

# Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*PC-POOL RAUM 01.120  
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
12. MAI, 2017*

*MATTHIAS HANAUSKE*

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES  
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK  
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK  
D-60438 FRANKFURT AM MAIN  
GERMANY*

## 4. Vorlesung

# Allgemeines zur Vorlesung

- Der Vorlesungstermin am 19.05.2017 wird von Herrn Elias Most vertreten. Die Übungsstunde am 19.05.2017 beginnt erst um 14.30 Uhr. Der Termin am 26.05.2017 fällt aus und wird auf einen anderen Termin verschoben – Termin wird noch festgelegt.

## Plan für die heutige Vorlesung:

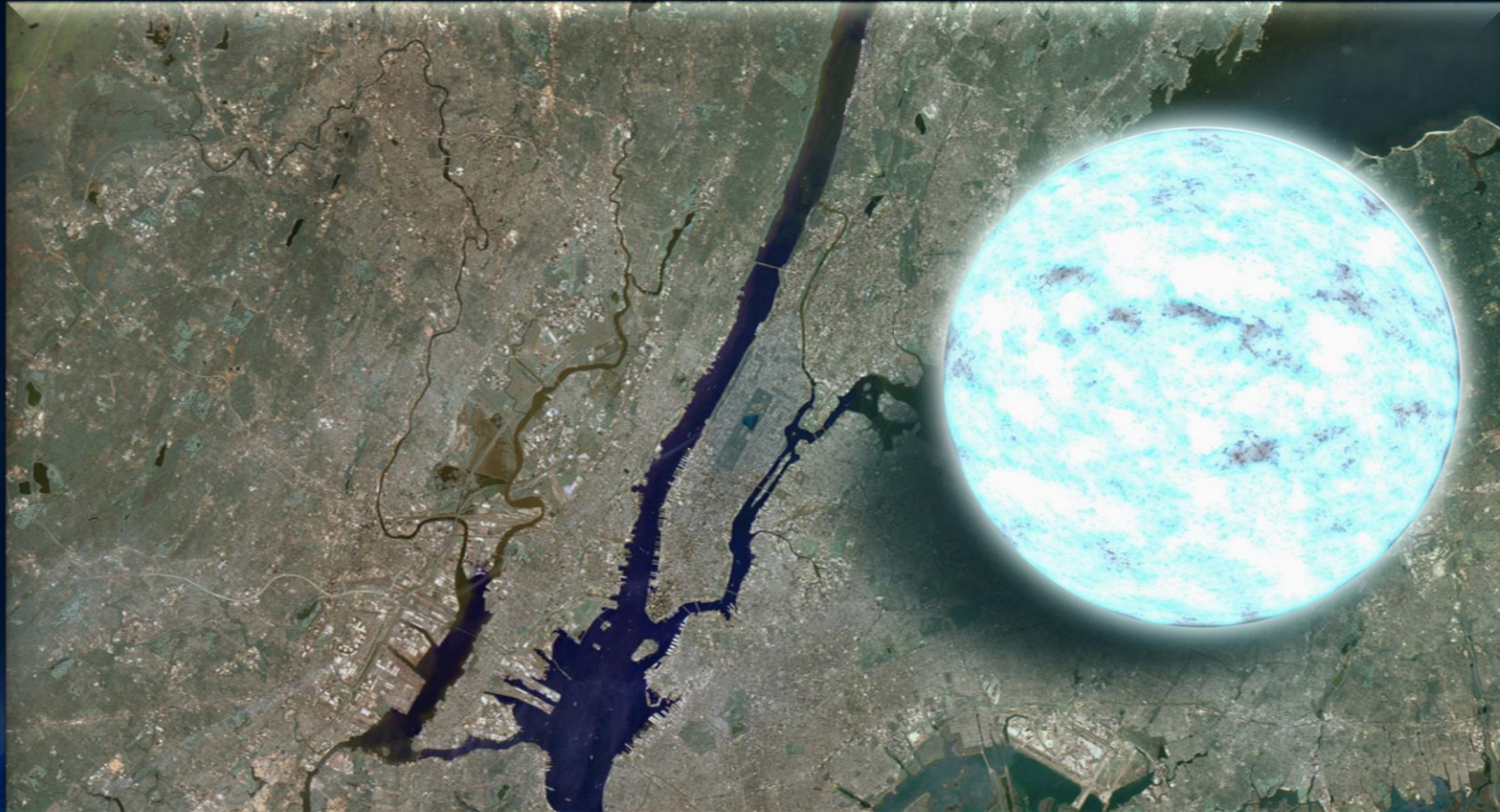
Wiederholung der letzten Vorlesung (Klassifizierung der möglichen unterschiedlichen Bahnbewegungen mittels eines effektiven Potentials, die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (ISCO) eines Probekörpers, Bewegung von Licht um ein schwarzes Loch, die Photonensphäre eines schwarzen Loches), Theorie und experimentelle Befunde von Neutronensternen, Maple: von der Einsteingleichung zur Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichung, numerisches Lösen der TOV-Gleichung in Maple

# Eigenschaften von Neutronensterne

Neutronensterne werden in gewaltigen Supernova-Explosionen geboren.

Radius ~ 10 km

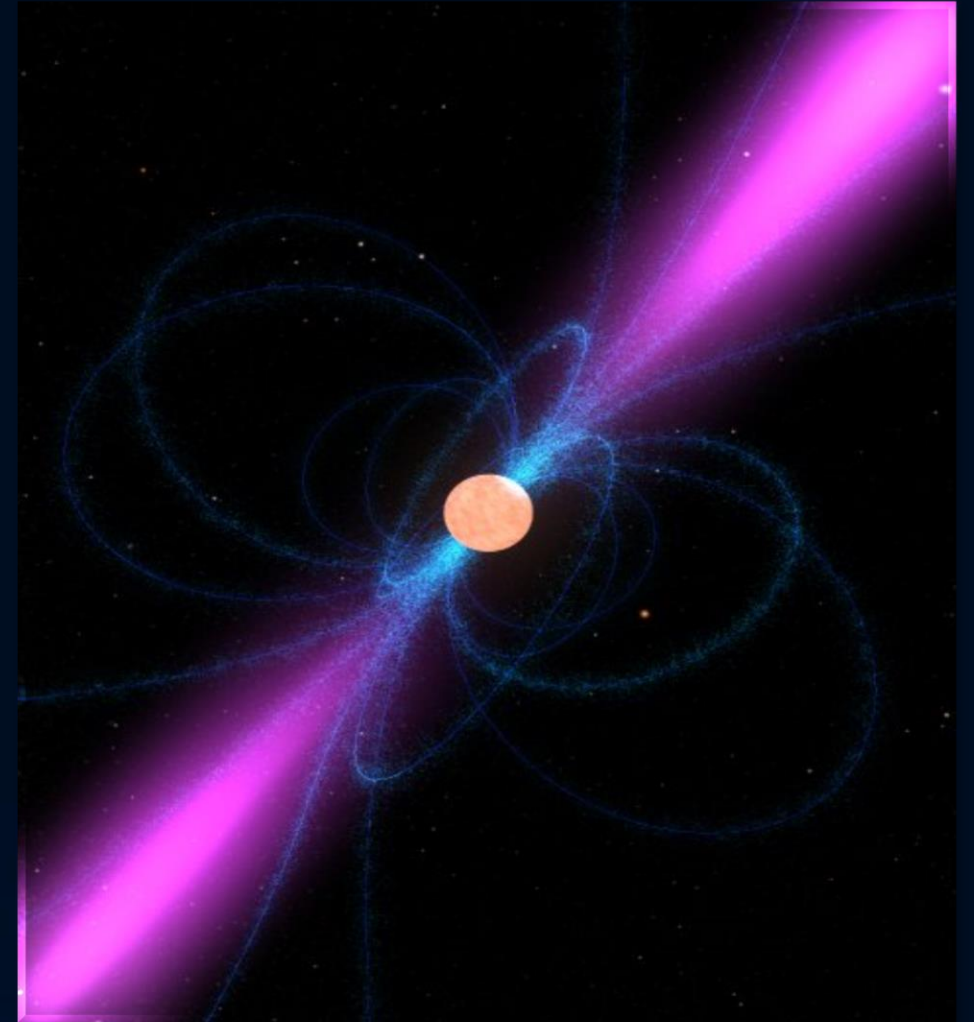
Masse 1-2 Sonnenmassen



# Pulsare sind rotierende Neutronensterne

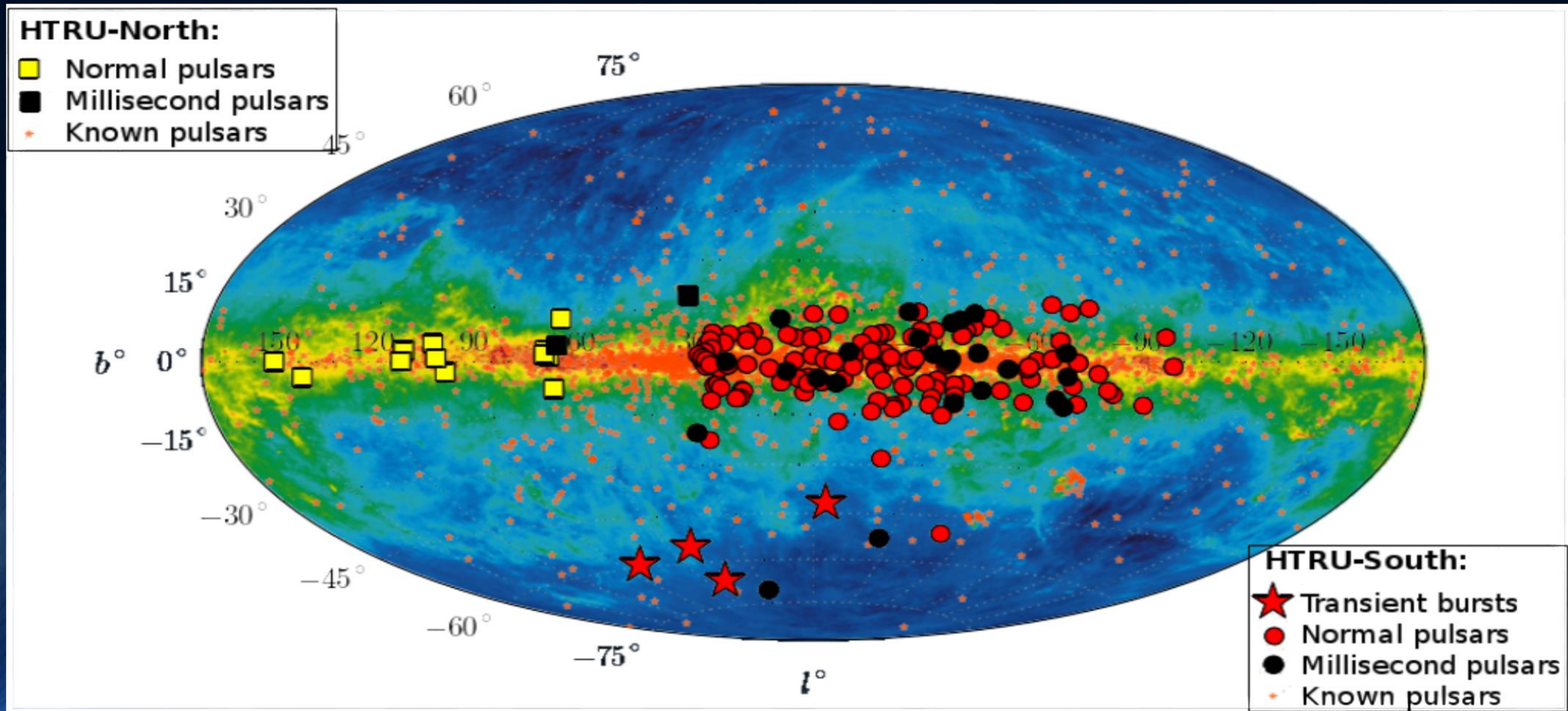
Neutronensterne haben sehr große Magnetfelder  
(bis zu  $10^{11}$  Tesla)

Neutronensterne rotieren sehr schnell  
(bis zu 716 Umdrehungen pro Sekunde)



# Pulsare sind rotierende Neutronensterne

Zurzeit kennen wir ca. 2500 Neutronensterne



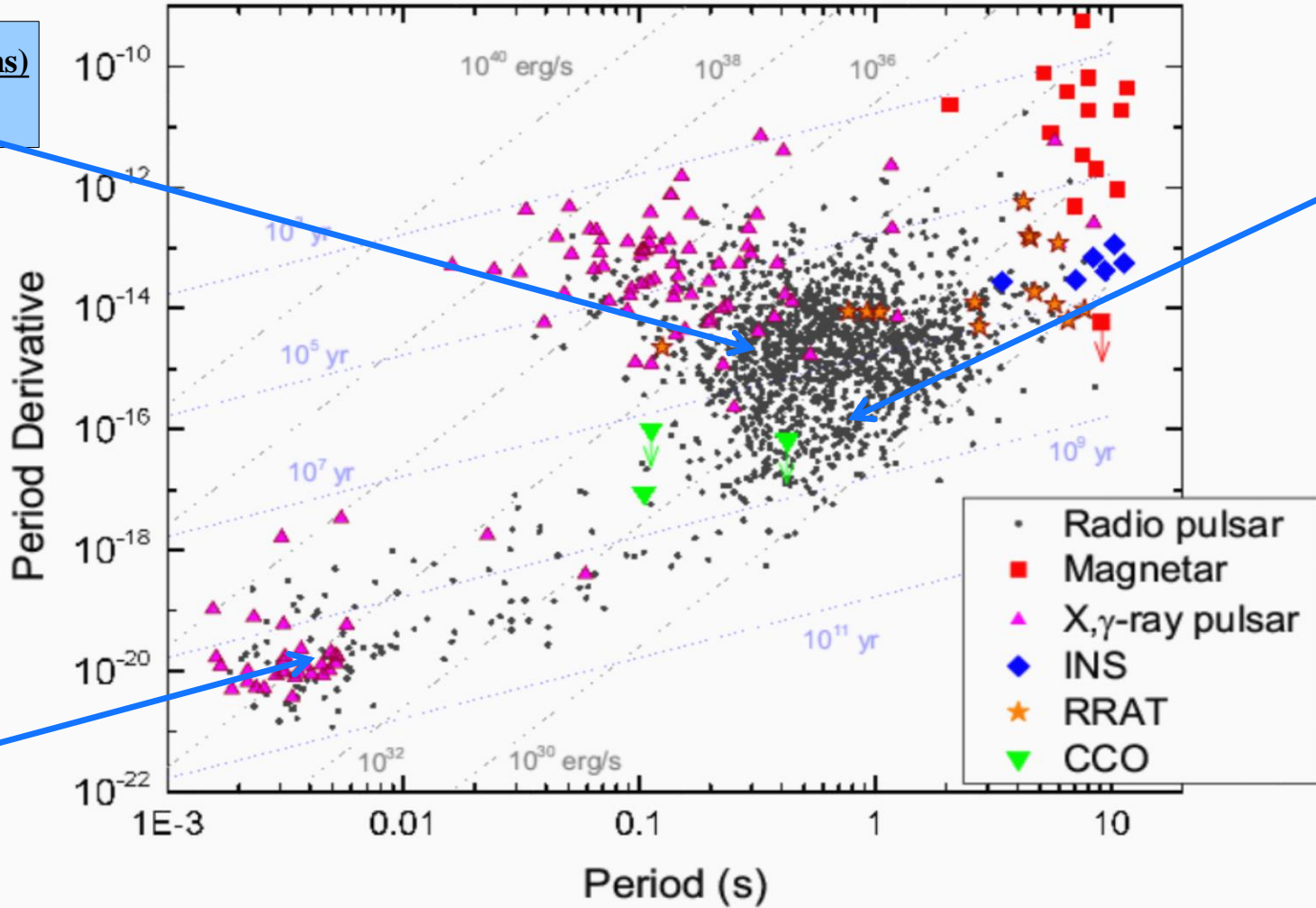
# Millisekunden und Sekunden Pulsare



**PSR B0531+21 (33.5 ms)**  
**Crab Pulsar**



**PSR B0329+54 (0.715 s)**



**PSR B1937+21 (1.56 ms)**

# Binäre Neutronenstern Systeme

Kramer, Wex, Class. Quantum Grav. 2009

Der **Doppel Pulsar** (PSR J0737-3039A/B):

Entdeckt in 2003

Exzentrizität: 0.088

Pulsar A:  $P=23$  ms,  $M=1.3381(7)$

Pulsar B:  $P=2.7$  s,  $M=1.2489(7)$

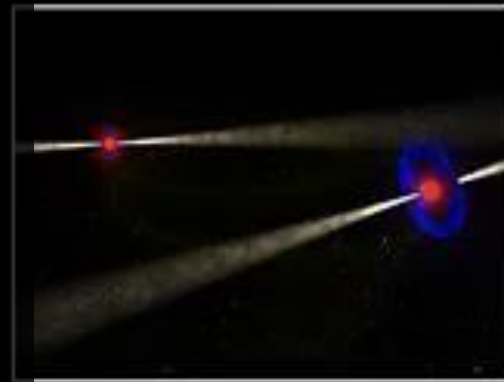
Beide Pulsare nur 800,000 km  
entfernt voneinander

Umlaufzeit: 147 Minuten

Pulsar A wird von B eclipsed  
(für 30 s pro Orbit)

Abstrahlung von Gravitationswellen

→ In 85 Millionen Jahren  
kollidieren sie miteinander!



# Beobachtete Massen von Neutronensternen in binären Systemen

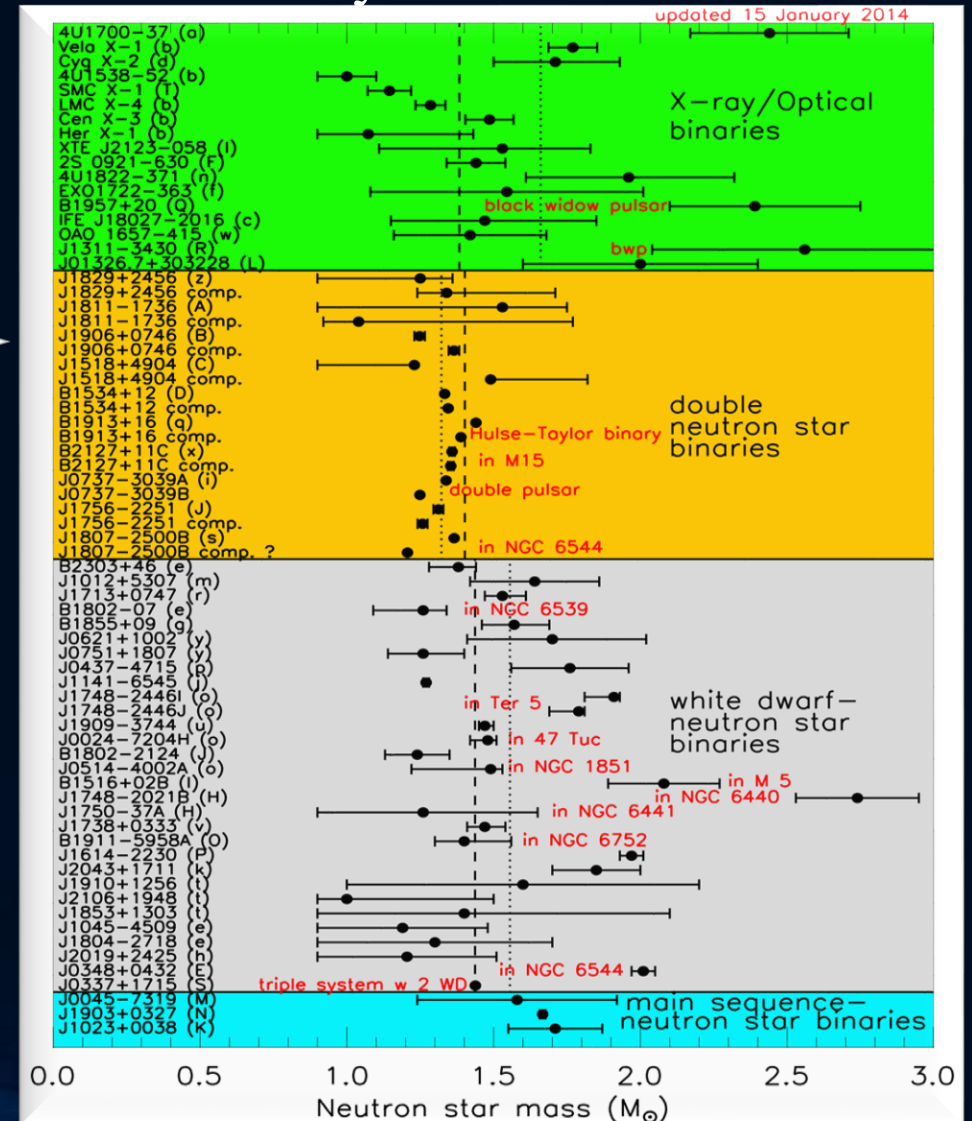
Einige der bekannten Neutronensterne befinden sich in Zweiersystemen:

NS-Planet, NS-(weißer Zwerg) oder NS-NS Systeme

## PSR J1906+0746

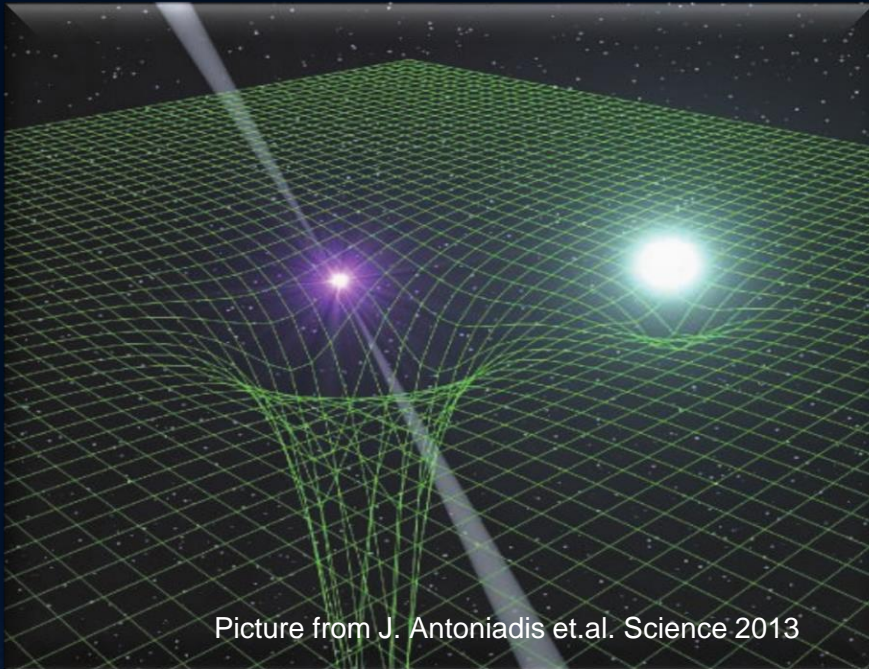
144-ms Pulsar, entdeckt in 2004  
Orbitale Periode: 3.98 Stunden,  
Exzentrizität: 0.085  
Pulsar Masse: 1.291(11)  
Masse Begleiter: 1.322(1)  
In den Jahren 1998-2009 beobachtet,  
dann verschwand  
der Pulsar aufgrund der  
Spin-Präzession

Van Leeuwen et al, arXiv:1411.1518





# Beobachtete Massen von Neutronensternen in binären Systemen



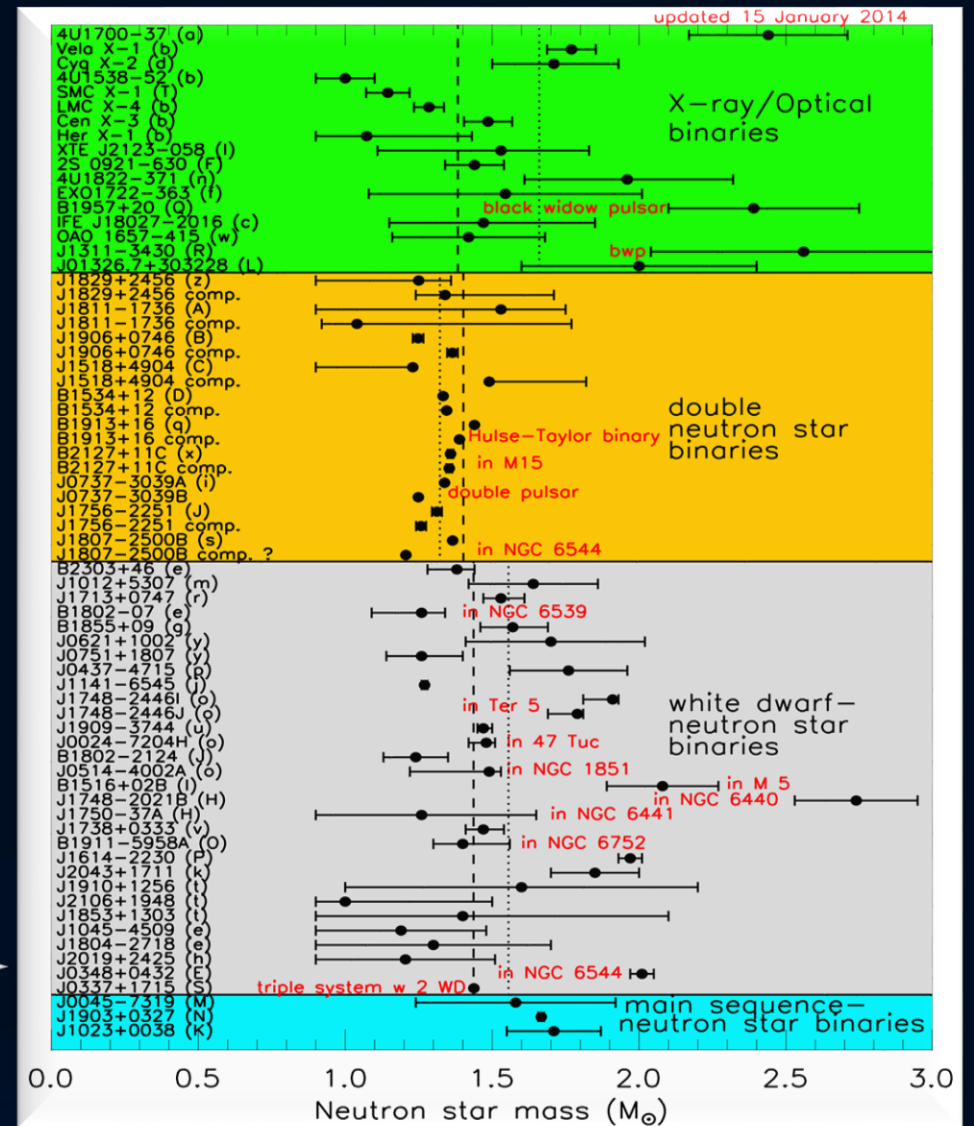
## PSR J0348+0432

Orbitale Periode: 2.46 Stunden

Pulsar mass:  $2.01 \pm 0.04$

Masse weißer Zwerg:

$M = 0.172 \pm 0.003$



# The Einstein Equation

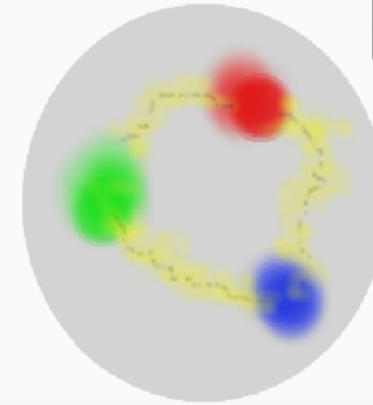
ART	<u>Yang-Mills-Theories</u>
$D_\beta v^\alpha = \partial_\beta v^\alpha + \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha v^\sigma$	$D_{\beta a}{}^b = \partial_\beta 1_a{}^b + ig A_{\beta a}{}^b$
$R^\delta{}_{\mu\alpha\beta} v^\mu = [D_\alpha, D_\beta] v^\delta$	$F_{\alpha\beta a}{}^b = \frac{1}{ig} [D_{\alpha a}{}^c, D_{\beta c}{}^b]$
$R^\delta{}_{\mu\alpha\beta} = \Gamma_{\mu\alpha \beta}^\delta - \Gamma_{\mu\beta \alpha}^\delta$ $+ \Gamma_{\nu\beta}^\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\delta \Gamma_{\mu\beta}^\nu$	$= A_{\beta a}{}^b _\alpha - A_{\alpha a}{}^b _\beta$ $+ \frac{1}{ig} [A_{\alpha a}{}^c, A_{\beta c}{}^b]$
$\mathcal{L}_G = R + \underbrace{(c_1 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \dots)}_{\equiv 0 \text{ for ART}}$	$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu a}{}^b F^{\mu\nu}{}_a{}^b$

Quantum ChromoDynamic:

( $SU(3)_{(c)}$ - Color Yang-Mills-Gauge Theory)

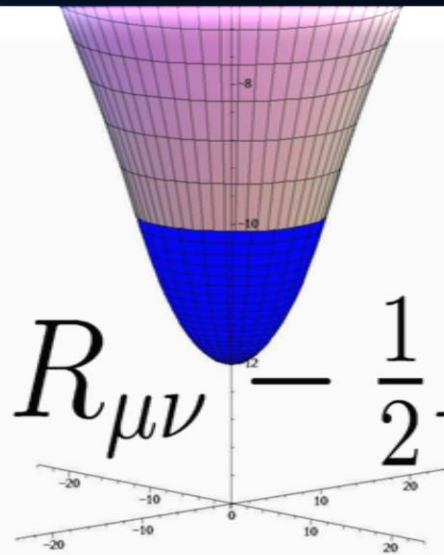
$$D_{\beta A}{}^B = \partial_\beta 1_A{}^B + ig G_{\beta A}{}^B$$

$A, B = \text{red, green, blue}$



$$\psi_A^f = \begin{pmatrix} \psi_r^f \\ \psi_g^f \\ \psi_b^f \end{pmatrix}$$

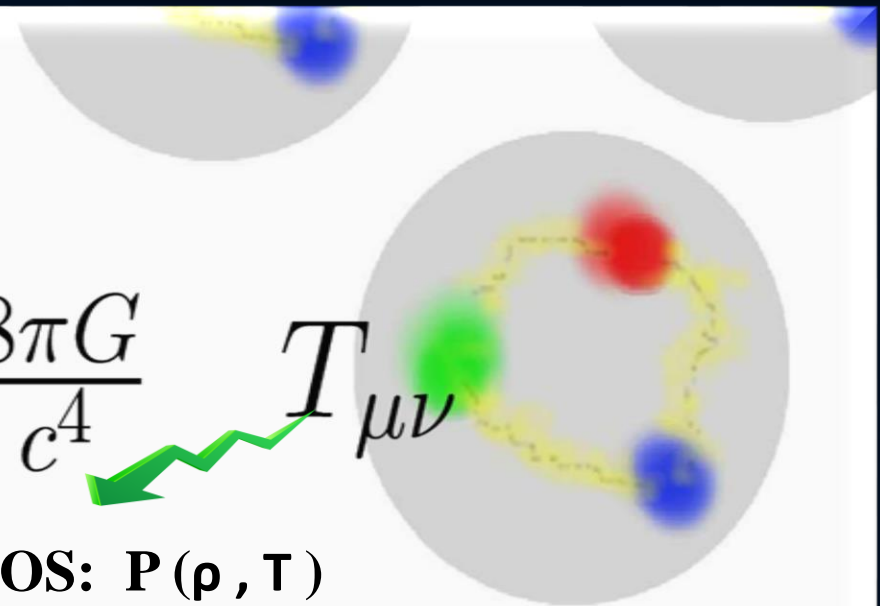
Confinement  
chiral symmetry, ...



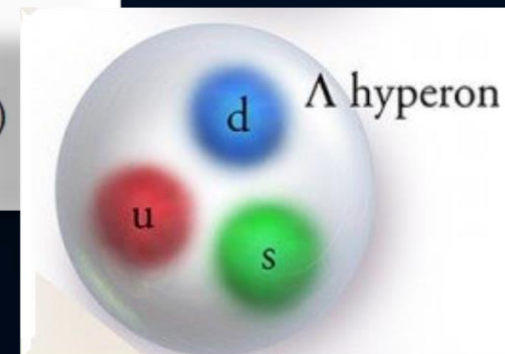
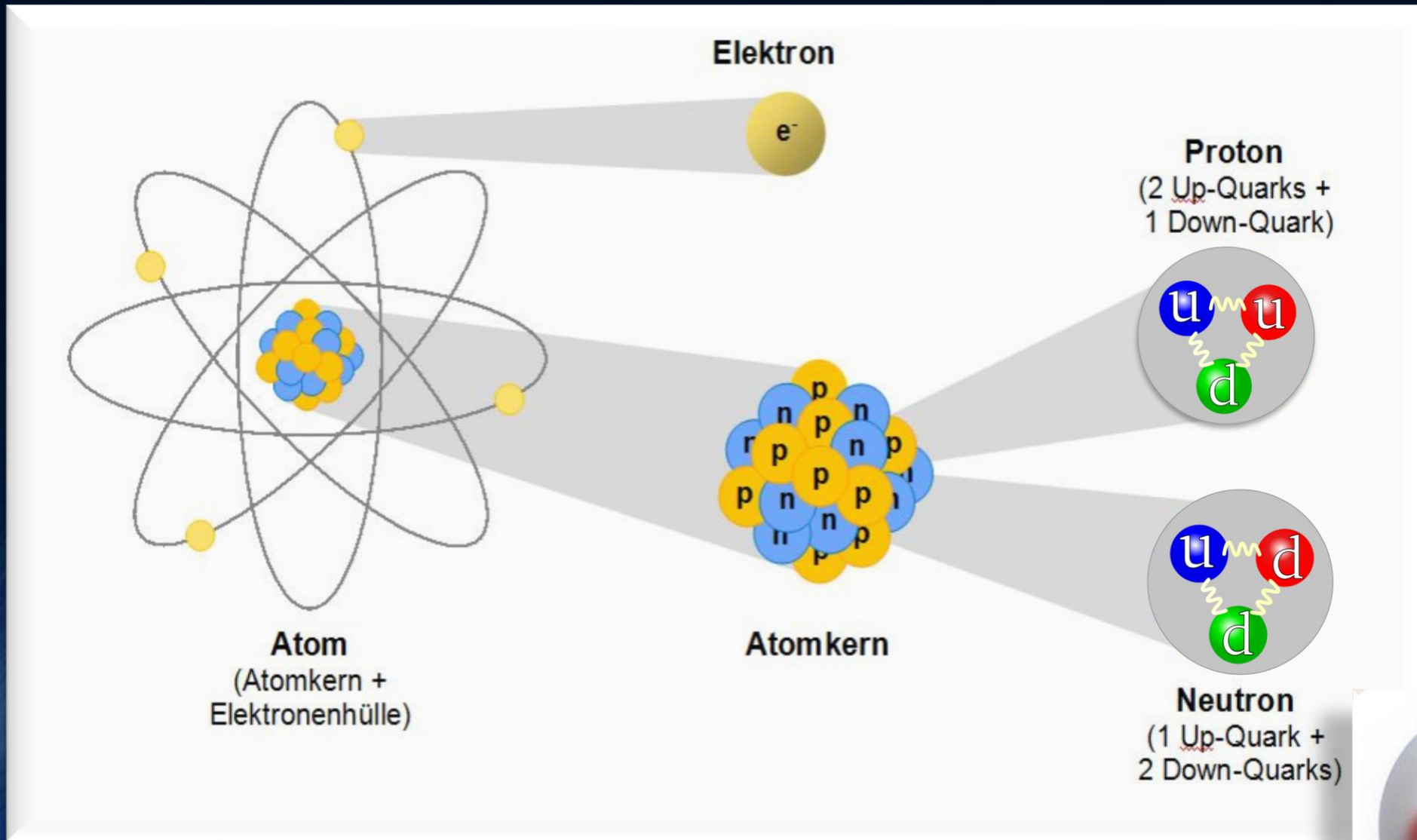
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} =$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

