Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
28. APRIL, 2017

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

3. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Der Vorlesungstermin am 19.05.2017 wird von Herrn Elias Most (Doktorand in der Gruppe von Herrn Luciano Rezzolla) vertreten. Der Termin am 26.05.2017 fällt aus und wird auf einen anderen Termin verschoben – Termin wird noch festgelegt.

<u>Plan für die heutige Vorlesung:</u>
Kurze Wiederholung der letzten Vorlesung, Geodätengleichung in der Schwarzschild-Raumzeit für unterschiedliche Anfangsbedingungen eines Probekörpers mit Maple lösen, Klassifizierung der möglichen unterschiedlichen Bahnbewegungen mittels eines effektiven Potentials, Animationen und Schleifen in Maple, die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (ISCO) eines Probekörpers, Bewegung von Licht um ein schwarzes Loch, die Photonensphäre eines schwarzen Loches

Die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Maple Ausgabe bei festgelegter Schwarzschild-Raumzeit

$$
\begin{aligned}
eqns := \Bigg\{ & \frac{d^2}{d\lambda^2} t(\lambda) - \frac{2\,M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda)\right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)}{r\,(-r + 2\,M)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \\
& + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda)\right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda)\right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda)\right)}{\sin(\theta)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\
& + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda)\right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda)\right)^2 = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\
& - \frac{(-r + 2\,M)\,M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda)\right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2}{r\,(-r + 2\,M)} + (-r + 2\,M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda)\right)^2 + (\\
& -r + 2\,M) \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda)\right)^2 = 0 \Bigg\}
\end{aligned}
$$

Anfangsbedingungen

Zum Lösen des Systems von Differentialgleichungen müssen die Anfangsbedingungen des Probekörpers festgelegt werden
z.B. wo befindet sich der Probekörper zur Eigenzeit λ=0: r(0)=10

Die Anfangsbedingung für t'(0) erhält man z.B. mittels der folgenden Bedingungen aus dem infinitesimalen Weglängenelement ds:

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{dr=d\theta=d\phi=0 \text{ bei } t=0} \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt^2}{d\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Keine Anfangsgeschwindigkeit

Anfangsgeschwindigkeit in der äquatorialen Ebene:

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{dr=d\theta=0\,,\ \theta=\pi/2 \text{ bei } t=0} \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt^2}{d\lambda^2} - r^2\frac{d\phi^2}{d\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{dt}{d\lambda} = \sqrt{\frac{1 + r^2\frac{d\phi^2}{d\lambda^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Während der Bewegung erhaltene Größen

Zwei Gleichungen der Geodätengleichung lassen sich wie folgt umformulieren:

$$1.\ \text{Gleichung:}\quad \frac{d}{d\lambda}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}\right]=0 \quad\rightarrow\quad \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}=E=const$$

$$2.\ \text{Gleichung:}\quad \frac{d}{d\lambda}\left(r^2\sin^2(\theta)\,\frac{d\phi}{d\lambda}\right)=0 \quad\rightarrow\quad r^2\sin^2(\theta)\,\frac{d\phi}{d\lambda}=l=const \quad ,$$

Die während der Bewegung erhaltenen Größen der Energie (E) und des Drehimpulses (l) lassen sich mittels des Viererimpulses definieren:

Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu$ ergeben ($\lambda=\tau$):

$$p_0 = m\,\frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00}\,\frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00}\,\frac{dt}{d\tau} = m\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = m\,E$$

$$p_3 = m\,\frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33}\,\frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33}\,\frac{d\phi}{d\tau} = -m\left(r^2\sin^2(\theta)\right)\frac{d\phi}{d\tau} = -m\,l$$

Das effektive Potential

Mittels der radialen Gleichung läßt sich das effektive Potential definieren:

$$4.\ \text{Gleichung:} \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V(r,M,l) = \frac{1}{2}\left(E^2 - 1\right)$$

$$\text{wobei:} \qquad V(r,M,l) = \frac{l^2}{2r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{M}{r} \qquad ,$$

Alternative Definition (siehe Buch von Prof. Rezzolla):

$$4.\ \text{Gleichung:} \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(V(r,M,l)\right)^2 = E^2$$

$$\text{wobei:} \qquad V(r,M,l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)} \qquad ,$$

Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich