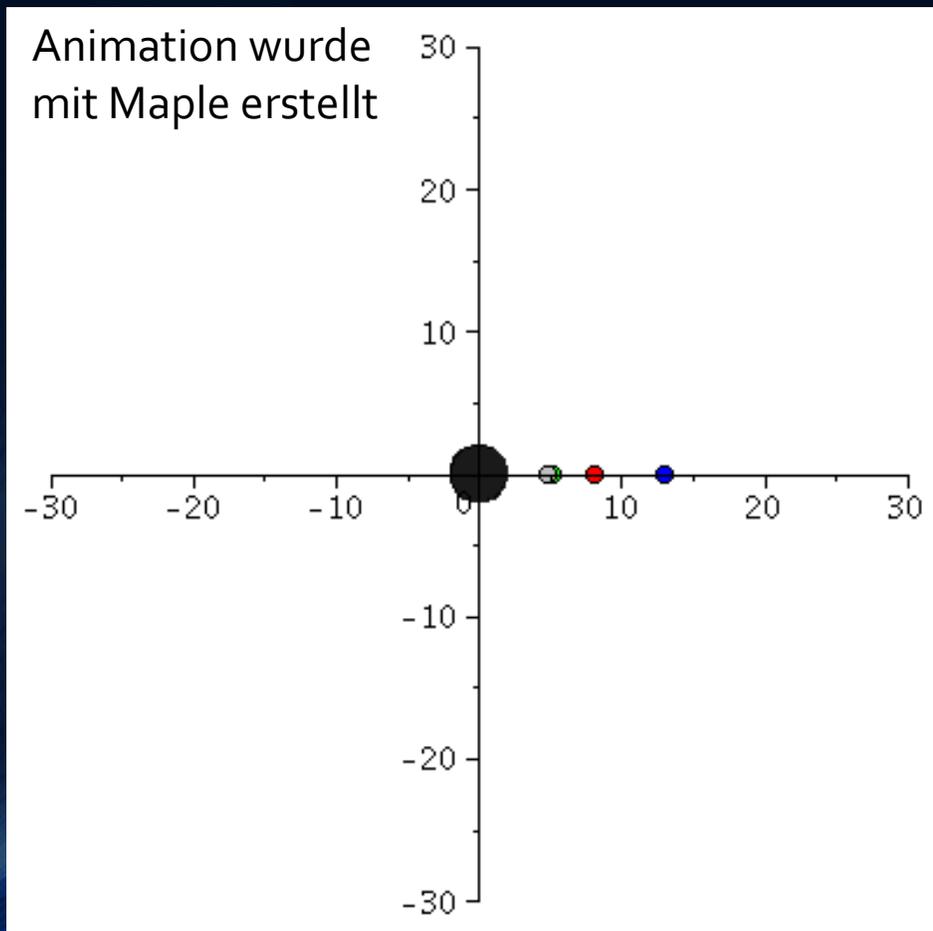
In der Literaturangabe 4 wird das Potential $V(r, M, l)$ hingegen wie folgt definiert:

$$2. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = e^2$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} .$$

Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch

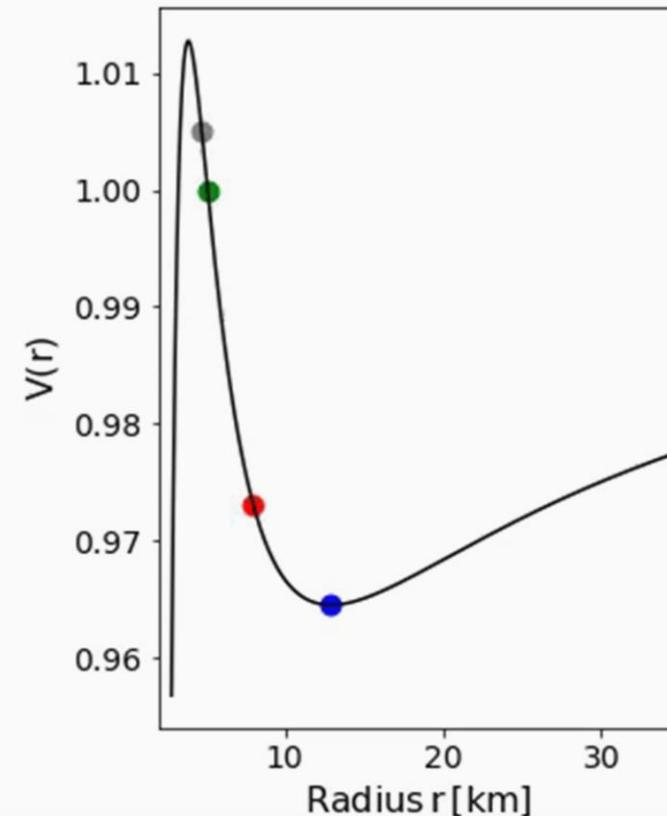
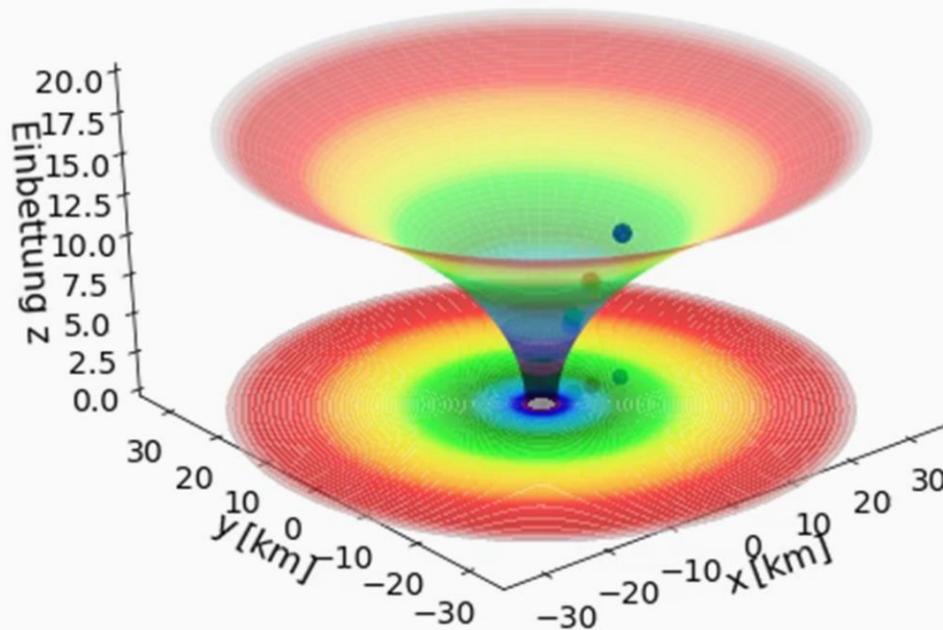
Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich



Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch

Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich

Animation wurde im Python Jupyter Notebook
„Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen
um ein nicht-rotierendes Schwarzes Loch“ erstellt



Einloggen

Benutzerkennung:

Passwort:

.....

Domäne:

ufm

The LearningOnline Network with CAPA



Benutzerkennung und Passwort haben Sie per E-Mail erhalten

Lon Capa Übungsaufgaben

- [Login-Hilfe](#)
- [Passwort vergessen?](#)
- [Helpdesk kontaktieren](#)
- [Kurs-/Community-Übersicht](#)

Domäne: ufm
Server: ufml1 (library)
Serverlast: 0.0 Prozent
 2.11.2-2017061214

[Home](#)
[Research](#)
[Contact](#)

[Programmieren mit OpenMP/MPI](#)
[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)
[Aufgaben](#)

Vorlesung SS 2020

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

(General Theory of Relativity on the Computer)

Die mathematisch anspruchsvollen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) in den Vorlesungen analysiert. Im ersten Teil des Kurses erlernen die Studierenden die Verwendung von Maple und Mathematica. Die oft komplizierten und zeitaufwendigen Berechnungen der ART können mit Hilfe dieser Programme erleichtert werden. Diverse Anwendungen der Einstein-

Besuchen Sie die [Kurs-/Community-Übersicht](#), um alle LON-CAPA-Kurse und -Communities der Institution "Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt am Main" zu betrachten. Falls ein Kurs in der folgenden Liste Ihrer derzeitigen Kurse **nicht** angezeigt wird, können Sie sich in der Kursübersicht in diesen Kurs selbst eintragen, sofern die Selbsteintragung für diesen Kurs aktiviert ist.

Wählen Sie den gewünschten Kurs aus

	Benutzerrolle	Bereich	Anfang	Ende
<input type="button" value="Auswählen"/>	Student/in	Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer (SS 2020) Kursüberblick	Do., 23. April 2020, 10:53:23 Uhr (CEST)	Mi., 20. Okt. 2021, 10:53:23 Uhr (CEST)

Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. [Matthias Hanauske](#)

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Aufgaben im Kurs allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Aufgaben im Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

[Berechnung von Christoffelsymbolen der Schwarzschild-Metrik](#)

[Berechnung des Riemann Tensors der Schwarzschild-Metrik](#)

[Probekörper fällt radial in ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Geodätische Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Radialer Wurf eines Probekörpers in der Nähe eines nichtrotierenden schwarzen Lochs](#)

[Berechnung eines Neutronensterns](#)

[Berechnung eines Weißen Zwergs](#)

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

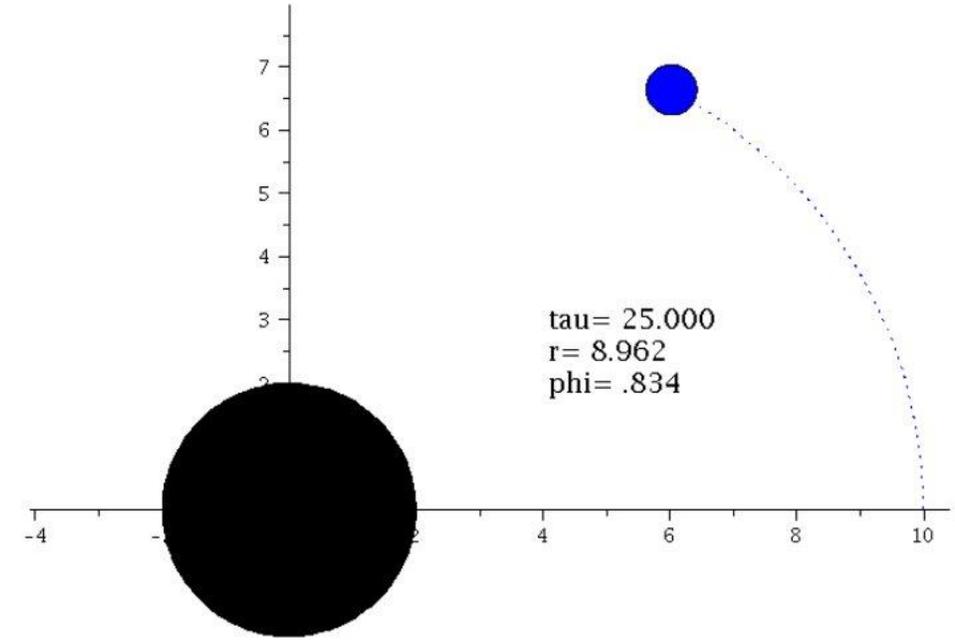
$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} ,$$

wobei τ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t , r , θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen. Lösen Sie, unter Verwendung des Computeralgebra-Systems Maple, die Geodätengleichung numerisch und wählen Sie dabei die folgenden Anfangsbedingungen. Zur Eigenzeit $\tau=0$ sei der Probekörper bei $r=15.4$, $\theta=0$ und $\phi=0$; die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\theta}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0.031$ und die Masse des schwarzen Lochs betrage $M=1$. Berechnen Sie wo sich der Probekörper bei $\tau=50$ befindet und geben Sie den Radius r und die polare Koordinate ϕ an.



$r =$, $\phi =$

Submit Answer Tries 0/20

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben. Die Art und Weise wie sich der Probekörper um das schwarze Loch bewegen wird mithilfe der radialen Komponente der Geodätengleichung und der Definition eines effektiven Potentials charakterisiert werden:

Maximum des Potentials bei r =

Minimum des Potentials bei r =

Submit Answer Tries 0/20

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$

wobei:
$$V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r}$$

Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l: Drehimpuls pro Masse m und E: Energie pro Masse) charakterisiert. Die Masse des schwarzen Loches sei M=1 und der Drehimpuls des Probekörper sei l=4.72. Geben Sie an bei welchem Abstand r sich das Maximum und das Minimum des Potentials befindet. Was bedeutet das Minimum des Potentials?

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben:

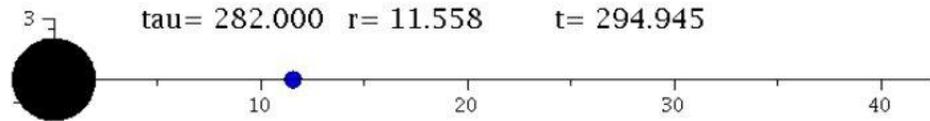
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$



wobei τ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t , r , θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen. Lösen Sie, unter Verwendung des Computeralgebra-Systems Maple, die Geodätengleichung eines radial in ein schwarzes Loch einfallenden Probekörpers. Verwenden Sie die folgenden Anfangsbedingungen: Zur Eigenzeit $\tau=0$ sei der Probekörper bei $r=50.5$, $\theta=0$ und $\phi=0$; die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\theta}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0$ und die Masse des schwarzen Lochs betrage $M=1$. Berechnen Sie wo sich der Probekörper bei $\tau = 300 \approx 1$ [ms] befindet und geben Sie den Radius $r(300)$ in [km] an.