Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

VORLESUNGSREIHE
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
20. APRIL, 2023

MATTHIAS HANAUSKE

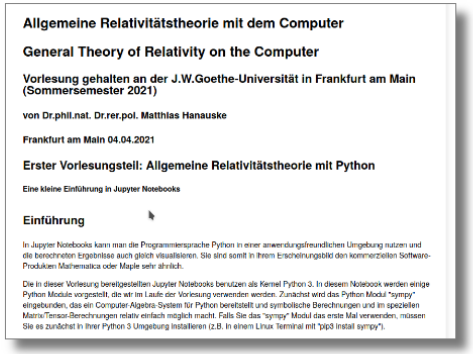
FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

2. Vorlesung

Vorlesung 1

Bevor wir uns mit den Inhalten der Vorlesung beschäftigen, werden in der Vorlesung 1 die Programmiersprache Python und Jupyter Notebooks behndelt. Während der Vorlesung und in den Übungsstunden werden wir Simulationsprogramme in Python und C++ benutzen und die Studierenden werden diese selbst ausführen und bearbeitet. Die Teilnehmer der Vorlesung erhalten hierfür einen Account für die Rechner des Instituts für Theoretische Physik (ITP) der Goethe-Universität. Mittels dieses Accounts können Sie einen *Remote Login* auf den Server des ITP machen und die benötigten Programme nutzen. Es wird jedoch empfolen Python und C++ auch auf dem eigen Rechner zu installieren.

Einführung in Jupyter Notebooks



Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 04.04.2021

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Eine kleine Einführung in Jupyter Notebooks

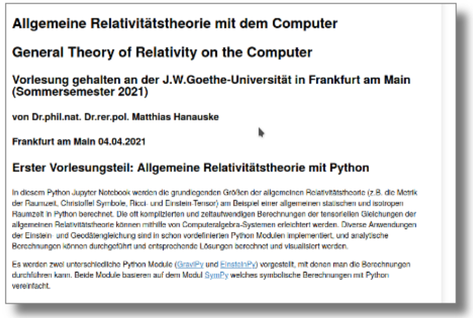
Einführung

In Jupyter Notebooks kann man die Programmiersprache Python in einer anwendungsfreundlichen Umgebung nutzen und die berechneten Ergebnisse auch gleich visualisieren. Sie sind somit in ihrem Erscheinungsbild den kommerziellen Software-Produkten Mathematica oder Maple sehr ähnlich.

Die in dieser Vorlesung bereitgestellten Jupyter Notebooks benutzen als Kernel Python 3. In diesem Notebook werden einige Python Module vorgestellt, die wir im Laufe der Vorlesung verwenden werden. Zunächst wird das Python Modul "sympy" eingebunden, das ein Computer-Algebra-System für Python bereitstellt und symbolische Berechnungen und im speziellen Matrix/Tensor-Berechnungen relativ einfach möglich macht. Falls Sie das "sympy" Modul das erste Mal verwenden, müssen Sie es zunächst in Ihrer Python 3 Umgebung installieren (z.B. in einem Linux Terminal mit "pip3 install sympy").

In den zugehörigen Übungsgruppen der Vorlesung werden wir die computerunterstützten Berechnungen hauptsächlich mittels sogenannter *Jupyter Notebooks* durchführen. In Jupyter Notebooks kann man die Programmiersprache Python in einer anwendungsfreundlichen Umgebung nutzen und die berechneten Ergebnisse auch gleich visualisieren. Auf den Computern des ITP kann man *Jupyter Notebooks* starten, indem man in einem Linux-Terminal den Befehl "jupyter-notebook" eingibt. Einige der in den Vorlesungen behandelten Jupyter Notebooks benutzen spezielle Python Module (z.B sympy), die man im Linux-Terminal für den Python3-Kernel mittels des Befehls "pip3 install sympy" installieren kann. Da es sich bei den Jupyter Notebooks um eine frei zugängliche Open-Source-Software handelt, kann man diese auch direkt auf dem eigenen Computer/Laptop installieren und benötigt nicht den Umweg mittels des Remote Logins auf den Server des ITP. In der ersten Vorlesung (siehe Folien der 1.Vorlesung) wird kurz besprochen, wie man eine solche Installation durchführt. In der ersten Übungsstunde werden Hilfestellungen zu dem *Remote Login* und der Installation von Python/Jupiter gegeben und eine einführendes Jupyter Notebook besprochen. Dieses Notebook finden Sie unter dem folgenden Link (IntroJupyter.ipynb) und zu dem html-Export gelangen Sie durch Klicken auf des nebenstehende obere Bild.

Allgemeine Relativitätstheorie mit Python



Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 04.04.2021

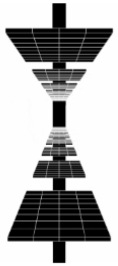
Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

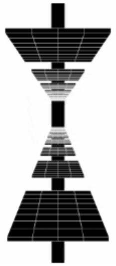
In diesem Python Jupyter Notebook werden die grundlegenden Größen der allgemeinen Relativitätstheorie (z.B. die Metrik der Raumzeit, Christoffel Symbole, Ricci- und Einstein-Tensor) am Beispiel einer allgemeinen statischen und isotropen Raumzeit in Python berechnet. Die oft komplizierten und zeitaufwendigen Berechnungen der tensoriellen Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie können mithilfe von Computeralgebra-Systemen erleichtert werden. Diverse Anwendungen der Einstein- und Geodätengleichung sind in schon vordefinierten Python Modulen implementiert, und analytische Berechnungen können durchgeführt und entsprechende Lösungen berechnet und visualisiert werden.

Es werden zwei unterschiedliche Python Module (GravPy und EinsteinPy) vorgestellt, mit denen man die Berechnungen durchführen kann. Beide Module basieren auf dem Modul SymPy welches symbolische Berechnungen mit Python vereinfacht.

Die oft komplizierten und zeitaufwendigen Berechnungen der tensoriellen Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie können mithilfe von Computeralgebra-Systemen erleichtert werden. Diverse Anwendungen der Einstein- und Geodätengleichung sind in schon vordefinierten Python Modulen implementiert, und analytische Berechnungen können durchgeführt und entsprechende Lösungen berechnet und visualisiert werden. Beim Klicken auf das nebenstehende Bild werden die grundlegenden Größen der allgemeinen Relativitätstheorie (z.B. die Metrik der Raumzeit, Christoffel Symbole, Ricci- und Einstein-Tensor) am Beispiel einer allgemeinen statischen und isotropen Raumzeit in Python berechnet. Im entsprechenden Python *Jupyter Notebook* Allgemeine Relativitätstheorie mit Python (EinsteinPy.ipynb) wird das Python Modul EinsteinPy vorgestellt mit dem man die Berechnungen durchführen kann. Das Modul basiert auf dem Modul SymPy, welches symbolische Berechnungen mit Python vereinfacht.

Weiterführende Links





- Folien der 1.Vorlesung
- Vorlesungsaufzeichnung der 1.Vorlesung
- Graphical Remote Login with xrdp
- Einstein - Analen der Physik
- Black Hole Cam - Imaging the event horizon of black holes
- Event Horizon Telescope
- LIGO: Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory
- EinsteinPy - Making Einstein possible in Python
- View Jupyter Notebook: Einführung in Jupyter Notebooks
- Download Jupyter Notebook: Einführung in Jupyter Notebooks
- View Jupyter Notebook: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python
- Download Jupyter Notebook: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

---

Vorlesung 1

In der ersten Vorlesung werden die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie wiederholt und es wird einen kurzen Überblick der Inhalte der gesamten Vorlesung geben. A. Einstein stellte im Jahre 1915 seine revolutionäre allgemeinen Relativitätstheorie der wissenschaftlichen Öffentlichkeit vor. Seine Feldgleichungen leitete er mittels eines allgemeinen Kovarianzprinzips her und in Einstein, A. 1915, Preuss. Akad.Wiss. Berlin, Sitzungsber., 778-786 schrieb er über seine Theorie "Dem Zauber der Theorie wird sich kaum jemand entziehen können, der sie wirklich erfasst hat;...". Die Schönheit der Einstein Gleichung liegt neben ihrem zugrunde liegenden Kovarianzprinzip in der Einfachheit ihrer fundamentalen Aussage. Nach Einstein verbiegt jede Energieansammlung die Struktur der Raumzeit und diese gekrümmte Raumzeit ist der ursächliche Grund der Gravitation. Nach Einstein fällt der Apfel vom Baum zu Boden, da der große Energiegehalt der Erde die raumzeitliche Struktur so stark verbiegt, dass der Apfel sich in dieser gekrümmten Raumzeit nach geodätischen Gesetzen zu Boden bewegen muss.

Es werden im folgenden die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie und im Besonderen die Einsteingleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \;=\; -8\pi\, T_{\mu\nu}$$

und die Geodatengleichung

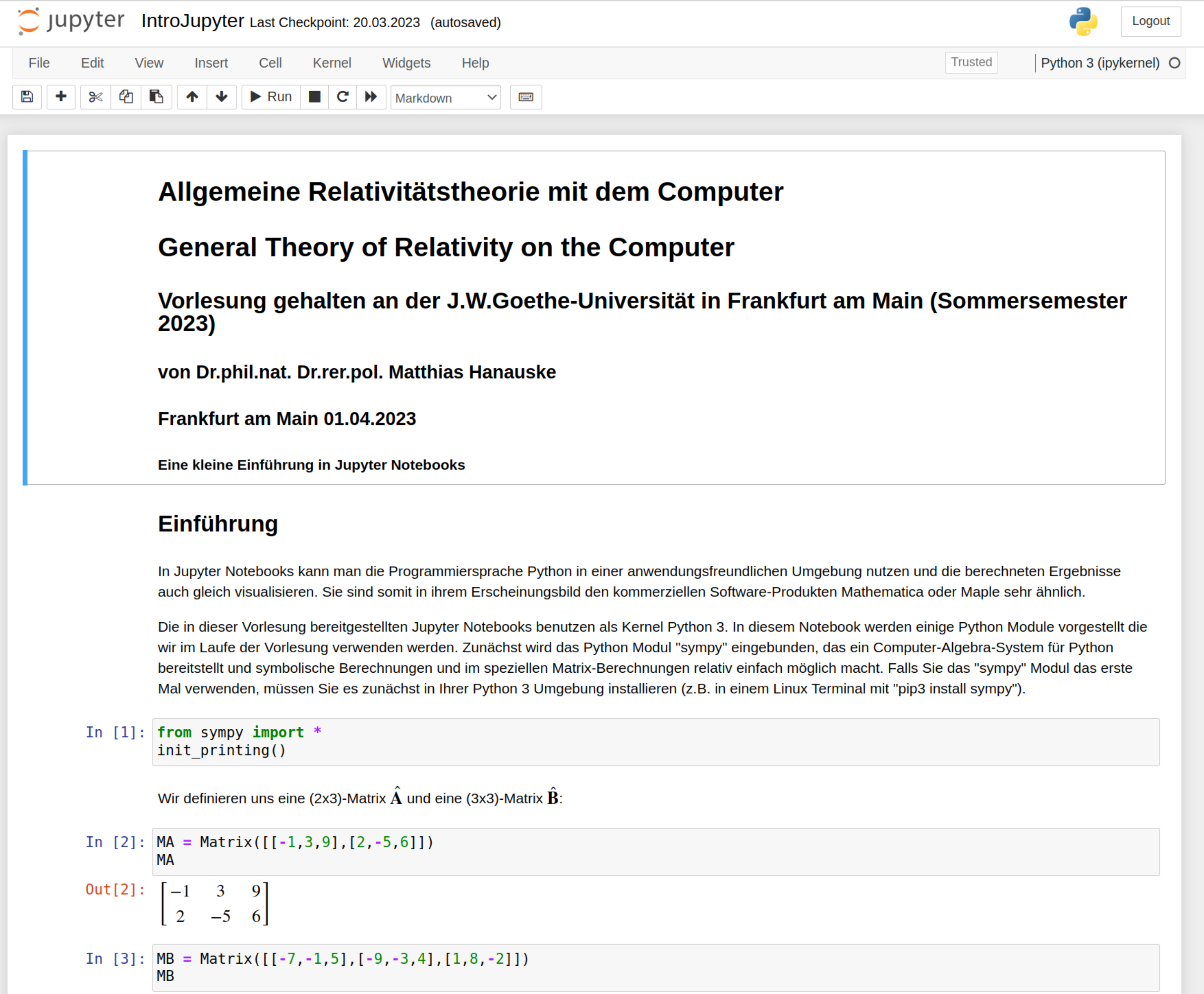
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \;=\; 0$$

als bekannt vorausgesetzt. Die griechischen, raumzeitlichen Indices $\mu, \nu, \rho ...$ laufen von 0..3, wobei, falls nicht anders angegeben, diese den folgenden kartesischen Raumzeitkoordinaten entsprechen: $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, x, y, z)$.

Eine Berechnung der grundlegenden Größen der allgemeinen Relativitätstheorie (z.B. Christoffel Symbole, Ricci- oder Einstein-Tensor) bei vorgegebener Metrik der Raumzeit ist oft zeitaufwendig und rechenintensiv. Computeralgebra-Systeme erleichtern solche tensoriellen Berechnungen und wir werden in dieser Vorlesung 2023 Python Jupyter Notebooks (mit dem Python Modul EinsteinPy) dazu verwenden (siehe linkes Panel dieser Vorlesung).
Wir definieren z.B. die kovariante Metrik einer allgemeinen statischen, isotropen Raumzeit $g_{\mu\nu}$ in Python, wobei wir ein sphärisches Koordinatensystem benutzen.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

, wobei $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$. Dann berechnen wir die die Christoffel Symbole (erster Art $\Gamma_{\mu\nu\rho}$, vollständig kontravariante Form)



Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2023)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 01.04.2023

Eine kleine Einführung in Jupyter Notebooks

Einführung

In Jupyter Notebooks kann man die Programmiersprache Python in einer anwendungsfreundlichen Umgebung nutzen und die berechneten Ergebnisse auch gleich visualisieren. Sie sind somit in ihrem Erscheinungsbild den kommerziellen Software-Produkten Mathematica oder Maple sehr ähnlich.

Die in dieser Vorlesung bereitgestellten Jupyter Notebooks benutzen als Kernel Python 3. In diesem Notebook werden einige Python Module vorgestellt die wir im Laufe der Vorlesung verwenden werden. Zunächst wird das Python Modul "sympy" eingebunden, das ein Computer-Algebra-System für Python bereitstellt und symbolische Berechnungen und im speziellen Matrix-Berechnungen relativ einfach möglich macht. Falls Sie das "sympy" Modul das erste Mal verwenden, müssen Sie es zunächst in Ihrer Python 3 Umgebung installieren (z.B. in einem Linux Terminal mit "pip3 install sympy").

In [1]:
```
from sympy import *
init_printing()
```

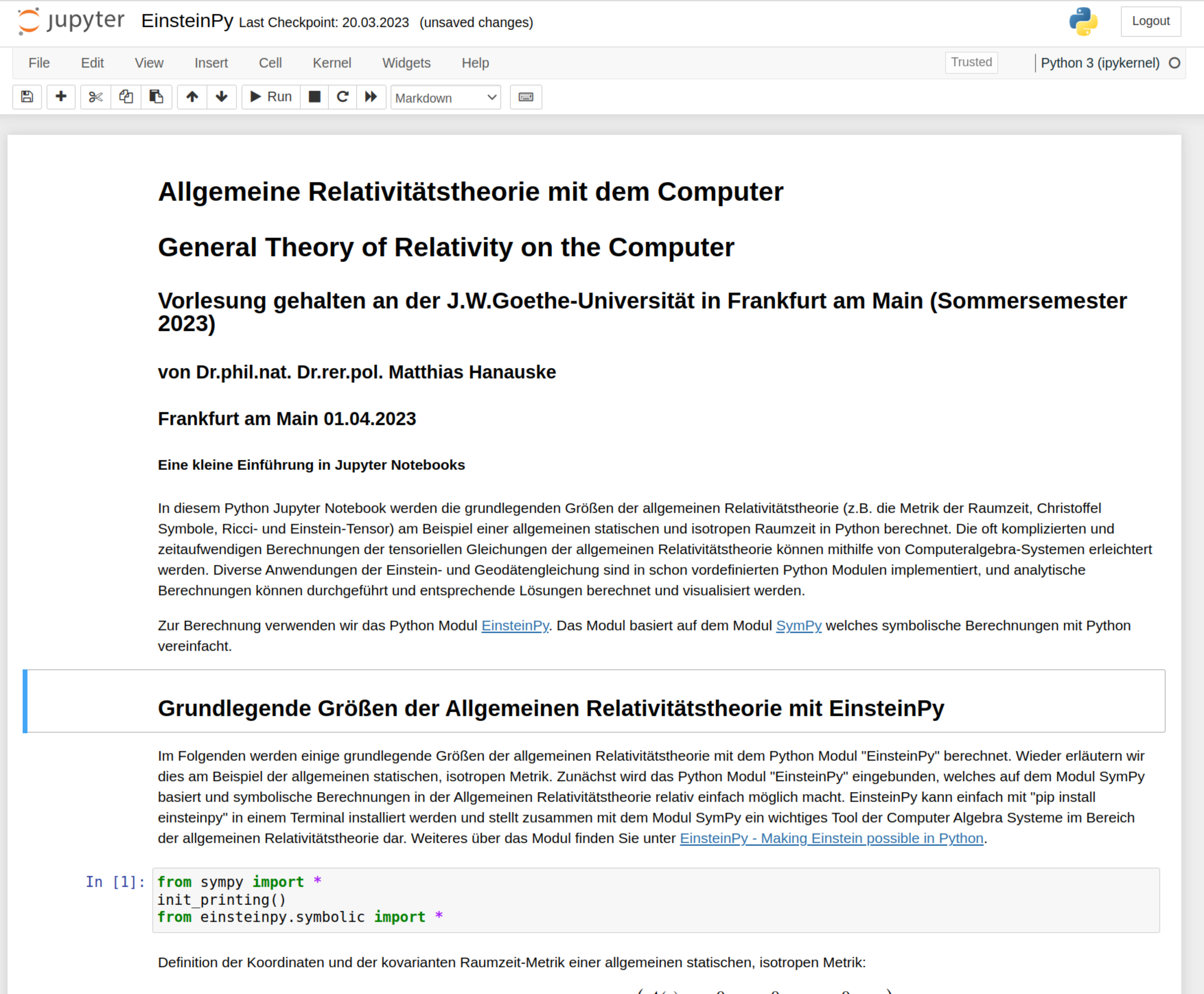
Wir definieren uns eine (2x3)-Matrix $\hat{\mathbf{A}}$ und eine (3x3)-Matrix $\hat{\mathbf{B}}$:

In [2]:
```
MA = Matrix([[-1,3,9],[2,-5,6]])
MA
```

Out[2]:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

In [3]:
```
MB = Matrix([[-7,-1,5],[-9,-3,4],[1,8,-2]])
MB
```



Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2023)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 01.04.2023

Eine kleine Einführung in Jupyter Notebooks

In diesem Python Jupyter Notebook werden die grundlegenden Größen der allgemeinen Relativitätstheorie (z.B. die Metrik der Raumzeit, Christoffel Symbole, Ricci- und Einstein-Tensor) am Beispiel einer allgemeinen statischen und isotropen Raumzeit in Python berechnet. Die oft komplizierten und zeitaufwendigen Berechnungen der tensoriellen Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie können mithilfe von Computeralgebra-Systemen erleichtert werden. Diverse Anwendungen der Einstein- und Geodätengleichung sind in schon vordefinierten Python Modulen implementiert, und analytische Berechnungen können durchgeführt und entsprechende Lösungen berechnet und visualisiert werden.

Zur Berechnung verwenden wir das Python Modul EinsteinPy. Das Modul basiert auf dem Modul SymPy welches symbolische Berechnungen mit Python vereinfacht.

Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie mit EinsteinPy

Im Folgenden werden einige grundlegende Größen der allgemeinen Relativitätstheorie mit dem Python Modul "EinsteinPy" berechnet. Wieder erläutern wir dies am Beispiel der allgemeinen statischen, isotropen Metrik. Zunächst wird das Python Modul "EinsteinPy" eingebunden, welches auf dem Modul SymPy basiert und symbolische Berechnungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie relativ einfach möglich macht. EinsteinPy kann einfach mit "pip install einsteinpy" in einem Terminal installiert werden und stellt zusammen mit dem Modul SymPy ein wichtiges Tool der Computer Algebra Systeme im Bereich der allgemeinen Relativitätstheorie dar. Weiteres über das Modul finden Sie unter EinsteinPy - Making Einstein possible in Python.

In [1]:

```
from sympy import *
init_printing()
from einsteinpy.symbolic import *
```

Definition der Koordinaten und der kovarianten Raumzeit-Metrik einer allgemeinen statischen, isotropen Metrik:

Jupyter Notebook

Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 04.04.2021

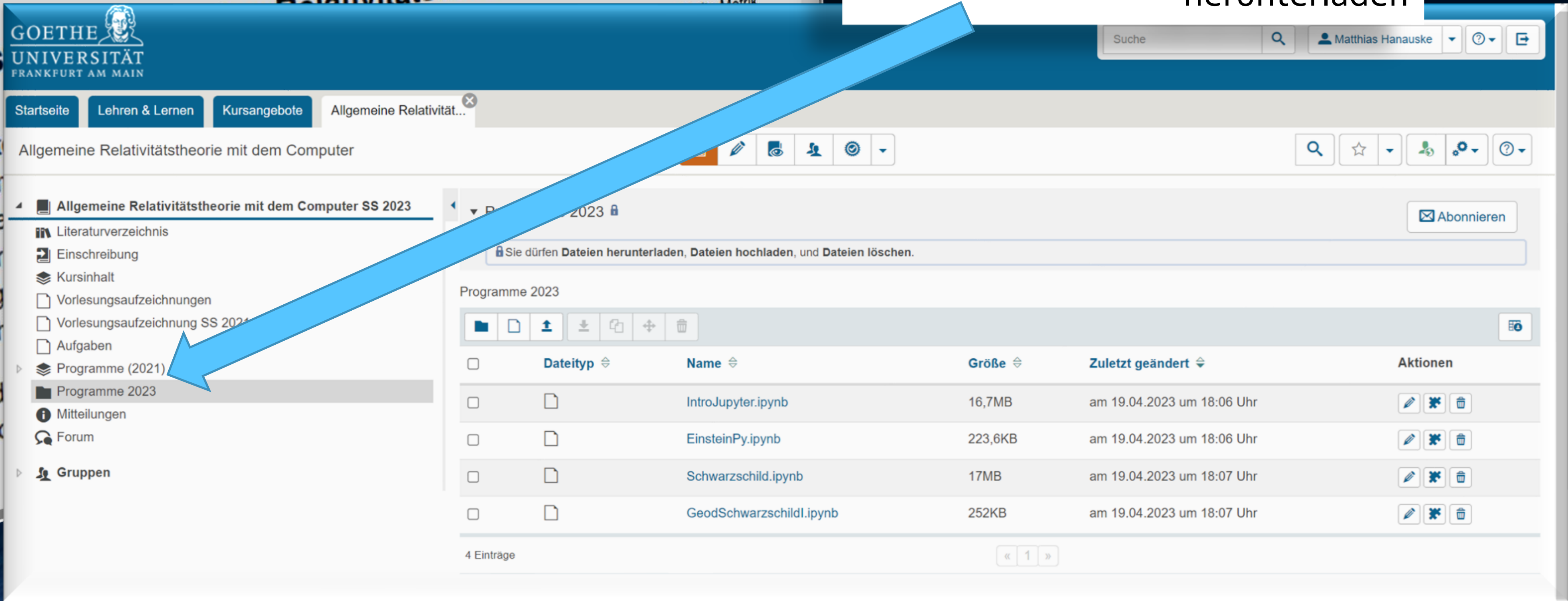
Relativitätstheorie mit Python

Erster Vorlesungs

In diesem Python Jupyter Not
der Raumzeit, Christoffel Sym
Raumzeit in Python berechne
allgemeinen Relativitätstheor
der Einstein- und Geodäteng
Berechnungen können durch

Es werden zwei unterschied
durchführen kann. Beide M
vereinfacht.

Auf der OLAT Seite des Kurses können Sie die Jupyter Notebooks herunterladen



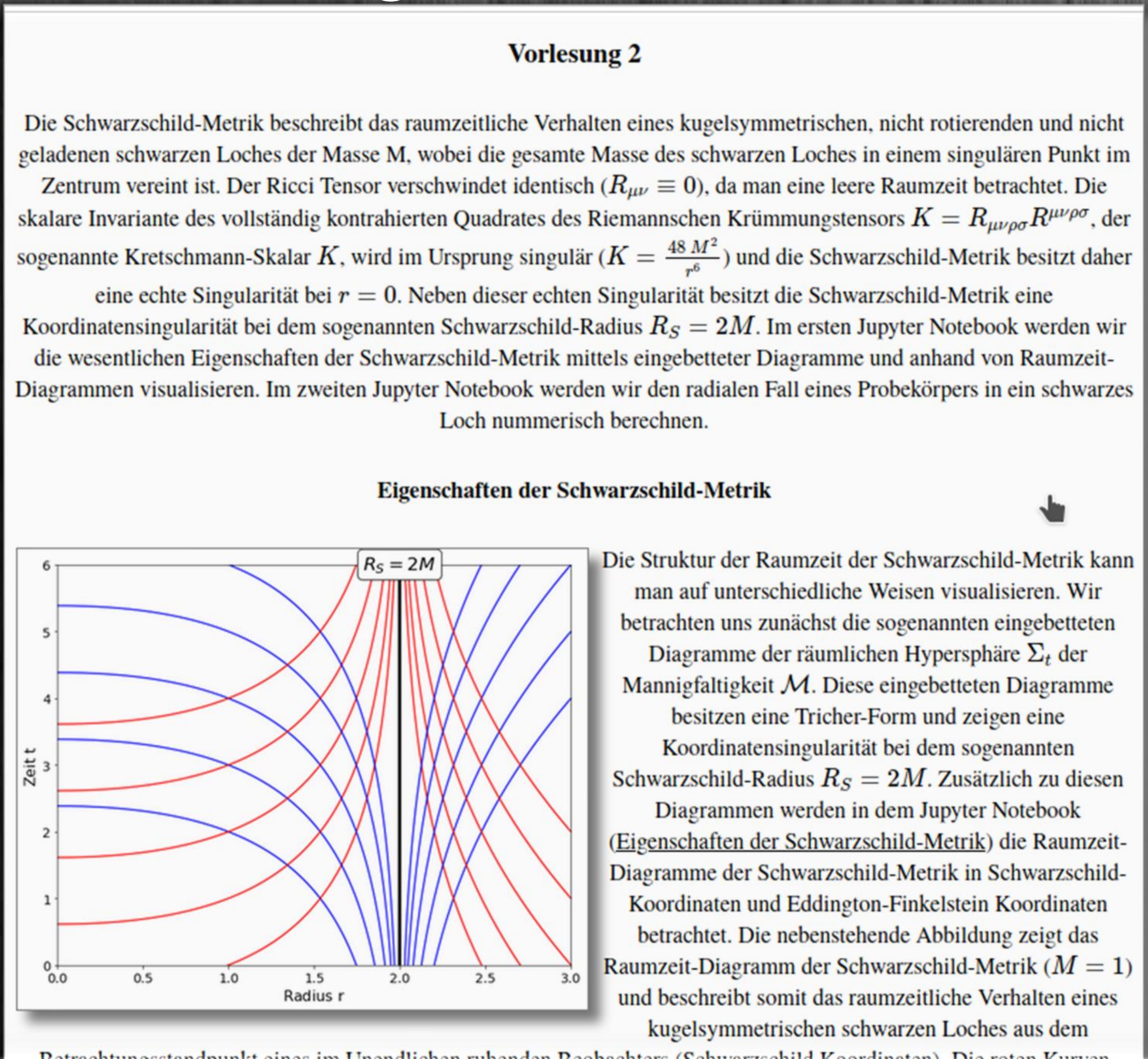
Sie dürfen **Dateien herunterladen**, **Dateien hochladen**, und **Dateien löschen**.

☐	Dateityp	Name	Größe	Zuletzt geändert
☐		IntroJupyter.ipynb	16,7MB	am 19.04.2023 um 18:06 Uhr
☐		EinsteinPy.ipynb	223,6KB	am 19.04.2023 um 18:06 Uhr
☐		Schwarzschild.ipynb	17MB	am 19.04.2023 um 18:07 Uhr
☐		GeodSchwarzschildI.ipynb	252KB	am 19.04.2023 um 18:07 Uhr

4 Einträge

2. Vorlesung

http://itp.uni-frankfurt/~hanauske/VARTC/VARTC2023.html

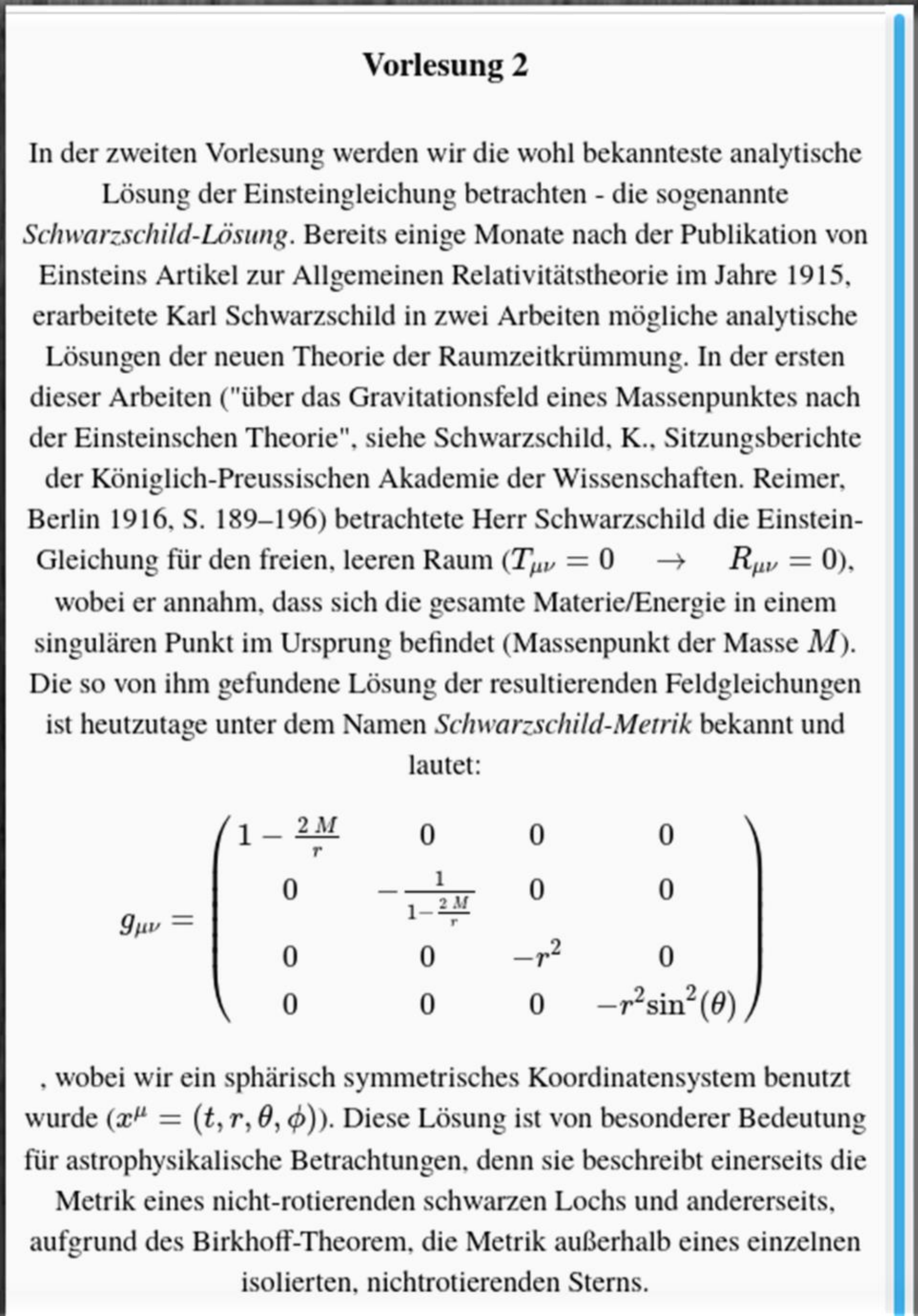


Vorlesung 2

Die Schwarzschild-Metrik beschreibt das raumzeitliche Verhalten eines kugelsymmetrischen, nicht rotierenden und nicht geladenen schwarzen Loches der Masse M, wobei die gesamte Masse des schwarzen Loches in einem singulären Punkt im Zentrum vereint ist. Der Ricci Tensor verschwindet identisch ($R_{\mu\nu} \equiv 0$), da man eine leere Raumzeit betrachtet. Die skalare Invariante des vollständig kontrahierten Quadrates des Riemannschen Krümmungstensors $K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$, der sogenannte Kretschmann-Skalar K, wird im Ursprung singulär ($K = \frac{48\,M^2}{r^6}$) und die Schwarzschild-Metrik besitzt daher eine echte Singularität bei $r = 0$. Neben dieser echten Singularität besitzt die Schwarzschild-Metrik eine Koordinatensingularität bei dem sogenannten Schwarzschild-Radius $R_S = 2M$. Im ersten Jupyter Notebook werden wir die wesentlichen Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik mittels eingebetteter Diagramme und anhand von Raumzeit-Diagrammen visualisieren. Im zweiten Jupyter Notebook werden wir den radialen Fall eines Probekörpers in ein schwarzes Loch nummerisch berechnen.

Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik

Die Struktur der Raumzeit der Schwarzschild-Metrik kann man auf unterschiedliche Weisen visualisieren. Wir betrachten uns zunächst die sogenannten eingebetteten Diagramme der räumlichen Hypersphäre Σ_t der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Diese eingebetteten Diagramme besitzen eine Tricher-Form und zeigen eine Koordinatensingularität bei dem sogenannten Schwarzschild-Radius $R_S = 2M$. Zusätzlich zu diesen Diagrammen werden in dem Jupyter Notebook (Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik) die Raumzeit-Diagramme der Schwarzschild-Metrik in Schwarzschild-Koordinaten und Eddington-Finkelstein Koordinaten betrachtet. Die nebenstehende Abbildung zeigt das Raumzeit-Diagramm der Schwarzschild-Metrik ($M = 1$) und beschreibt somit das raumzeitliche Verhalten eines kugelsymmetrischen schwarzen Loches aus dem Betrachtungsstandpunkt eines im Unendlichen ruhenden Beobachters (Schwarzschild-Koordinaten). Die roten Kurven



Vorlesung 2

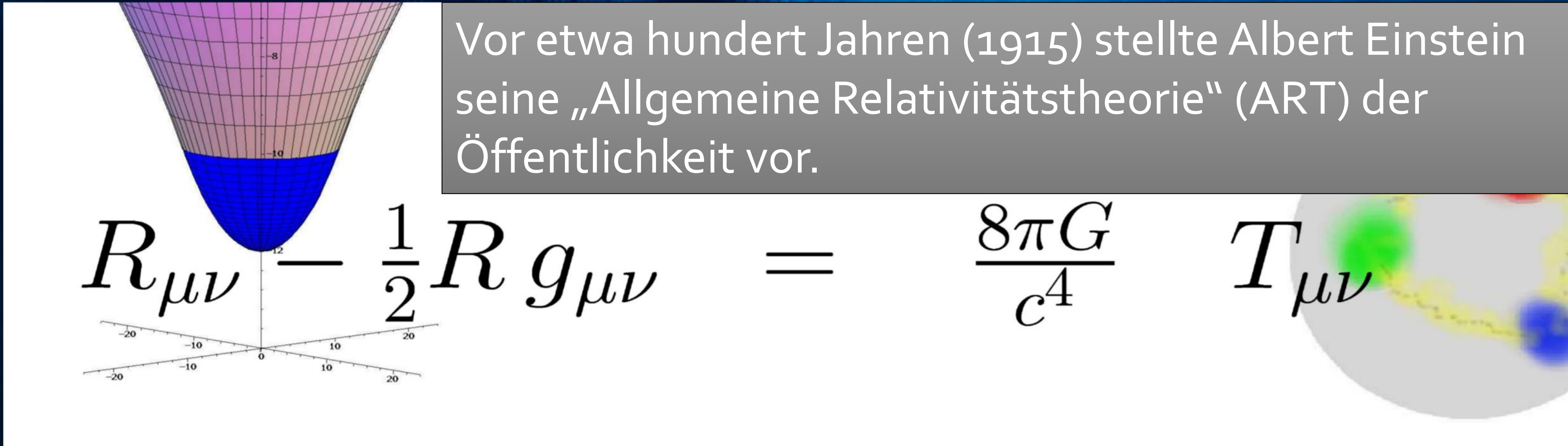
In der zweiten Vorlesung werden wir die wohl bekannteste analytische Lösung der Einsteingleichung betrachten - die sogenannte *Schwarzschild-Lösung*. Bereits einige Monate nach der Publikation von Einsteins Artikel zur Allgemeinen Relativitätstheorie im Jahre 1915, erarbeitete Karl Schwarzschild in zwei Arbeiten mögliche analytische Lösungen der neuen Theorie der Raumzeitkrümmung. In der ersten dieser Arbeiten ("über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie", siehe Schwarzschild, K., Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften. Reimer, Berlin 1916, S. 189–196) betrachtete Herr Schwarzschild die Einstein-Gleichung für den freien, leeren Raum ($T_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{\mu\nu} = 0$), wobei er annahm, dass sich die gesamte Materie/Energie in einem singulären Punkt im Ursprung befindet (Massenpunkt der Masse M). Die so von ihm gefundene Lösung der resultierenden Feldgleichungen ist heutzutage unter dem Namen *Schwarzschild-Metrik* bekannt und lautet:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\,M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1-\frac{2\,M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

, wobei wir ein sphärisch symmetrisches Koordinatensystem benutzt wurde ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$). Diese Lösung ist von besonderer Bedeutung für astrophysikalische Betrachtungen, denn sie beschreibt einerseits die Metrik eines nicht-rotierenden schwarzen Lochs und andererseits, aufgrund des Birkhoff-Theorem, die Metrik außerhalb eines einzelnen isolierten, nichtrotierenden Sterns.

Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Vor etwa hundert Jahren (1915) stellte Albert Einstein seine „Allgemeine Relativitätstheorie“ (ART) der Öffentlichkeit vor.



$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Die ART ist eine sehr revolutionäre Theorie. Sie besagt, dass jegliche Energieformen (z.B. Masse eines Körpers) die „Raumzeit“ verbiegen und durch diese Krümmung des Raumes und der Zeit die Gravitation (Schwerkraft) resultiert. -> Raumzeit-Krümmung = Energie

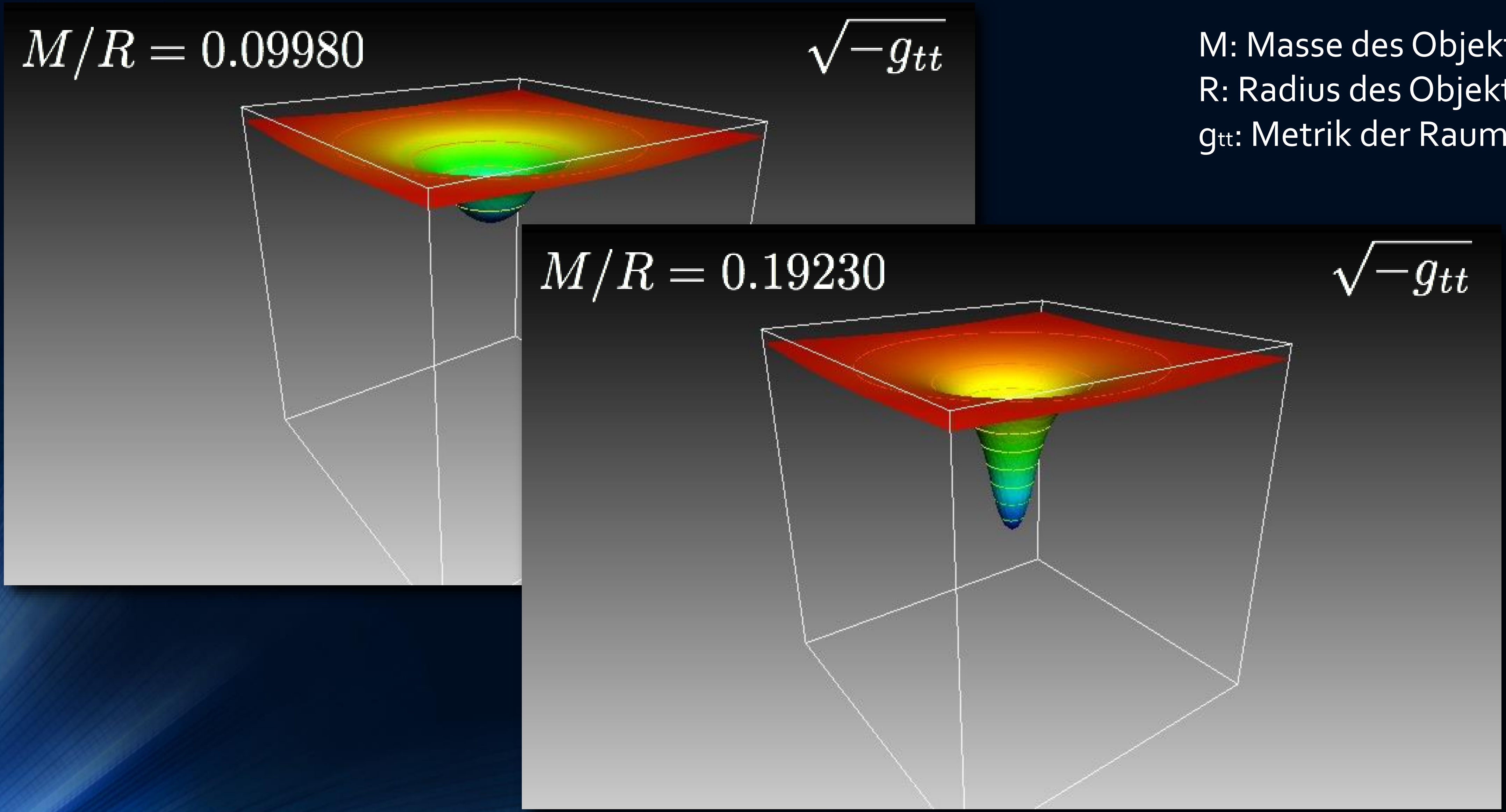
Die Schwarzschild Lösung

1915 Einsteins Gravitation:
Krümmung der „Raumzeit"

1916 Karl Schwarzschild:
… geboren 1873 in Frankfurt nahe dem Haus der Rothschild's. Erste Lösung der ART – drei Monate nach Einsteins Artikel! Aussenraummetrik eines nichtrotierenden schwarzen Loches.

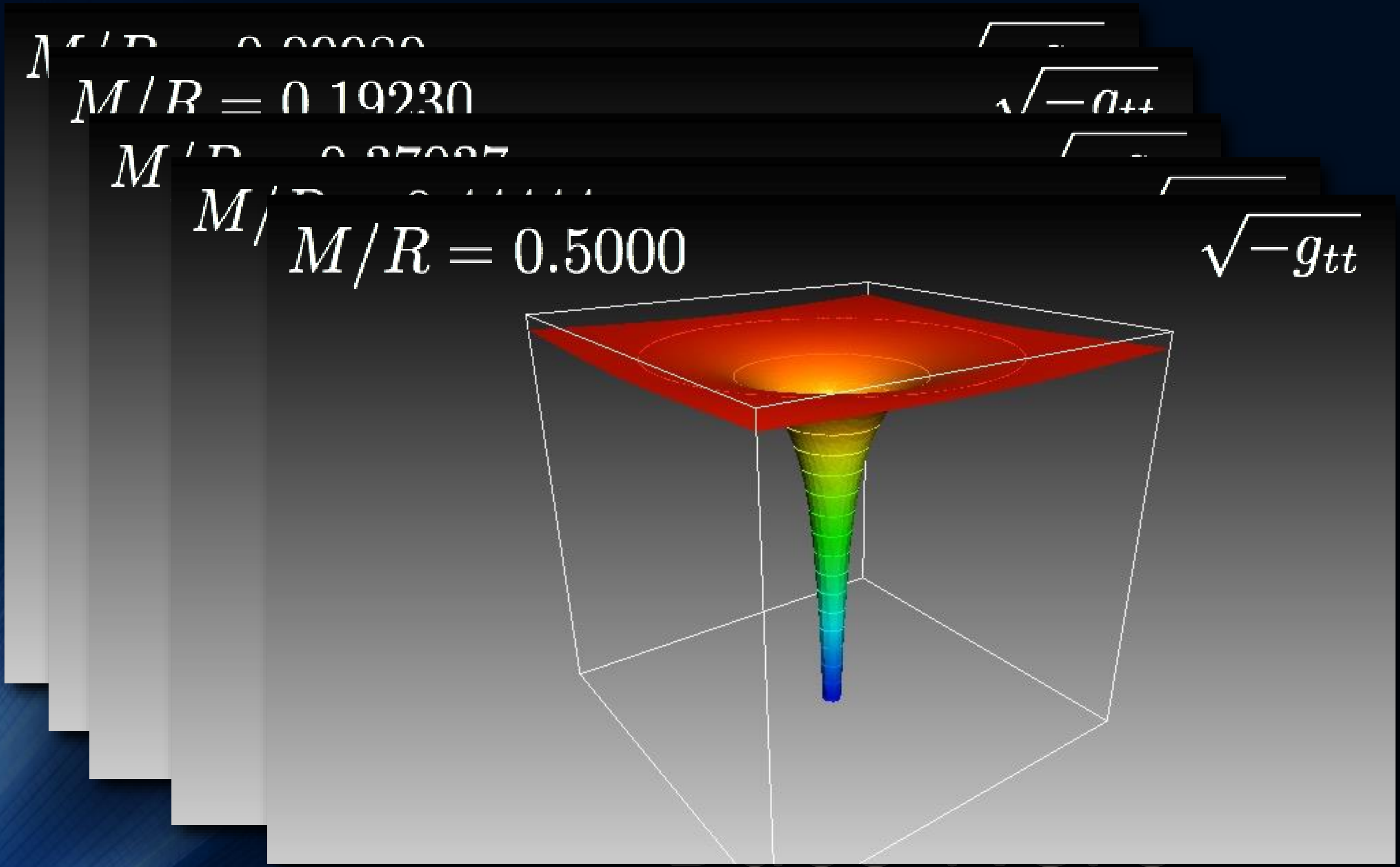
Schwarzschild stirbt einen Monat später an einer Infektion die er sich an der russischen Front einfing…

Schwarze Löcher und der Raumzeit-Trichter



M: Masse des Objektes
R: Radius des Objektes
g_{tt}: Metrik der Raumzeit

Schwarze Löcher und der Raumzeit-Trichter



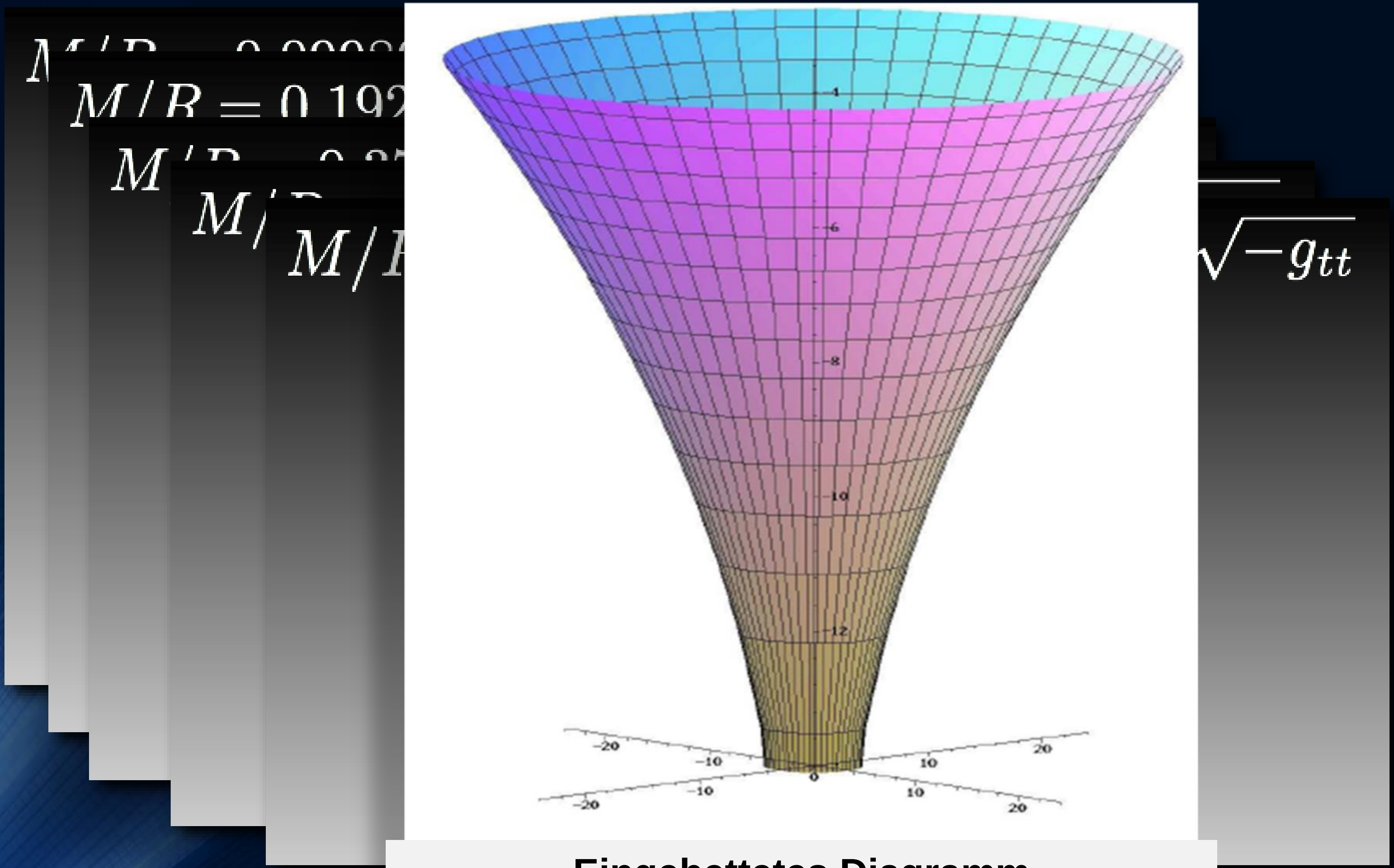
M: Masse des Objektes
R: Radius des Objektes
g_{tt}: Metrik der Raumzeit

Wir sind über den Grenzwert gekommen und haben ein schwarzes Loch erzeugt!

Grenzwert der Krümmung: Stabile Objekte (Neutronensterne) sind nicht mehr möglich

Schwarze Löcher und der Raumzeit-Trichter

M: Masse des Objektes
R: Radius des Objektes
g_{tt}: Metrik der Raumzeit

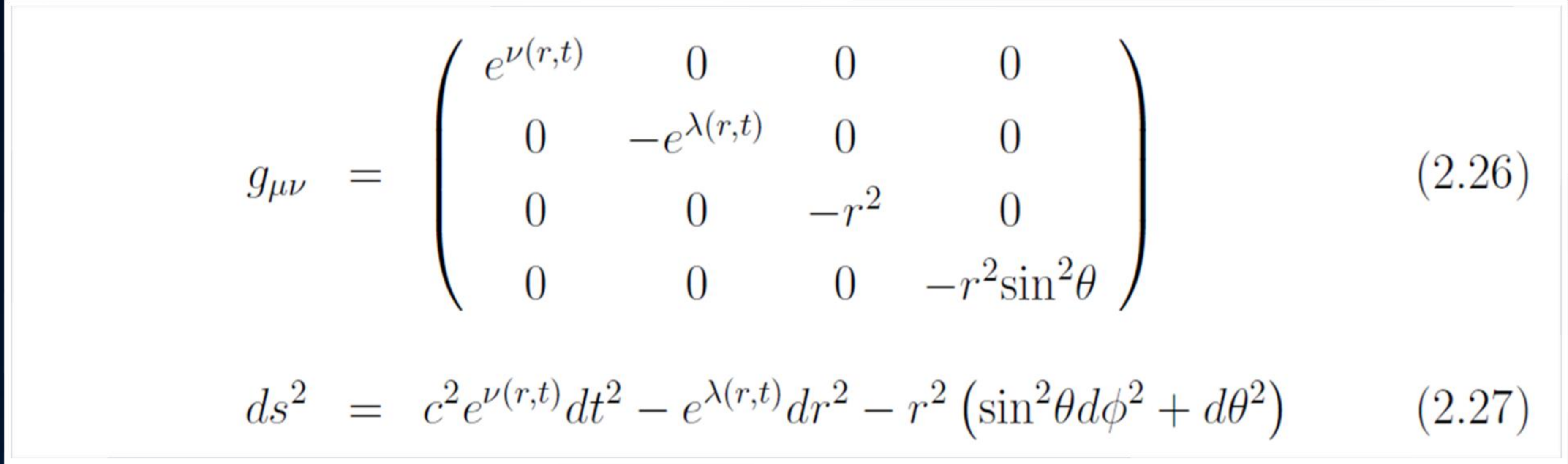


Eingebettetes Diagramm der räumlichen Hypersphäre der Raumzeit-Struktur eines schwarzen Lochs

Wir sind über den Grenzwert gekommen und haben ein schwarzes Loch erzeugt!

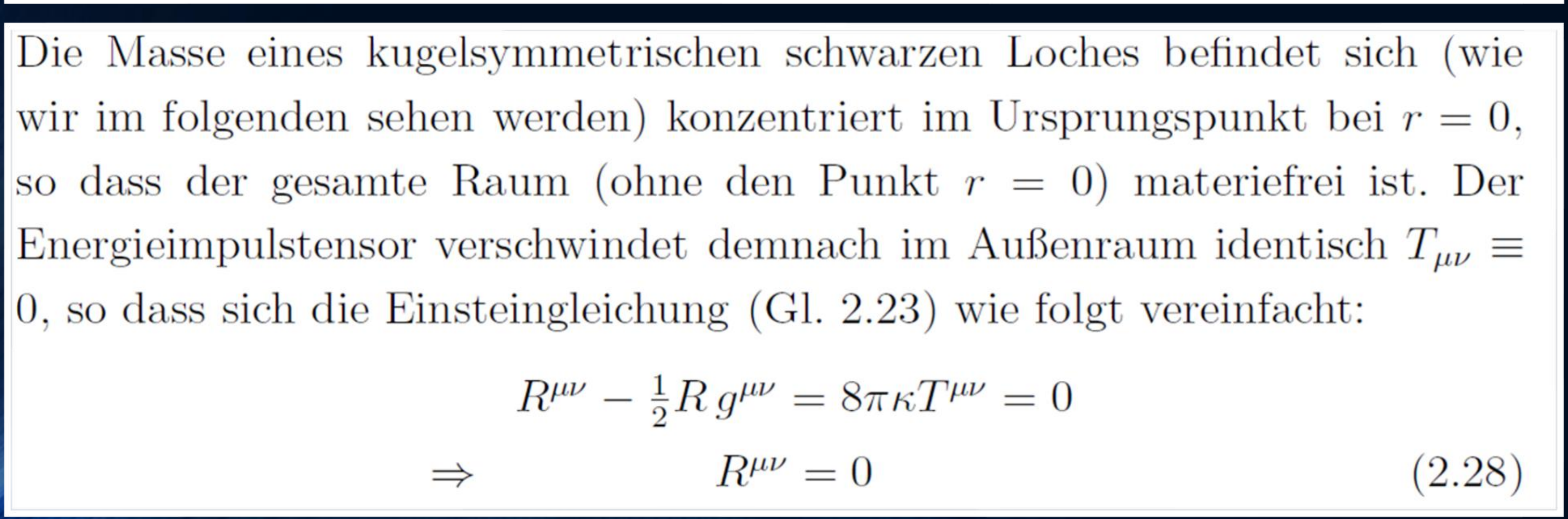
Grenzwert der Krümmung … nd nicht mehr möglich

Herleitung der Schwarzschild Metrik



$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

$$ds^2 = c^2 e^{\nu(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 \left(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2\right) \tag{2.27}$$

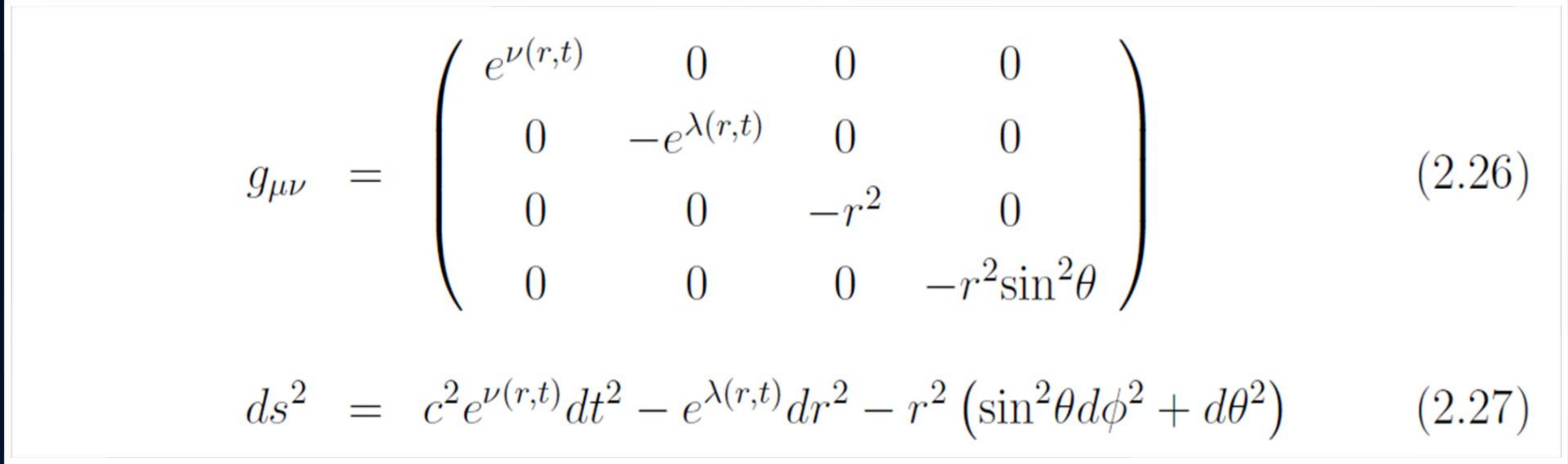


Die Masse eines kugelsymmetrischen schwarzen Loches befindet sich (wie wir im folgenden sehen werden) konzentriert im Ursprungspunkt bei $r = 0$, so dass der gesamte Raum (ohne den Punkt $r = 0$) materiefrei ist. Der Energieimpulstensor verschwindet demnach im Außenraum identisch $T_{\mu\nu} \equiv 0$, so dass sich die Einsteingleichung (Gl. 2.23) wie folgt vereinfacht:

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g^{\mu\nu} = 8\pi\kappa T^{\mu\nu} = 0$$

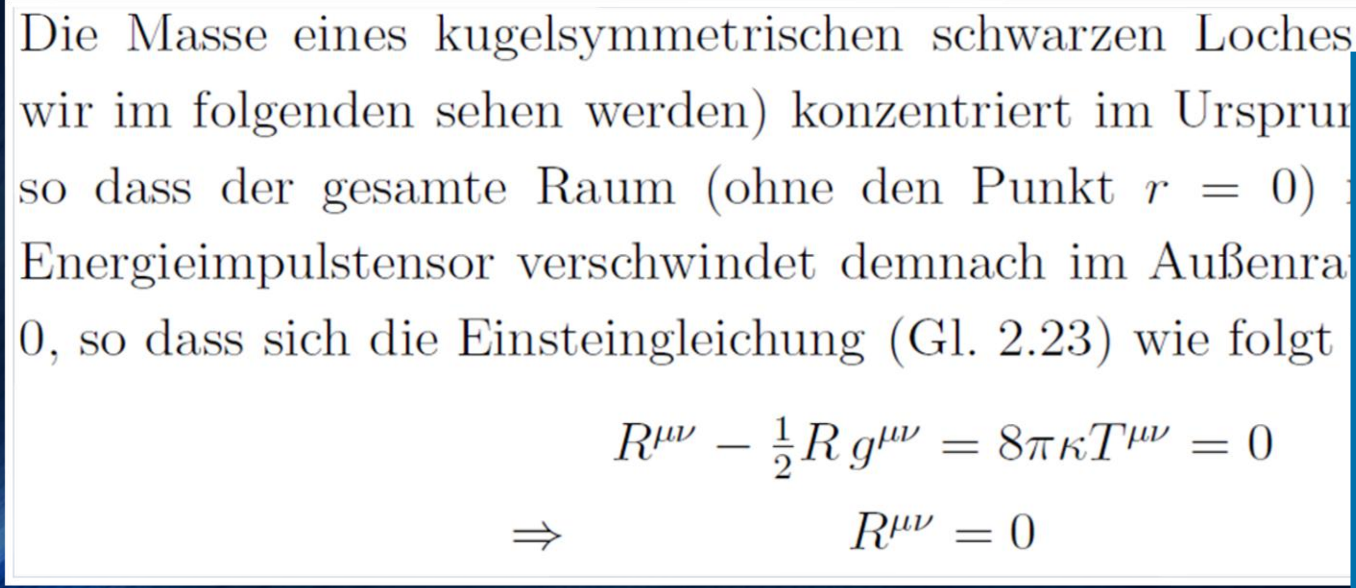
$$\Rightarrow \qquad R^{\mu\nu} = 0 \tag{2.28}$$

Herleitung der Schwarzschild Metrik



$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (2.26)$$

$$ds^2 = c^2 e^{\nu(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 \left(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2\right) \qquad (2.27)$$



Die Masse eines kugelsymmetrischen schwarzen Loches befindet sich (wie
wir im folgenden sehen werden) konzentriert im Ursprun
so dass der gesamte Raum (ohne den Punkt $r = 0$)
Energieimpulstensor verschwindet demnach im Außenra
0, so dass sich die Einsteingleichung (Gl. 2.23) wie folgt

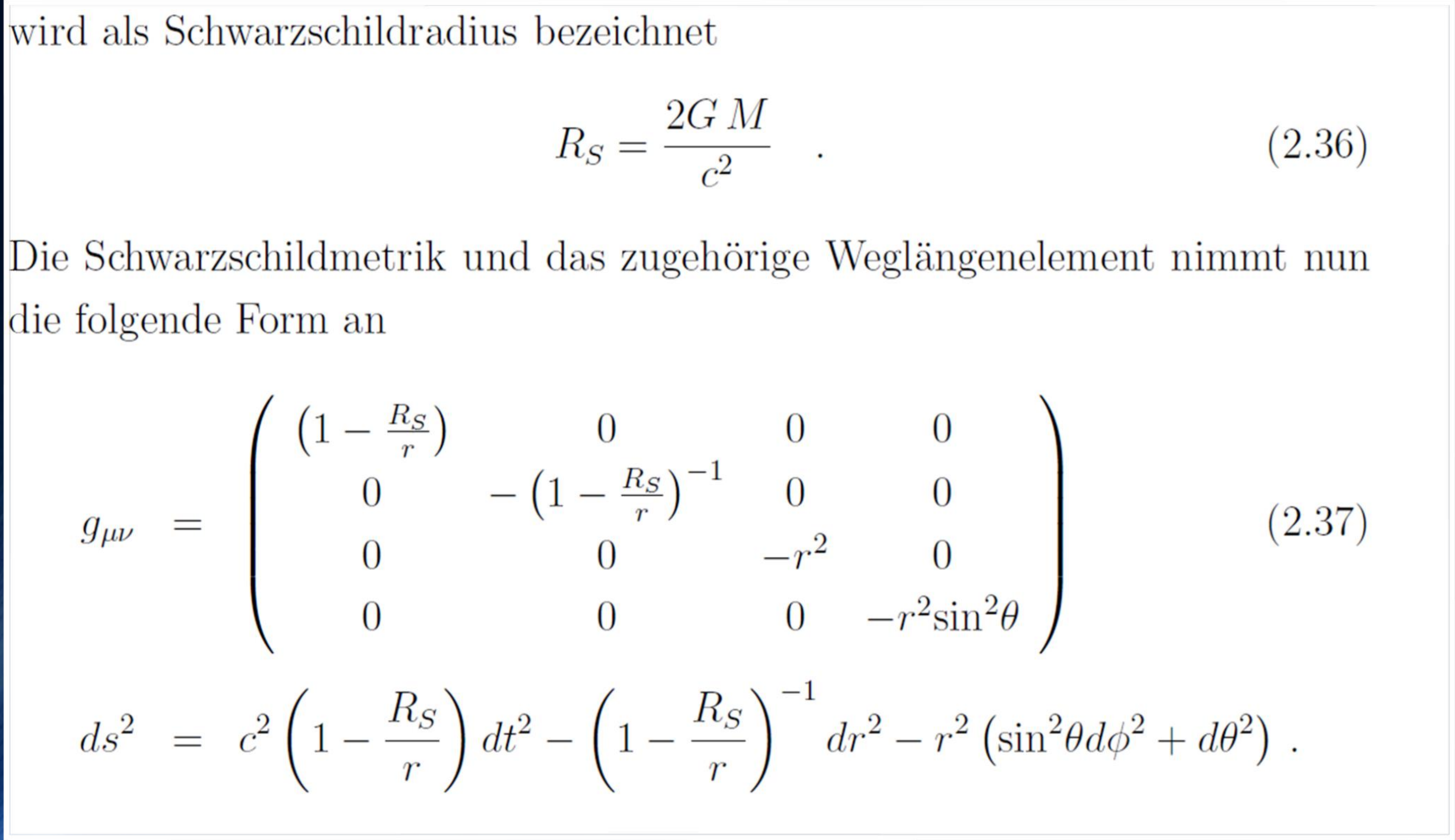
$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g^{\mu\nu} = 8\pi\kappa T^{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad R^{\mu\nu} = 0$$

Setzt man diesen sphärisch symmetrischen Ansatz der Metrik in die Einsteingleichung ein, so erkennt man das die Lösung zeitunabhängig sein muss (Birkhoff-Theorem).

Diese Lösung wird als Schwarzschild-metrik bezeichnet und sie hängt nur von einem Parameter, der Masse des schwarzen Loches, ab

Herleitung der Schwarzschild Metrik



wird als Schwarzschildradius bezeichnet

$$R_S = \frac{2G\,M}{c^2} \quad . \tag{2.36}$$

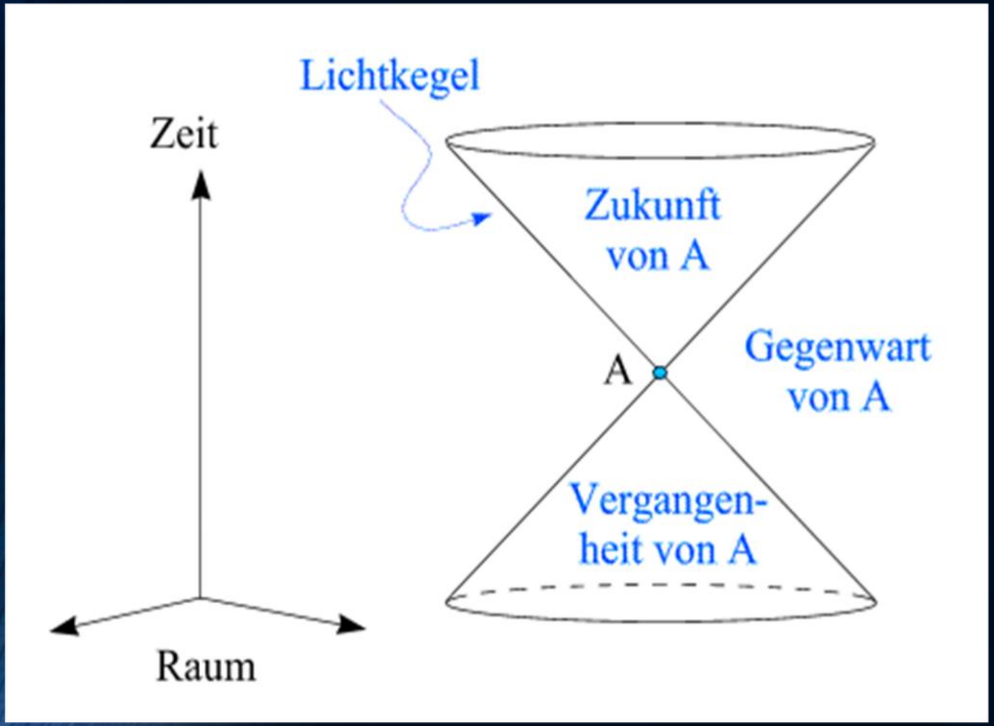
Die Schwarzschildmetrik und das zugehörige Weglängenelement nimmt nun die folgende Form an

$$g_{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} \left(1-\frac{R_S}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

$$ds^2 \;=\; c^2\left(1-\frac{R_S}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2\left(\sin^2\theta d\phi^2+d\theta^2\right) \ .$$

Raumzeit-Diagramm eines schwarzen Loches

Sichtweise ruhender Beobachter im Unendlichen



Raumzeit-Struktur im flachen Raum

Ereignishorizont

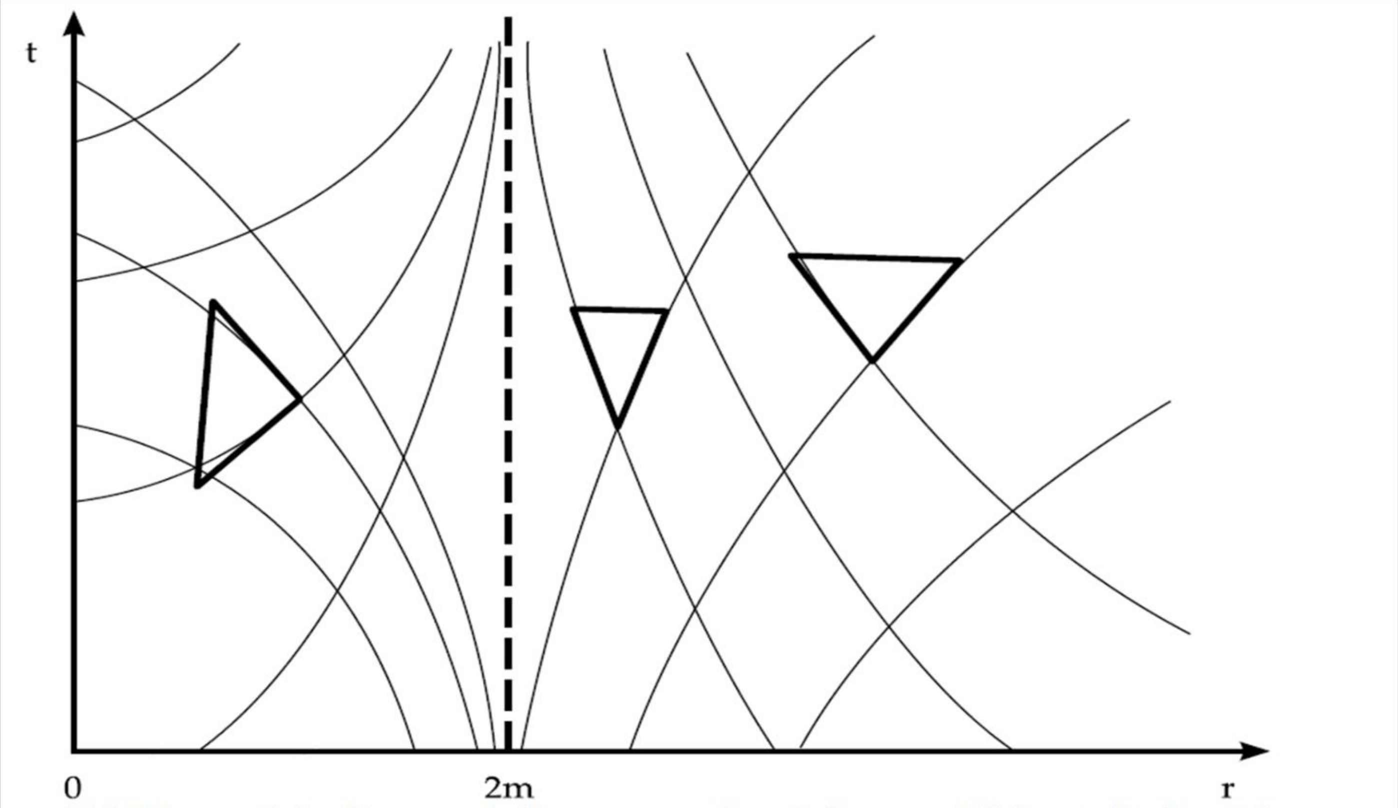


Abbildung 2.1: Raumzeitdiagramm der Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten.

Raumzeit-Struktur um ein schwarzes Loch

Raumzeit-Diagramm eines schwarzen Loches

Sichtweise eines in das schwarze Loch fallenden Beobachters

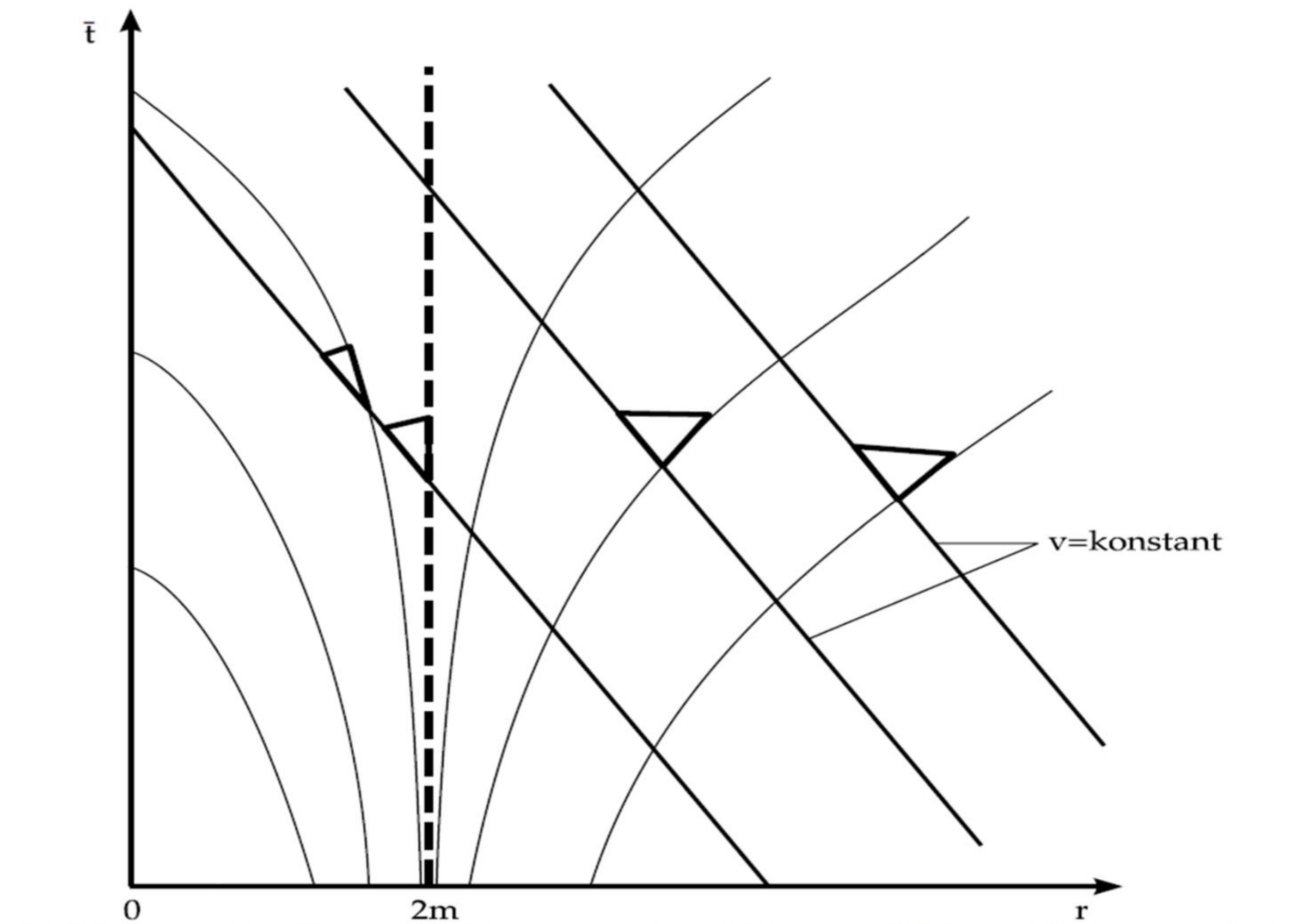


Abbildung 2.2: Raumzeitdiagramm der Schwarzschildmetrik in avancierten Eddington-Finkelstein Koordinaten.

Raumzeit-Diagramm eines schwarzen Loches

Sichtweise eines in das schwarze Loch fallenden Beobachters

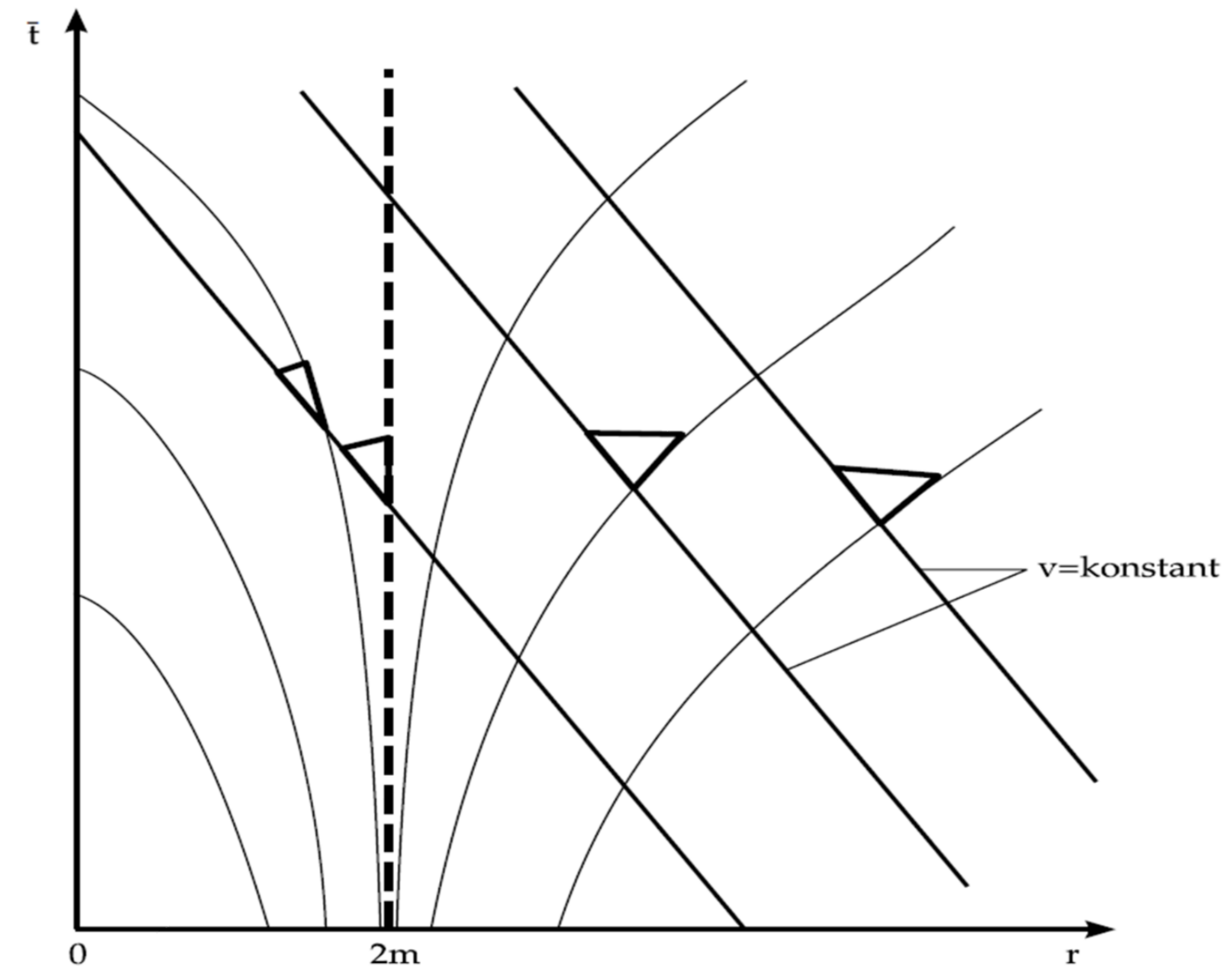


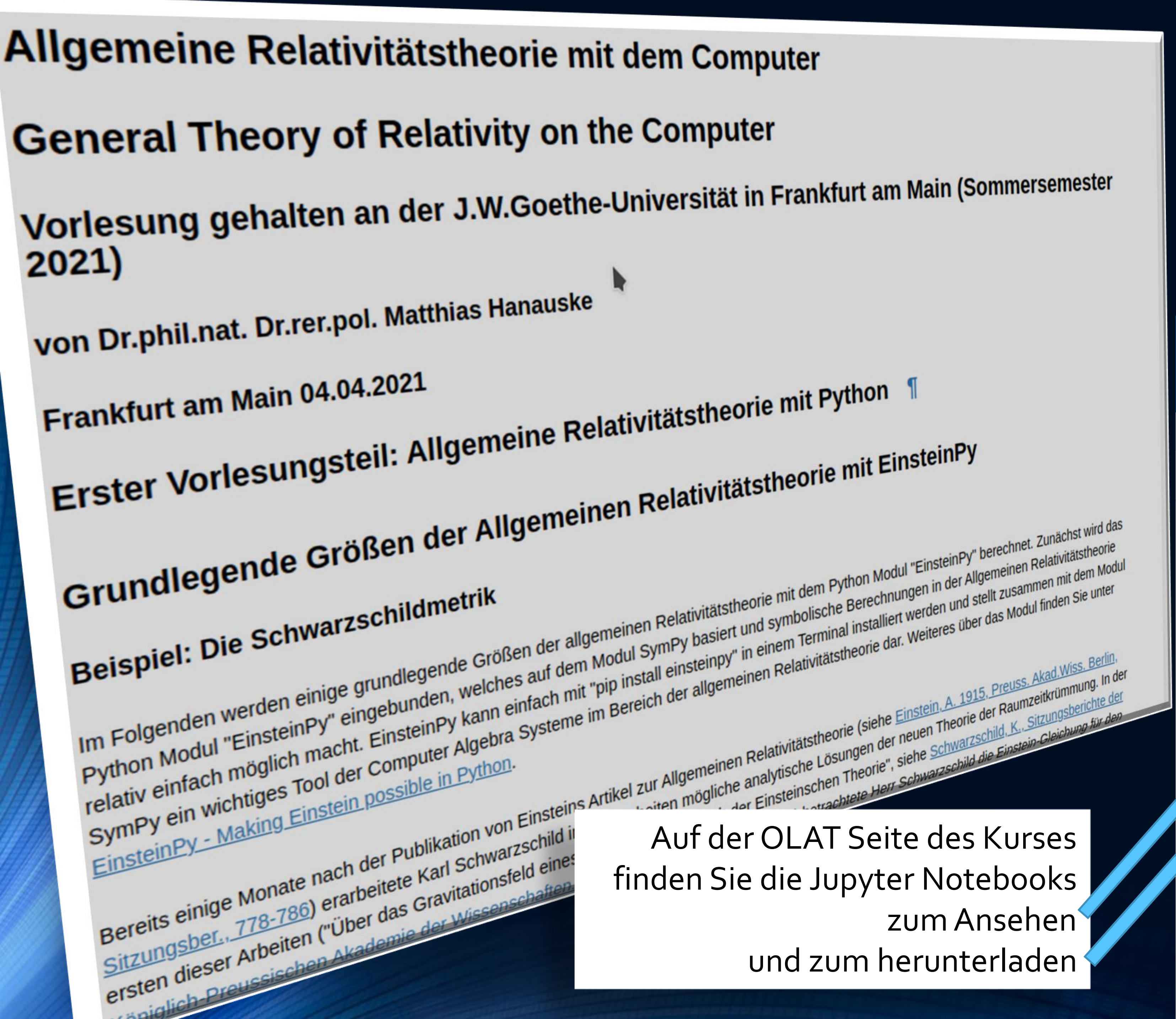
Abbildung 2.2: Raumzeitdiagramm der Schwarzschildmetrik in avancierten Eddington-Finkelstein Koordinaten.

Der Tod und die Theorie der schwarzen Löcher

Die theoretischen Eigenschaften von schwarzen Löchern werden manchmal mit dem Tod verglichen. Die sterbende Person/Seele übertritt die Grenze des irdischen Lebens (Ereignishorizont) und nach diesem Überscheiten gibt es keine Möglichkeit mehr Informationen in den äußeren, irdischen Bereich zu übermitteln. Für den äußeren Beobachter (die Mitmenschen, die seinen Tod erleben) friert das Bild seines klinisch toten Körpers ein und als lebender Mensch hat man keine Möglichkeit Informationen aus dem Jenseits (innerer Bereich des schwarzen Lochs) zu empfangen - dies ist nur möglich, wenn man selbst stirbt und die Grenze des Ereignishorizontes übertritt.

Jupyter Notebook

Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik



Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 04.04.2021

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python ¶

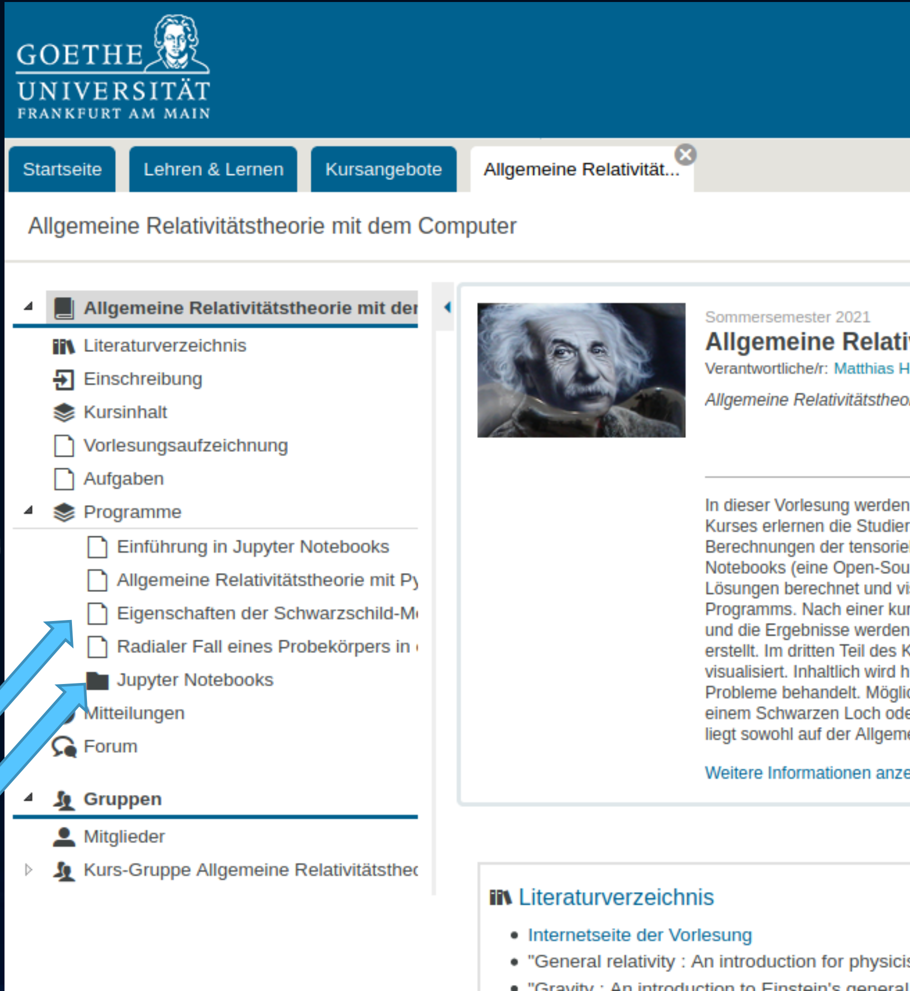
Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie mit EinsteinPy

Beispiel: Die Schwarzschildmetrik

Im Folgenden werden einige grundlegende Größen der allgemeinen Relativitätstheorie mit dem Python Modul "EinsteinPy" berechnet. Zunächst wird das Python Modul "EinsteinPy" eingebunden, welches auf dem Modul SymPy basiert und symbolische Berechnungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie relativ einfach möglich macht. EinsteinPy kann einfach mit "pip install einsteinpy" in einem Terminal installiert werden und stellt zusammen mit dem Modul SymPy ein wichtiges Tool der Computer Algebra Systeme im Bereich der allgemeinen Relativitätstheorie dar. Weiteres über das Modul finden Sie unter EinsteinPy - Making Einstein possible in Python.

Bereits einige Monate nach der Publikation von Einsteins Artikel zur Allgemeinen Relativitätstheorie (siehe Einstein, A. 1915, Preuss. Akad.Wiss. Berlin,
Sitzungsber., 778-786) erarbeitete Karl Schwarzschild i
ersten dieser Arbeiten ("Über das Gravitationsfeld eines
Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften

Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum herunterladen



Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Sommersemester 2021

Allgemeine Relati

Verantwortliche/r: Matthias H

Allgemeine Relativitätstheo

In dieser Vorlesung werden
Kurses erlernen die Studier
Berechnungen der tensorie
Notebooks (eine Open-Sou
Lösungen berechnet und vi
Programms. Nach einer kur
und die Ergebnisse werden
erstellt. Im dritten Teil des K
visualisiert. Inhaltlich wird h
Probleme behandelt. Möglic
einem Schwarzen Loch ode
liegt sowohl auf der Allgeme

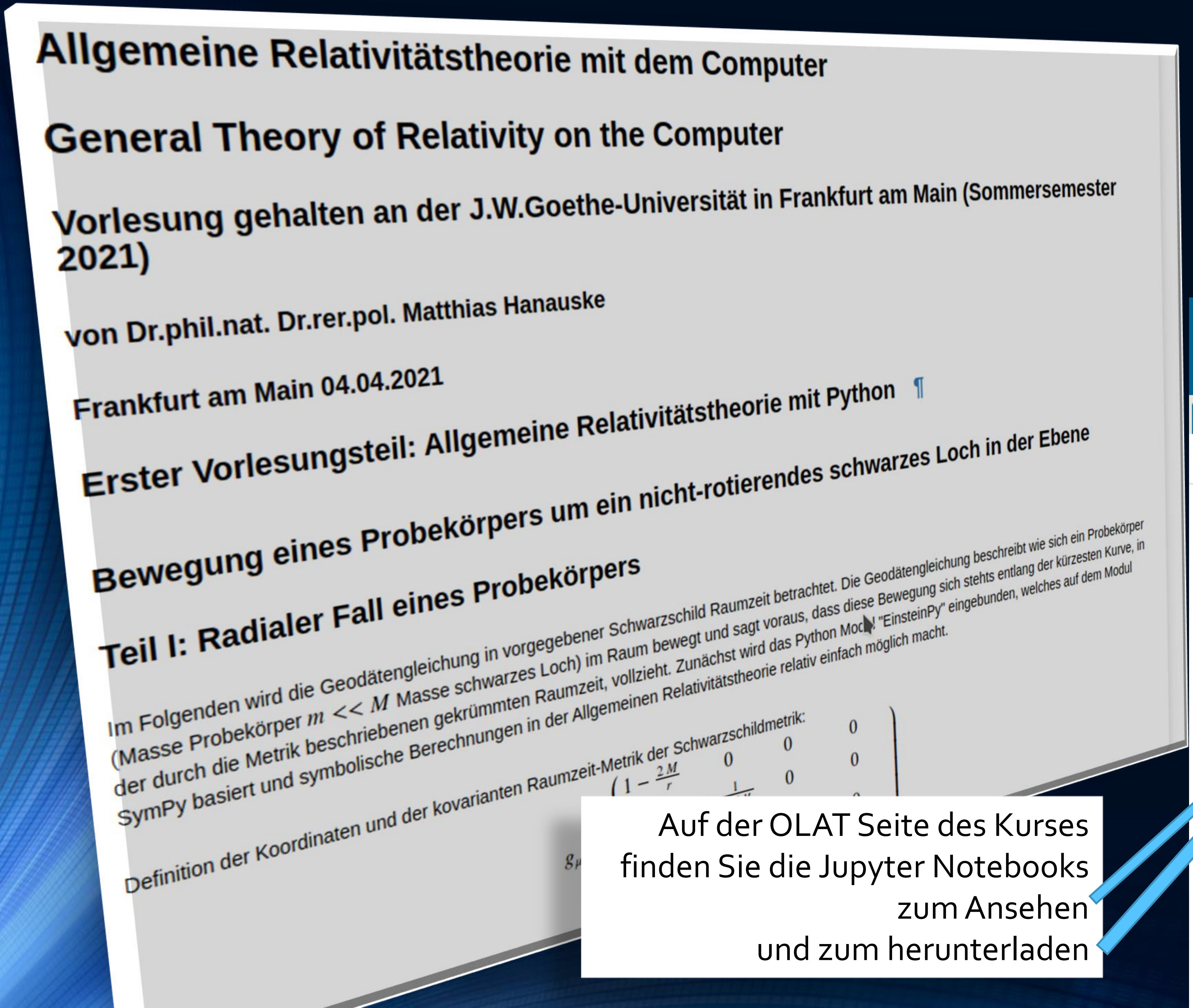
Weitere Informationen anze

Literaturverzeichnis

- Internetseite der Vorlesung
- "General relativity : An introduction for physicis
- "Gravity : An introduction to Einstein's genera

Jupyter Notebook

Radialer Fall eines Probekörpers in ein nicht-rotierendes Schwarzes Loch



Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 04.04.2021

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python ¶

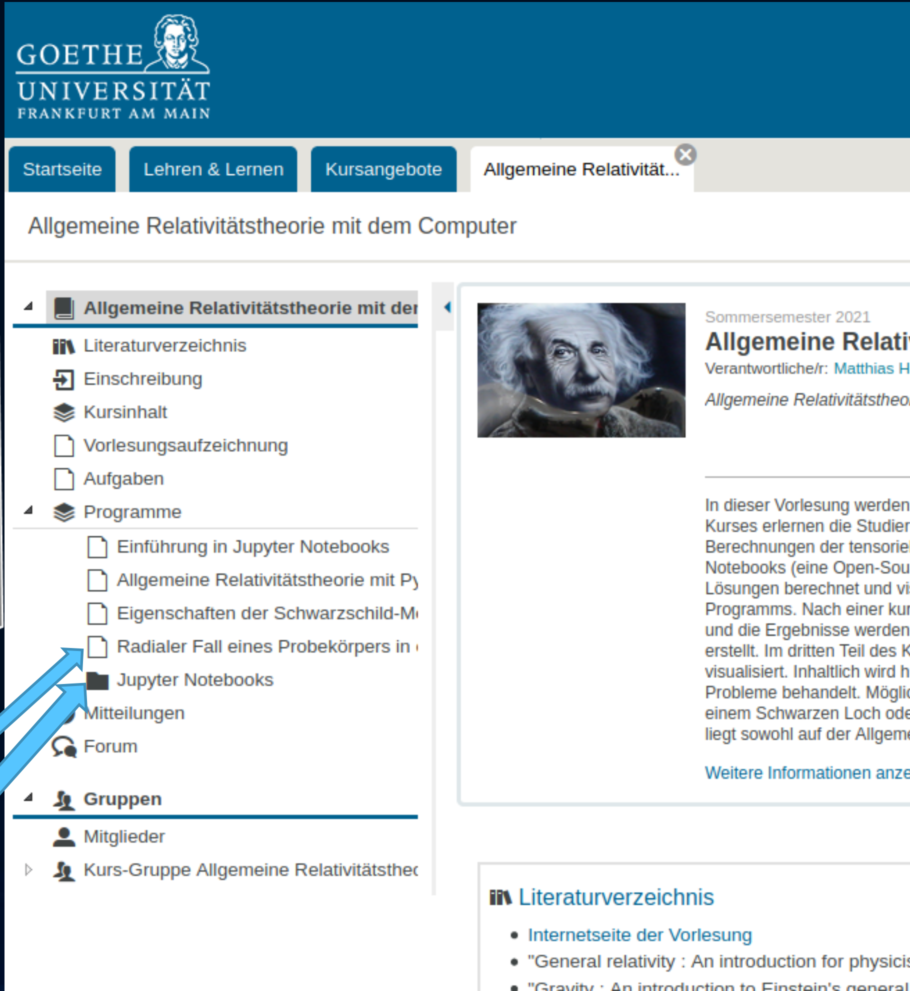
Bewegung eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch in der Ebene

Teil I: Radialer Fall eines Probekörpers

Im Folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse Probekörper $m << M$ Masse schwarzes Loch) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stehts entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht. Zunächst wird das Python Modul "EinsteinPy" eingebunden, welches auf dem Modul SymPy basiert und symbolische Berechnungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie relativ einfach möglich macht.

Definition der Koordinaten und der kovarianten Raumzeit-Metrik der Schwarzschildmetrik:

Auf der OLAT Seite des Kurses
finden Sie die Jupyter Notebooks
zum Ansehen
und zum herunterladen



Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

- Allgemeine Relativitätstheorie mit der
  - Literaturverzeichnis
  - Einschreibung
  - Kursinhalt
  - Vorlesungsaufzeichnung
  - Aufgaben
  - Programme
    - Einführung in Jupyter Notebooks
    - Allgemeine Relativitätstheorie mit Py
    - Eigenschaften der Schwarzschild-M
    - Radialer Fall eines Probekörpers in
    - Jupyter Notebooks
  - Mitteilungen
  - Forum
- Gruppen
  - Mitglieder
  - Kurs-Gruppe Allgemeine Relativitätsthe

Sommersemester 2021

Allgemeine Relati

Verantwortliche/r: Matthias H

Allgemeine Relativitätstheo

In dieser Vorlesung werden
Kurses erlernen die Studier
Berechnungen der tensorie
Notebooks (eine Open-Sou
Lösungen berechnet und vi
Programms. Nach einer ku
und die Ergebnisse werden
erstellt. Im dritten Teil des K
visualisiert. Inhaltlich wird h
Probleme behandelt. Möglic
einem Schwarzen Loch ode
liegt sowohl auf der Allgeme

Weitere Informationen anze

Literaturverzeichnis

- Internetseite der Vorlesung
- "General relativity : An introduction for physicis
- "Gravity : An introduction to Einstein's genera

MATTHIAS HANAUSKE
FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN

JOHANN WOLFGANG GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

ICRANet
International Center for Relativistic Astrophysics Network

General Relativity in the Theater of the Absurd

Parallel session: Education
Teaching Einsteinian Physics to School Students
08.07.2021, 17:20

A Report to an Academy

MG16 5-10 JULY 2021
SIXTEENTH MARCEL GROSSMANN MEETING
ON RECENT DEVELOPMENTS IN THEORETICAL AND EXPERIMENTAL GENERAL RELATIVITY, ASTROPHYSICS AND RELATIVISTIC FIELD THEORIES

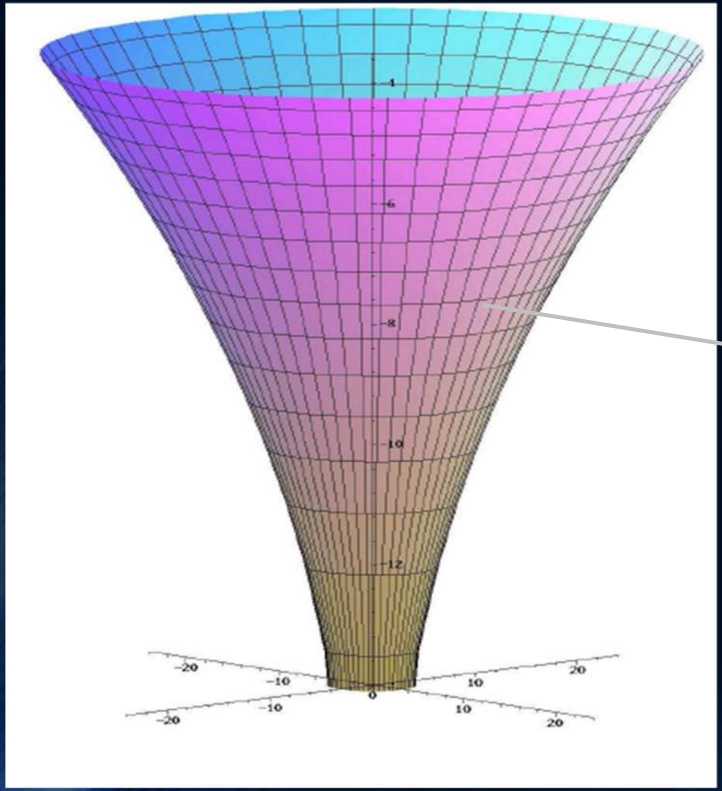
VIRTUAL MEETING
websites:
http://www.icra.it/mg/mg16/
https://indico.icranet.org/event/1/
email:
mg16@icranet.org
6:30-19:30 CENTRAL EUROPEAN SUMMER TIME

50TH ANNIVERSARY OF
"INTRODUCING THE BLACK HOLE"

Das deutsche Parlamentsgebäude

(die wohl beste Veranschaulichung der wesentlichen Eigenschaften eines schwarzen Loches)

Der Raumzeit-Tricher im Reichstagsgebäude



The German Reichstag

and the event horizon of German history

Circular barrier from where visitors can peer down to the bottom of the funnel

Event horizon

Historical scenes frozen on the event horizon

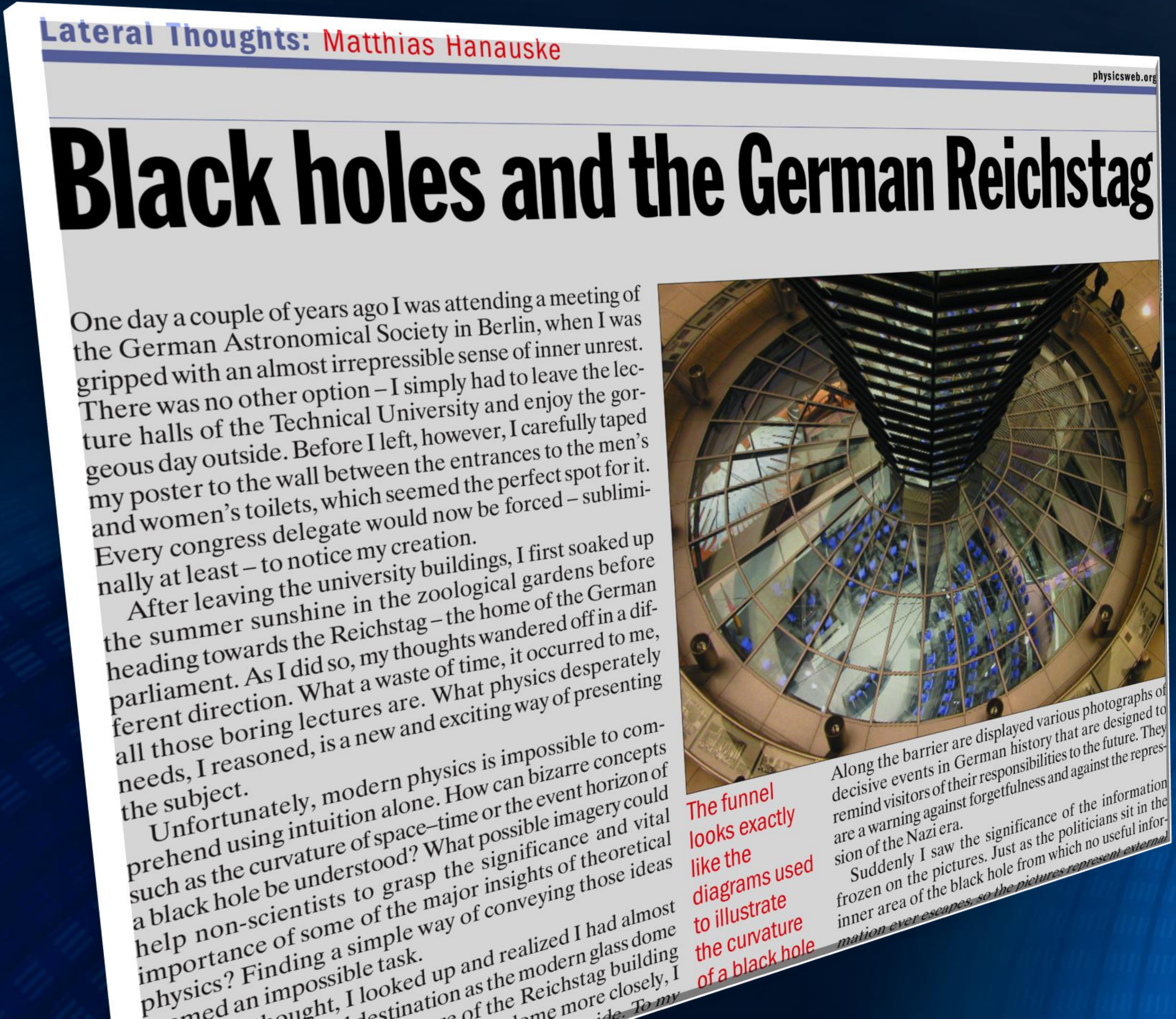
Along the barrier are displayed various photographs of decisive events in German history that are designed to remind visitors of their responsibilities to the future. They are a warning against forgetfulness and against the repression of the Nazi era.

The German parliament building

probably the best illustration of the essential properties of a black hole

The elevator in the Reichstag building is approximately at 3/2 Rs

Weiteres siehe: http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/new/LateralThougts.html



Lateral Thoughts: Matthias Hanauske

physicsweb.org

Black holes and the German Reichstag

One day a couple of years ago I was attending a meeting of the German Astronomical Society in Berlin, when I was gripped with an almost irrepressible sense of inner unrest. There was no other option – I simply had to leave the lecture halls of the Technical University and enjoy the gorgeous day outside. Before I left, however, I carefully taped my poster to the wall between the entrances to the men's and women's toilets, which seemed the perfect spot for it. Every congress delegate would now be forced – subliminally at least – to notice my creation.

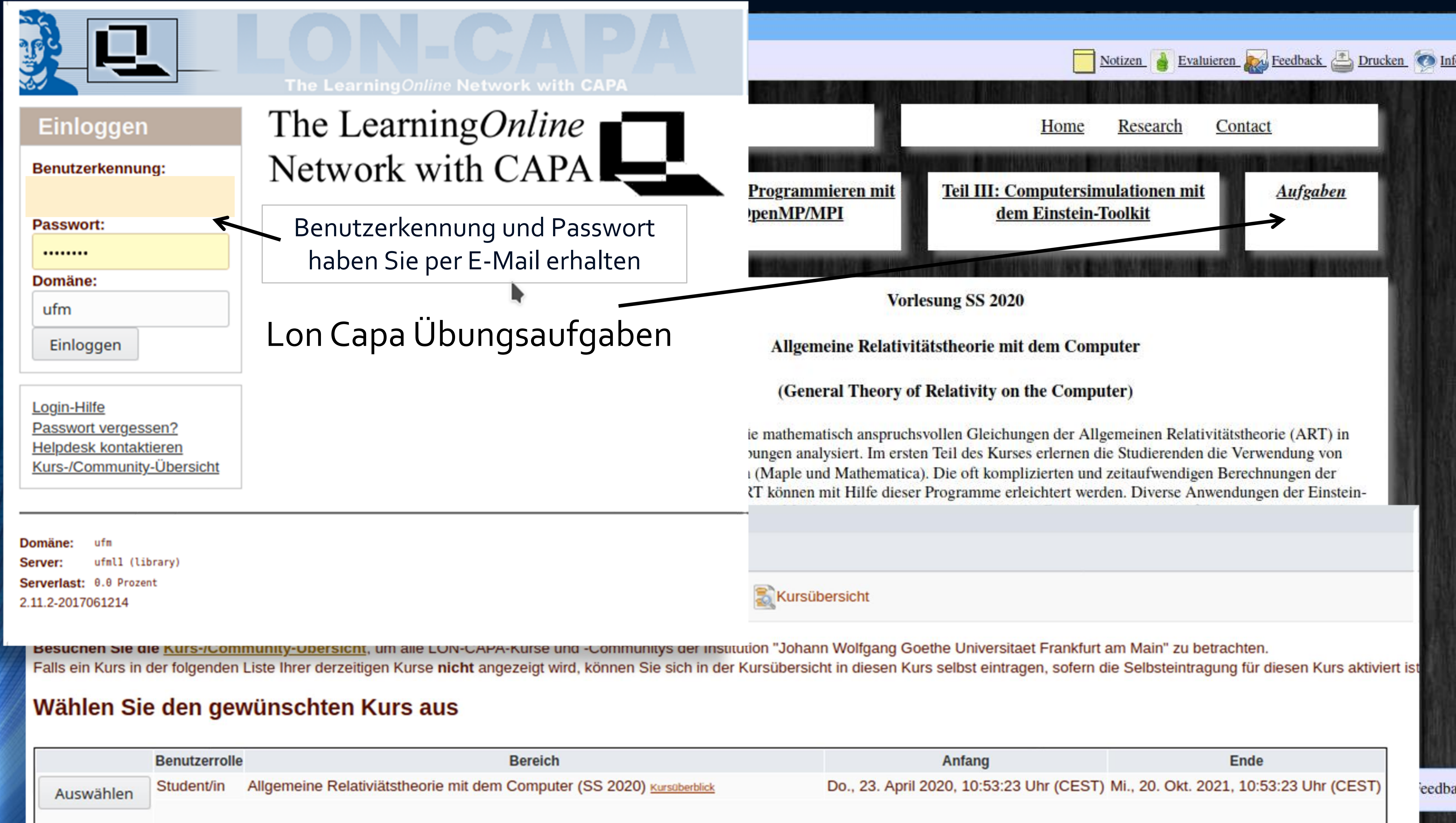
After leaving the university buildings, I first soaked up the summer sunshine in the zoological gardens before heading towards the Reichstag – the home of the German parliament. As I did so, my thoughts wandered off in a different direction. What a waste of time, it occurred to me, all those boring lectures are. What physics desperately needs, I reasoned, is a new and exciting way of presenting the subject.

Unfortunately, modern physics is impossible to comprehend using intuition alone. How can bizarre concepts such as the curvature of space–time or the event horizon of a black hole be understood? What possible imagery could help non-scientists to grasp the significance and vital importance of some of the major insights of theoretical physics? Finding a simple way of conveying those ideas
med an impossible task.
hought, I looked up and realized I had almost
destination as the modern glass dome
of the Reichstag building
ome more closely, I
ide. *To my*

The funnel looks exactly like the diagrams used to illustrate the curvature of a black hole

Along the barrier are displayed various photographs of decisive events in German history that are designed to remind visitors of their responsibilities to the future. They are a warning against forgetfulness and against the repression of the Nazi era.

Suddenly I saw the significance of the information frozen on the pictures. Just as the politicians sit in the inner area of the black hole from which no useful information ever escapes, *so the pictures represent external*



LON-CAPA

The Learning*Online* Network with CAPA

Einloggen

Benutzerkennung:

Passwort: ••••••••

Domäne: ufm

Einloggen

Login-Hilfe

Passwort vergessen?

Helpdesk kontaktieren

Kurs-/Community-Übersicht

Domäne: ufm

Server: ufml1 (library)

Serverlast: 0.0 Prozent

2.11.2-2017061214

The Learning*Online*
Network with CAPA

Benutzerkennung und Passwort haben Sie per E-Mail erhalten

Lon Capa Übungsaufgaben

Home Research Contact

Programmieren mit
)penMP/MPI

Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit

Aufgaben

Vorlesung SS 2020

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

(General Theory of Relativity on the Computer)

ie mathematisch anspruchsvollen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) in
ɔungen analysiert. Im ersten Teil des Kurses erlernen die Studierenden die Verwendung von
ı (Maple und Mathematica). Die oft komplizierten und zeitaufwendigen Berechnungen der
₹T können mit Hilfe dieser Programme erleichtert werden. Diverse Anwendungen der Einstein-

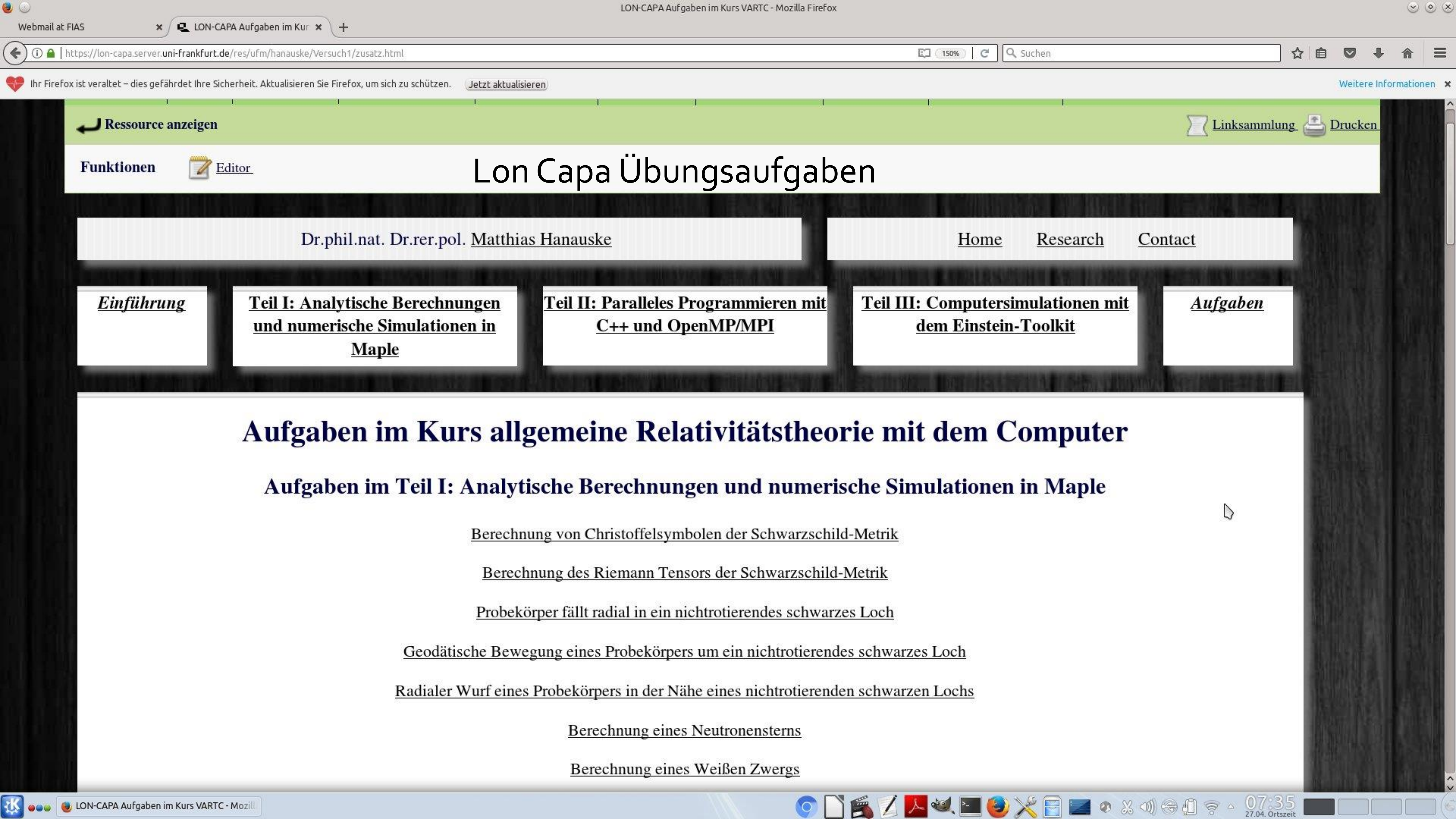
Kursübersicht

Besuchen Sie die Kurs-/Community-Übersicht, um alle LON-CAPA-Kurse und -Communitys der Institution "Johann Wolfgang Goethe Universitaet Frankfurt am Main" zu betrachten.
Falls ein Kurs in der folgenden Liste Ihrer derzeitigen Kurse **nicht** angezeigt wird, können Sie sich in der Kursübersicht in diesen Kurs selbst eintragen, sofern die Selbsteintragung für diesen Kurs aktiviert ist

Wählen Sie den gewünschten Kurs aus

	Benutzerrolle	Bereich	Anfang	Ende
Auswählen	Student/in	Allgemeine Relativiätstheorie mit dem Computer (SS 2020) Kursüberblick	Do., 23. April 2020, 10:53:23 Uhr (CEST)	Mi., 20. Okt. 2021, 10:53:23 Uhr (CEST)

Lon Capa Übungsaufgaben



Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Home Research Contact

Einführung

Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI

Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit

Aufgaben

Aufgaben im Kurs allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Aufgaben im Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

Berechnung von Christoffelsymbolen der Schwarzschild-Metrik

Berechnung des Riemann Tensors der Schwarzschild-Metrik

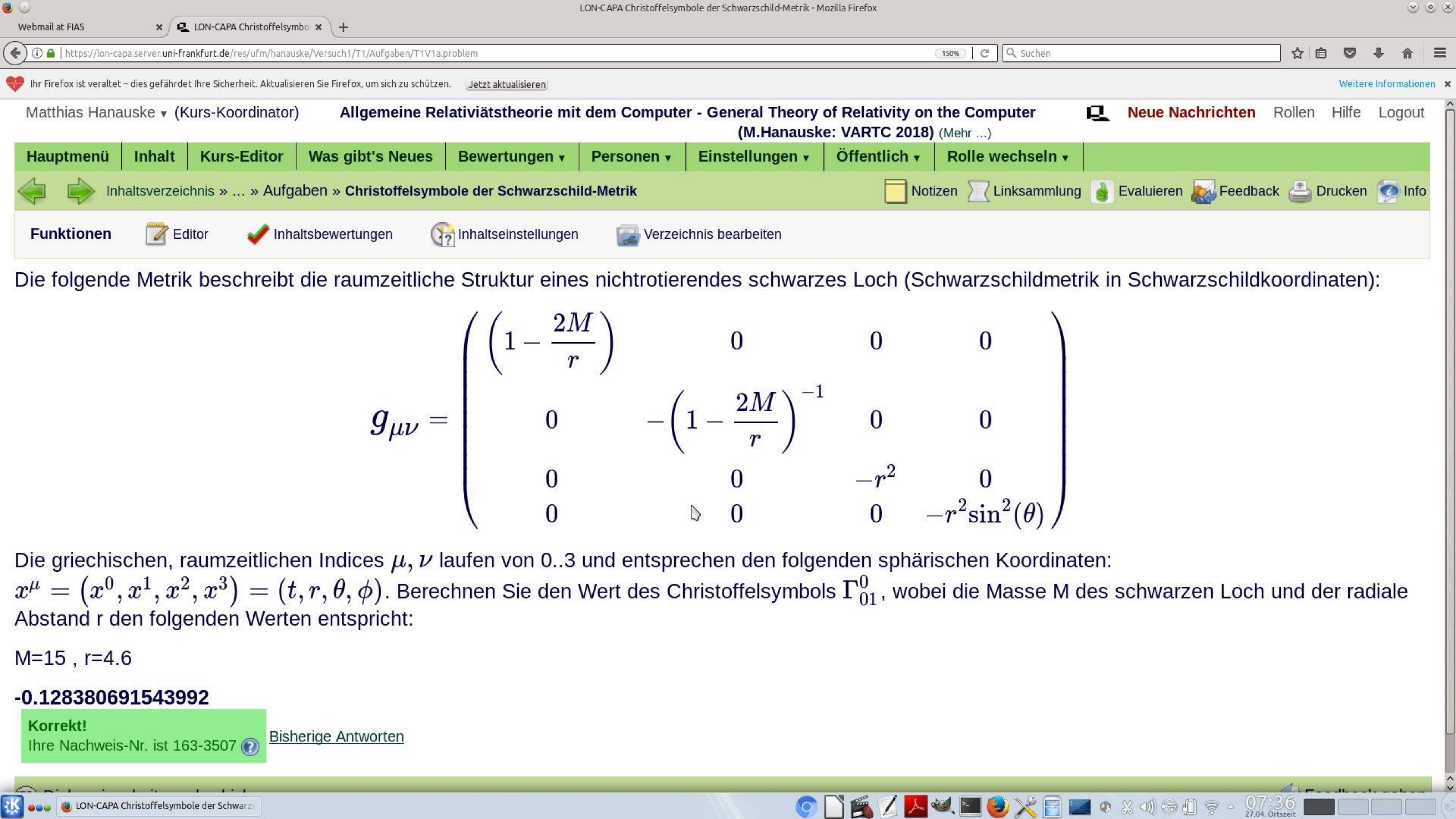
Probekörper fällt radial in ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Geodätische Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Radialer Wurf eines Probekörpers in der Nähe eines nichtrotierenden schwarzen Lochs

Berechnung eines Neutronensterns

Berechnung eines Weißen Zwergs



Die folgende Metrik beschreibt die raumzeitliche Struktur eines nichtrotierendes schwarzes Loch (Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

