Blatt 10

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 02.02.2021 18 Uhr über das Abgabetool auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabetool finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link
https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/9596239873
/CourseNode/102408662028611

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

27) Adiabatengleichungen des idealen Gases *(4=2+2 Punkte)*

Betrachten Sie ein ideales Gas mit bekannter Wärmekapazität C_V und konstanter Teilchenzahl N.

(i) Das Gas befinde sich in einem Volumen V_1, mit Anfangstemperatur T_1 und werde adiabatisch auf ein Volumen V_2 komprimiert. Bestimmen Sie die bei der Kompression am Gas geleistete Arbeit einmal als Funktion von (C_V, γ, T_1) und einmal als Funktion von (C_V, γ, T_2), mit T_2 der Temperatur nach der Kompression.

(ii) Betrachten Sie einen Kreisprozess bestehend aus zwei isochoren und zwei adiabatischen Prozessen, die jeweils abwechselnd aufeinander folgen. Ein ideales Gas durchlaufe diesen Kreisprozess. Bestimmen Sie die am idealen Gas geleistete Arbeit.

28) Alternative Herleitung der Quantenstatistik idealer Gase *(6=2+2+2 Punkte)*

Wir wollen die mittlere Besetzungszahl von idealen Gasen herleiten, wobei die Besetzungszahlen mit $n_k \in \{1, \ldots, m\}$ allgemein beschränkt seien. Betrachten Sie ein ideales Gas, dessen Atome verschiedene Energieniveaus ϵ_k annehmen können.

(i) Berechnen Sie das großkanonische Potenzial der Gasteilchen im k-ten Quantenzustand Ω_k.
Hinweis: $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

(ii) Zeigen Sie, dass die mittlere Besetzungszahl des Gases gegeben ist durch

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} - \frac{m+1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)(m+1)} - 1}.$$

(iii) Berechnen Sie $\langle n_k \rangle$ für die Grenzfälle $m \to \infty$ $(\mu < 0)$ und $m = 1$ und identifizieren Sie die Quantengase.

29) Quantengas im unendlich tiefen Potentialtopf *(10=6+4 Punkte)*

In der Vorlesung haben sie das großkanonische Potenzial für ein Quantengas bestehend aus Bosonen oder Fermionen hergeleitet

$$\Omega(V,T,\mu) = -k_B T \sum_k f(e^{-\beta(\epsilon_k-\mu)}),$$

wobei $f(x) = -\ln(1-x)$ für Bosonen und $f(x) = \ln(1+x)$ für Fermionen.

(i) Betrachten Sie ein ideals Quantengas in einem 3-dimensionalen unendlich tiefen Potentialtopf $(-L/2 \leq x, y, z \leq L/2\ )$.
Zeigen Sie, ausgehend von dem in der Vorlesung hergeleieten Ausdruck, dass das großkanonische Potenzial im Limes $V = L^3 \to \infty$ wie folgt gegeben ist

$$\Omega(V,T,\mu) = -T\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty \sqrt{\epsilon} f(e^{-\beta(\epsilon-\mu)})d\epsilon.$$

Verwenden Sie die Randbedingungen der Wellenfunktion jedes quantenmechanischen Teilchens im Potenzial

$$\psi(x = \pm L/2) = \psi(y = \pm L/2) = \psi(z = \pm L/2) = 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Energieeigenwerte des quantenmechanischen Potenzialtopfes, sowie die Wellenzahlen $\mathbf{k}$.

(ii) Für relativistische Teilchen sind die Energieeigenwerte des Potenzialtopfes gegeben als

$$\epsilon(\mathbf{n}) = \sqrt{m^2c^4 + \left(\frac{2\pi c\hbar\mathbf{n}}{L}\right)^2},$$

wobei sich der Impuls eines Teilchens als $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = \frac{2\pi\hbar}{L}\mathbf{n}$ identifizieren lässt, mit $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ und $n_i \in \mathbb{Z}$.
Zeigen Sie analog zu (i), dass im Limes $L \to \infty$ für das großkanonische Potenzial folgt

$$\Omega = -TV\int f\left(e^{-\beta\left(c\sqrt{m^2c^2+\mathbf{p}^2}-\mu\right)}\right)\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$