EOS:  $P(\rho, T)$

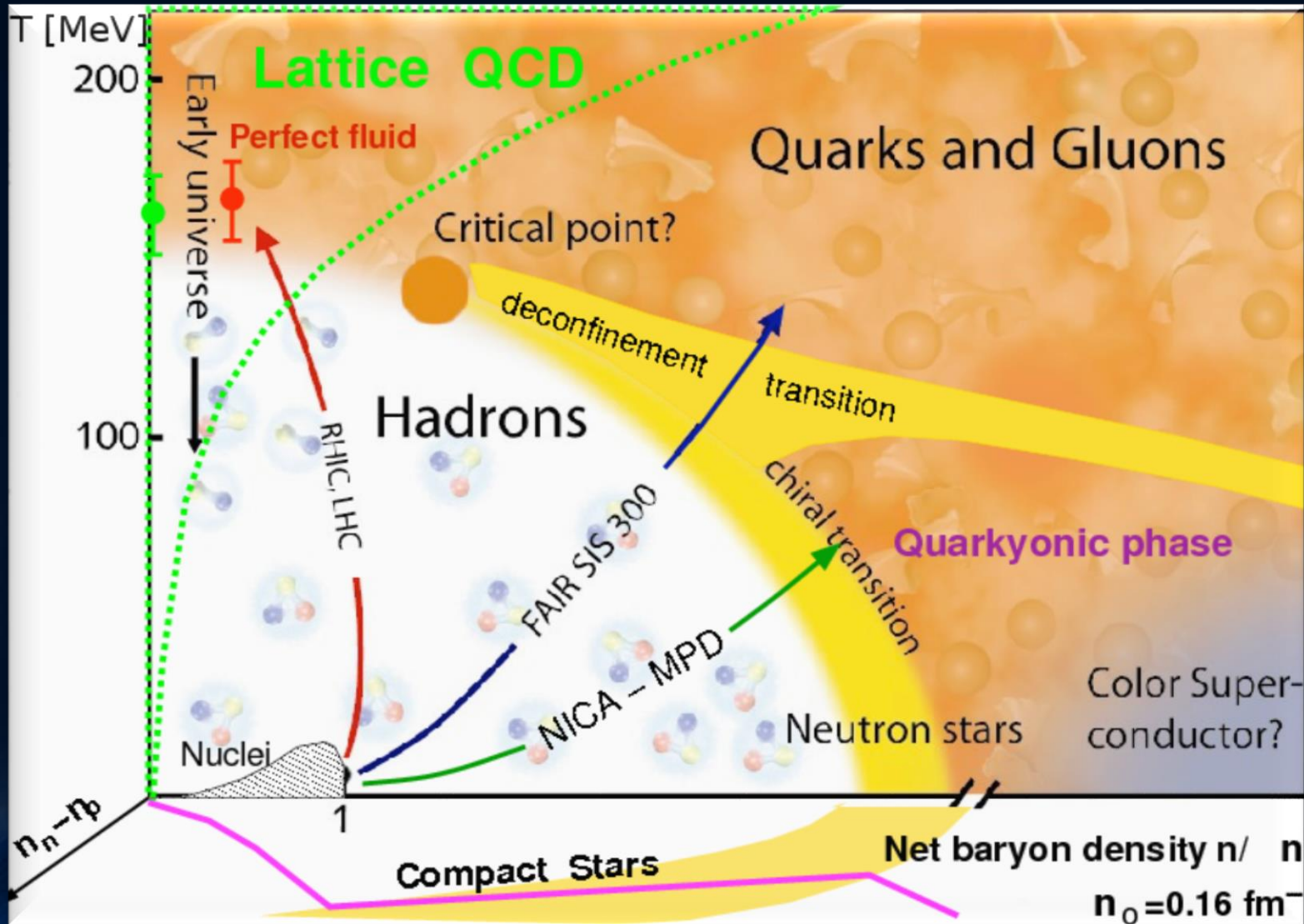


# Elementare Materie

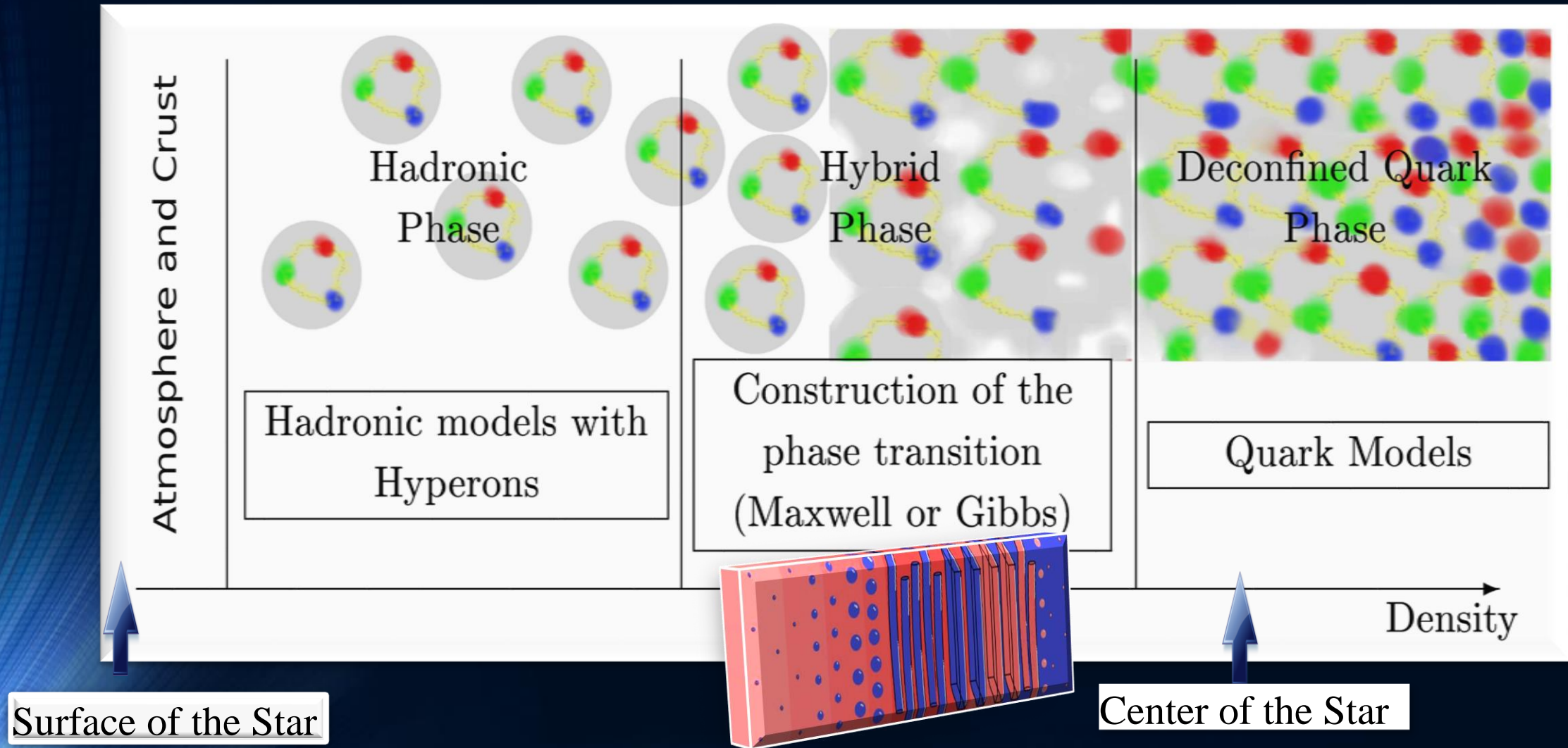


Bei sehr hohen Dichten oder Temperaturen können auch **Hyperonen** entstehen

# Die Zustandsgleichung der Materie und das Quark-Gluon-Plasma



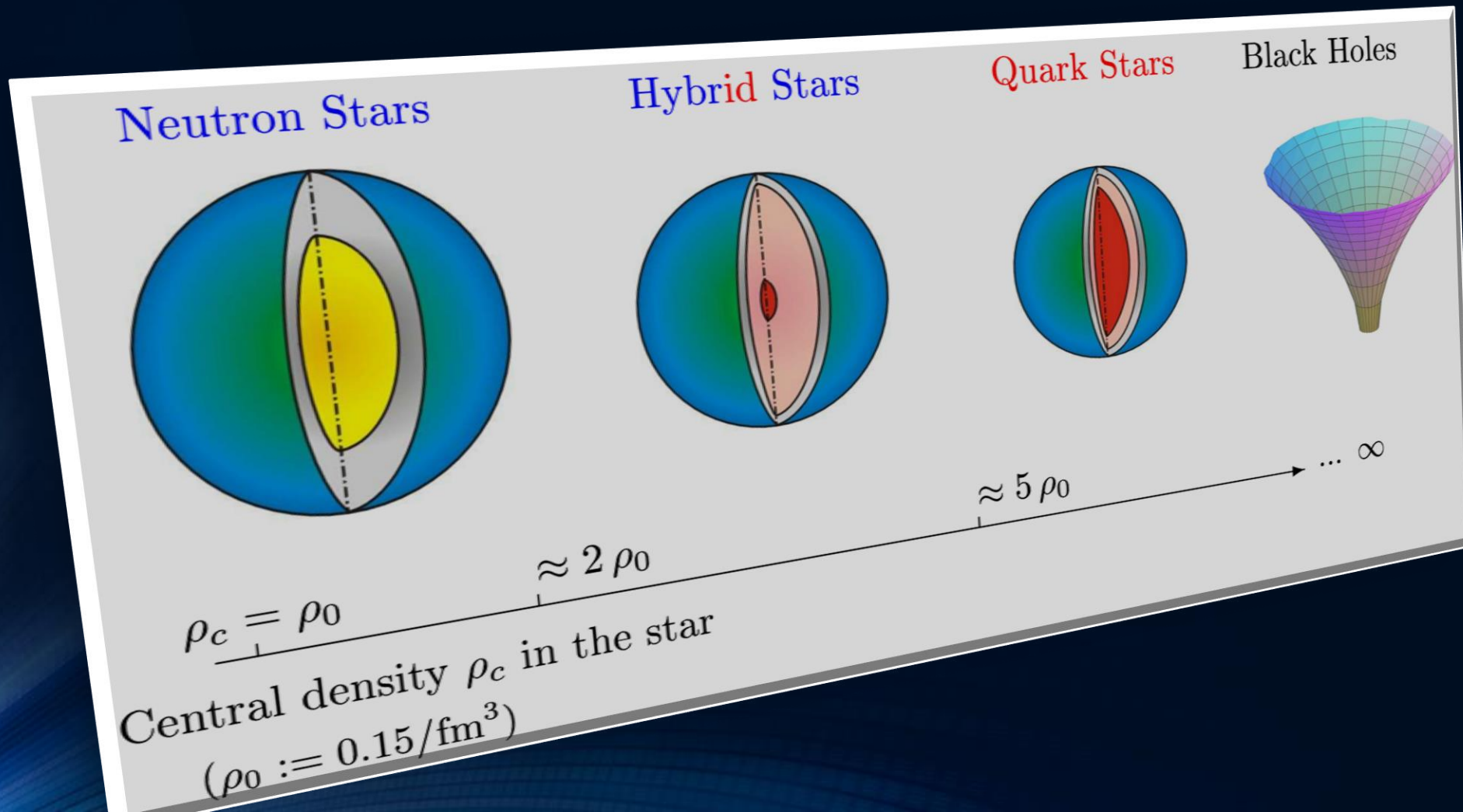
# The QCD – Phase Transition and the Interior of a Hybrid Star



See: *Stable hybrid stars within a SU(3) Quark-Meson-Model*,  
A.Zacchi, M.Hanuske, J.Schaffner-Bielich, PRD 93, 065011 (2016)

# Neutronensterne, Quarksterne und schwarze Löcher

Bei welcher Dichte der Phasenübergang zum Quark-Gluon-Plasma einsetzt und welche Eigenschaften dieser Übergang im Detail hat ist weitgehend unbekannt. Theoretische Modellierung mittels unterschiedlicher effektiver Elementarteilchenmodelle.



# Die Einstein Gleichung

Vor etwa 100 Jahren präsentierte Albert Einstein die Grundgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie – die sogenannte **Einstein-Gleichung**:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

**Raumzeitkrümmung**  
Eigenschaften der Metrik  
der Raumzeit

**Masse, Energie und Impuls des Systems**  
Zustandsgleichung der Materie  
Druck ( Dichte , Temperatur )

# Neutron Stars

# Black Holes

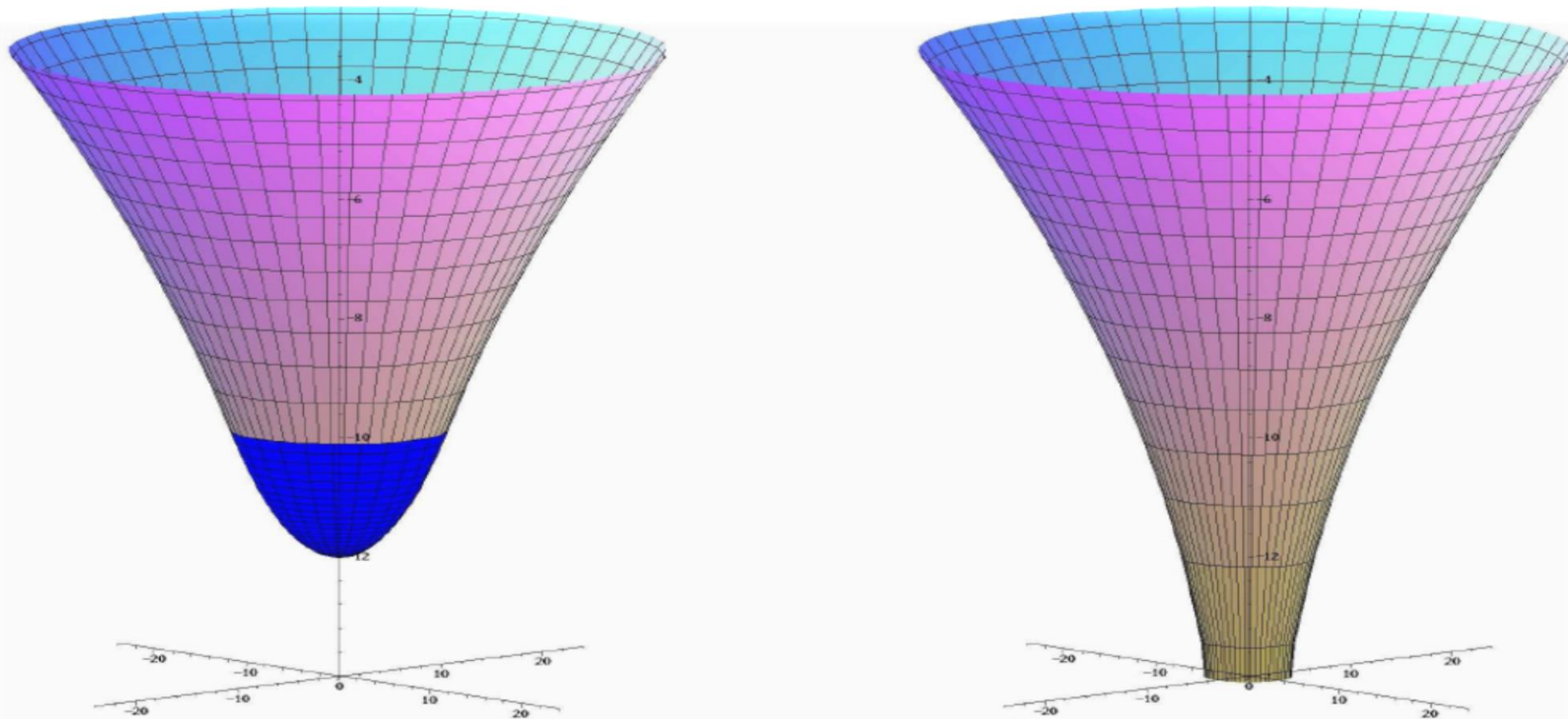


Abbildung 2.5: Eingebettetes Raumzeitdiagramm eines Neutronensterns (links) und eines schwarzen Loches (rechts) wobei  $M = 1.4 M_{\odot}$  und die x- und y-Achse in Einheiten km dargestellt sind.



# From the Einstein equation to the TOV equation

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} . \quad (2.45)$$

Das Einsetzen dieses Ansatzes der Metrik in die Einsteingleichung

$$G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} R g^\mu{}_\nu = 8\pi\kappa T^\mu{}_\nu \quad (2.46)$$

liefert das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} G^t{}_t &= -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} &= 8\pi\kappa T^t{}_t \\ G^r{}_r &= -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} &= 8\pi\kappa T^r{}_r \\ G^\theta{}_\theta &= -\frac{e^{-\lambda}}{2} \left( \nu'' - \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{(\nu')^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) &= 8\pi\kappa T^\theta{}_\theta \\ G^\phi{}_\phi &= G^\theta{}_\theta &= 8\pi\kappa T^\phi{}_\phi \end{aligned} \quad (2.47)$$

# Der Energie-Impuls Tensor

1..3,  $i \neq j$ ) vernachlässigen. Der Energieimpulstensor  $T^{\mu\nu}$  einer solchen idealen Flüssigkeit, lokal betrachtet an seinem Ort, kann wie folgt geschrieben werden

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P \quad \text{mit: } u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad , \quad (2.48)$$

wobei  $u^\mu$  die 4er Geschwindigkeit der Materie ist,  $\tau$  die lokale Eigenzeit an einem betrachteten Materiepunkt beschreibt ( $d\tau = \sqrt{ds^2} = \sqrt{g_{tt}} dt$ ,  $t$  ist die Koordinatenzeit eines unendlich entfernten Beobachters),  $\epsilon$  die Energiedichte und  $P$  der Druck der Materie ist.

# Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung

als die **Tollman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichungen**

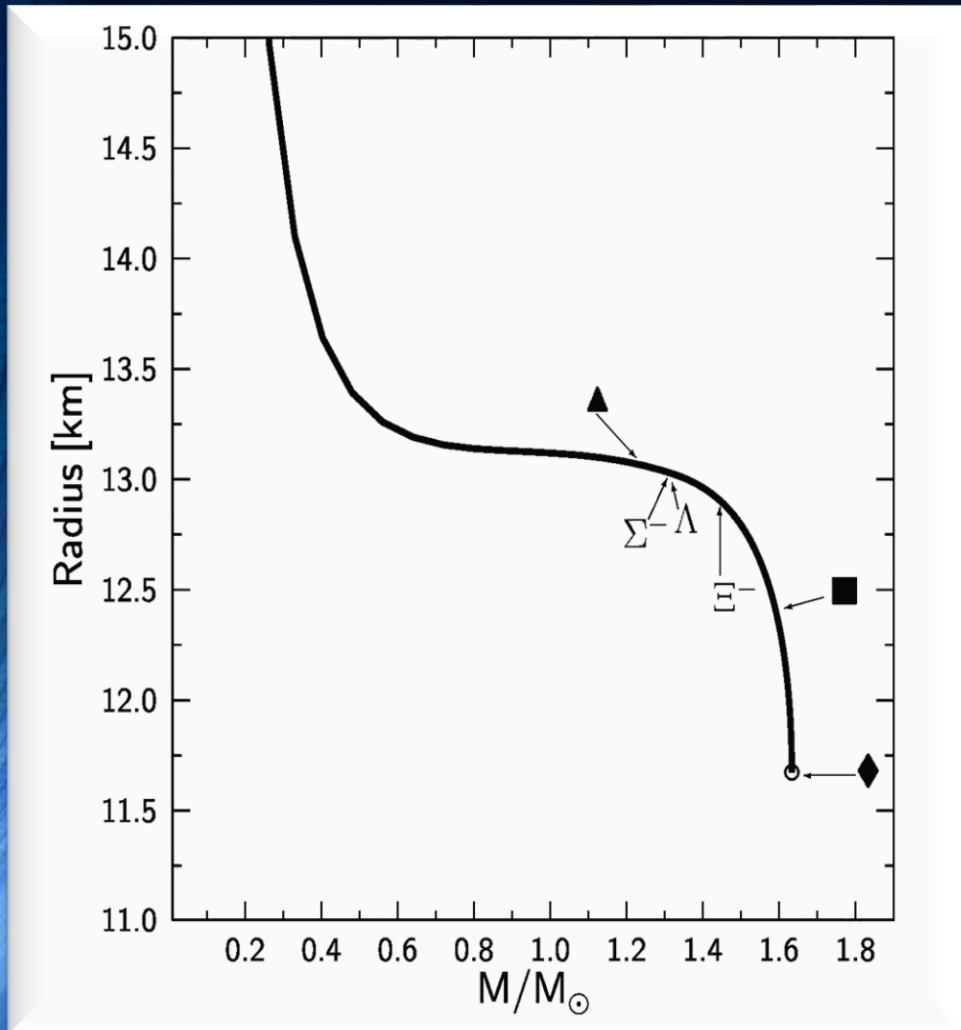
$$\begin{aligned}\frac{dP}{dr} &= -\frac{(\epsilon + P)4\pi r^3 + m}{r(r - 2m)} \\ m(r) &= \int_0^r 4\pi \tilde{r}^2 \epsilon(\tilde{r}) d\tilde{r} \\ \frac{d\nu}{dr} &= \frac{8\pi P r^3 + 2m}{r(r - 2m)},\end{aligned}\tag{2.61}$$

wobei die raumzeitliche Struktur durch die folgenden Ausdrücke bestimmt ist

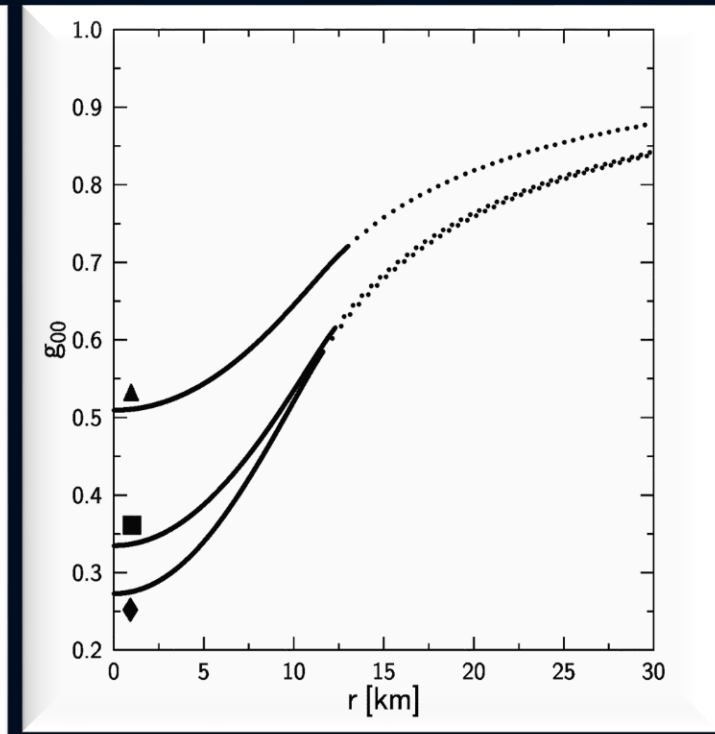
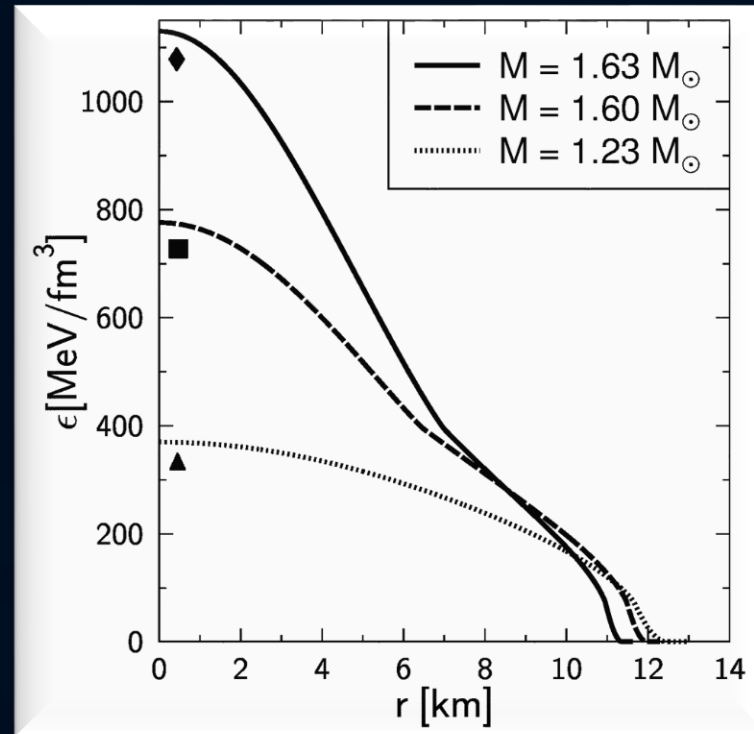
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$
$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

# Neutron Star Properties

Left: The neutron star radius as a function of its mass. A low, middle and high density star is displayed within the figure. Additionally the onset of hyperonic particles is visualized.



Middle: Energy density profiles of three neutron stars with different central densities and masses. The low density stars do not contain any hyperons, whereas the other two stars do have hyperons in their inner core.



Right: Time-time component of the metric tensor as a function of the radial coordinate. The solid line corresponds to the inner TOV-solution, whereas the dotted curve depicts the outer Schwarzschild part.