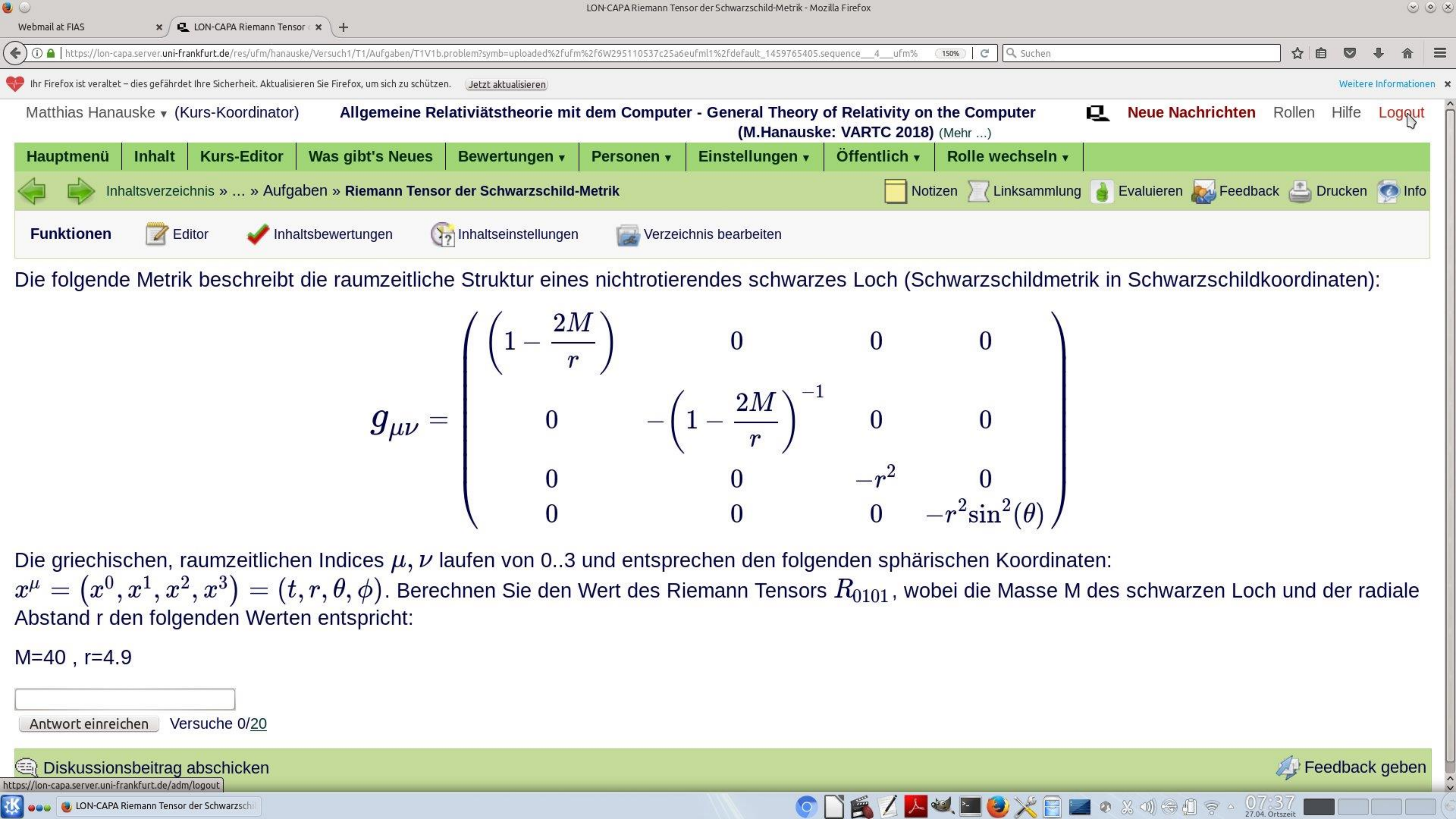
Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = \left(t, r, \theta, \phi\right)$. Berechnen Sie den Wert des Christoffelsymbols Γ^0_{01}, wobei die Masse M des schwarzen Loch und der radiale Abstand r den folgenden Werten entspricht:

M=15 , r=4.6

-0.128380691543992

Korrekt!
Ihre Nachweis-Nr. ist 163-3507

Bisherige Antworten

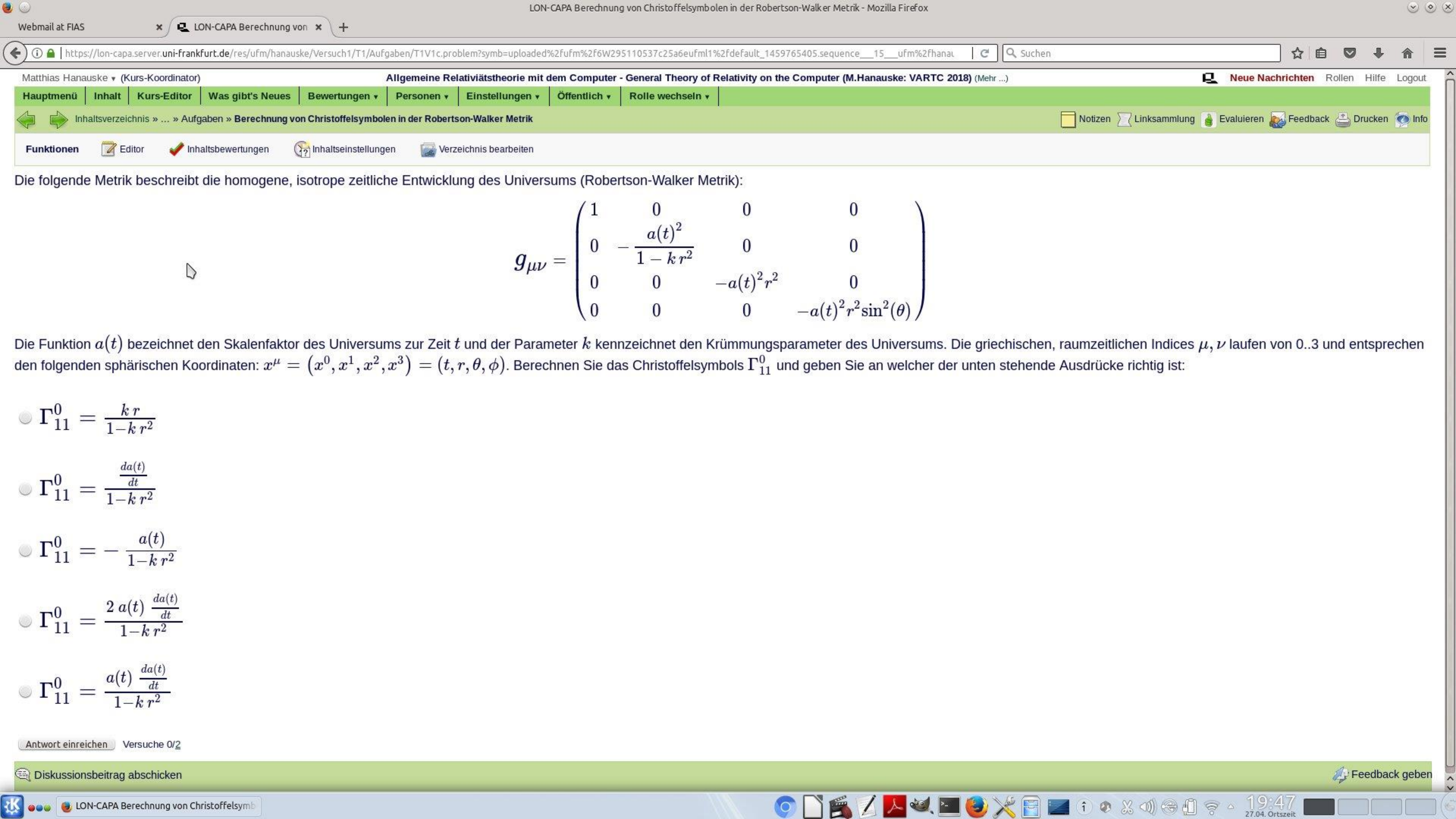


Die folgende Metrik beschreibt die raumzeitliche Struktur eines nichtrotierendes schwarzes Loch (Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie den Wert des Riemann Tensors R_{0101}, wobei die Masse M des schwarzen Loch und der radiale Abstand r den folgenden Werten entspricht:

M=40 , r=4.9



Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-k\,r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie das Christoffelsymbols Γ^0_{11} und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

○ $\Gamma^0_{11} = \frac{k\,r}{1-k\,r^2}$

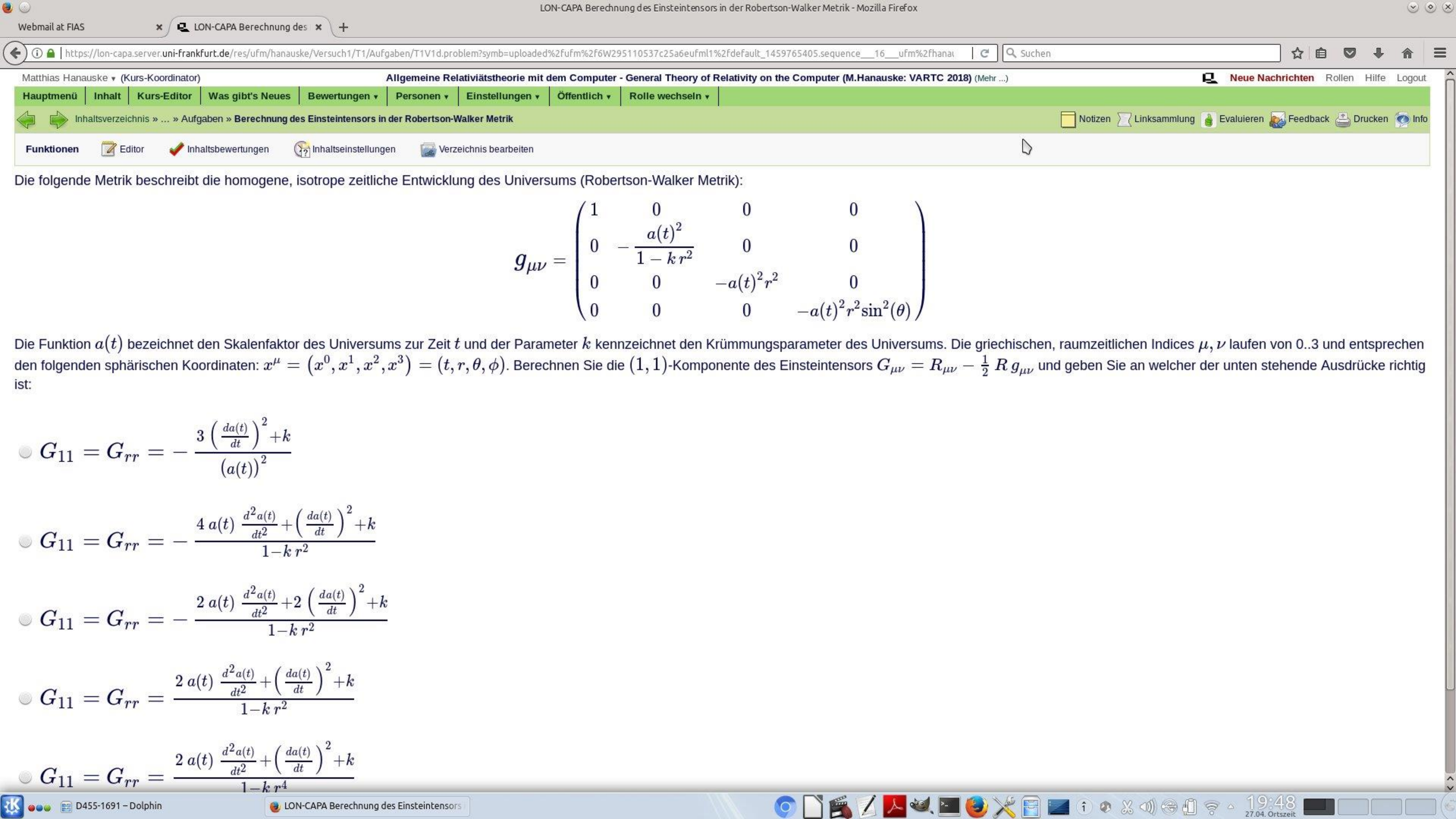
○ $\Gamma^0_{11} = \frac{\frac{da(t)}{dt}}{1-k\,r^2}$

○ $\Gamma^0_{11} = -\frac{a(t)}{1-k\,r^2}$

○ $\Gamma^0_{11} = \frac{2\,a(t)\,\frac{da(t)}{dt}}{1-k\,r^2}$

○ $\Gamma^0_{11} = \frac{a(t)\,\frac{da(t)}{dt}}{1-k\,r^2}$

Versuche 0/2



Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-k\,r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie die $(1,1)$-Komponente des Einsteintensors $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,R\,g_{\mu\nu}$ und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

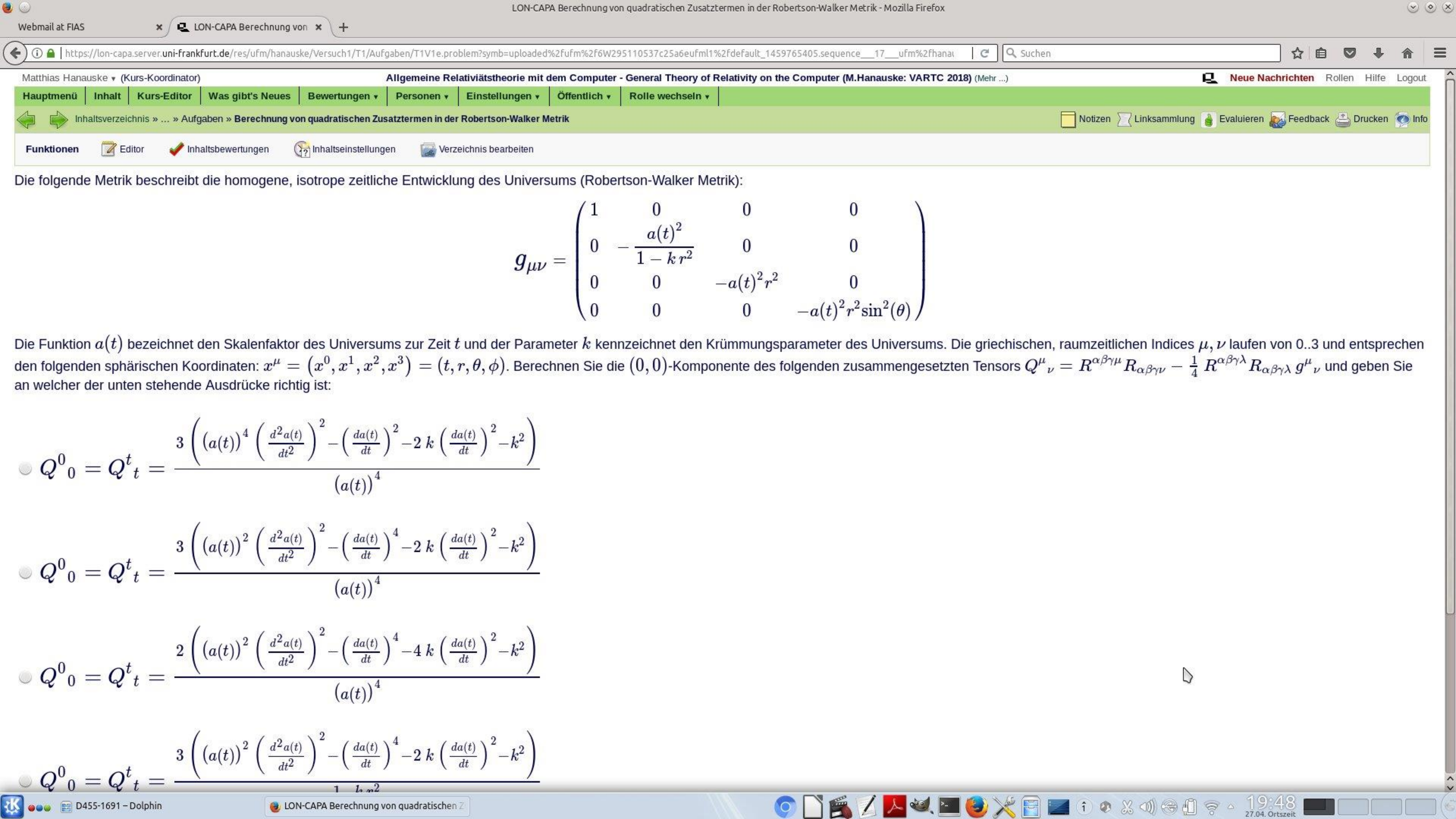
○ $G_{11} = G_{rr} = -\frac{3\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{(a(t))^2}$

○ $G_{11} = G_{rr} = -\frac{4\,a(t)\,\frac{d^2a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1-k\,r^2}$

○ $G_{11} = G_{rr} = -\frac{2\,a(t)\,\frac{d^2a(t)}{dt^2} + 2\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1-k\,r^2}$

○ $G_{11} = G_{rr} = \frac{2\,a(t)\,\frac{d^2a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1-k\,r^2}$

○ $G_{11} = G_{rr} = \frac{2\,a(t)\,\frac{d^2a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1-k\,r^4}$



Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-k\,r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie die $(0,0)$-Komponente des folgenden zusammengesetzten Tensors $Q^\mu{}_\nu = R^{\alpha\beta\gamma\mu} R_{\alpha\beta\gamma\nu} - \frac{1}{4} R^{\alpha\beta\gamma\lambda} R_{\alpha\beta\gamma\lambda}\, g^\mu{}_\nu$ und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

○ $$Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3\left((a(t))^4 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - 2\,k \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - k^2\right)}{(a(t))^4}$$

○ $$Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3\left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^4 - 2\,k \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - k^2\right)}{(a(t))^4}$$

○ $$Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{2\left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^4 - 4\,k \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - k^2\right)}{(a(t))^4}$$

○ $$Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3\left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^4 - 2\,k \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - k^2\right)}{1-k\,r^2}$$