

Blatt 9

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 26.01.2021 18 Uhr über das Abgabewerkzeug auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabewerkzeug finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link <https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/9596239873/CourseNode/102408662028611>

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

25) Rotierendes Boltzmann-Gas (*8=5+3 Punkte*)

Betrachten Sie ein Boltzmann Gas, das sich in einem zylindrischen Gefäß mit Radius R und Höhe h befindet. Dieses Gas rotiere im Inneren des Zylinders mit einer Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$. Es ist möglich, die Auswirkungen der Rotation auf das Gas durch die Hinzunahme eines zusätzlichen Potentials (das der zugehörigen Zentrifugalkraft entspricht)

$$V_{rot}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$$

zu beschreiben, in dem sich die einzelnen Gasmoleküle bewegen.

- (i) Zeigen Sie, dass sich die freie Energie des rotierenden Boltzmann-Gases schreiben lässt als

$$F = F_0 - NT \ln \left(\frac{1}{V} \int e^{-V_{rot}(\mathbf{r})/T} dV \right),$$

mit F_0 der aus der Vorlesung bekannten freien Energie des Boltzmann-Gases. Berechnen Sie anschließend das Volumenintegral im rotierenden Koordinatensystem.

- (ii) Berechnen Sie die innere Energie E des Gases.

Hinweis: Sie können die innere Energie des ruhenden Gases E_0 als gegeben betrachten und brauchen diese nicht zu berechnen.

26) Gas aus zweiatomigen Molekülen (12=2+4+4+2 Punkte)

Betrachten wir im folgenden ein ideales Molekülgas, das sich aus zwei verschiedenartigen Atomen zusammensetzt.

In der Vorlesung wurde die freie Energie eines idealen Boltzmann-Gas hergeleitet

$$F = -NT \ln \left[\frac{eV}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_k e^{-\frac{\epsilon'_k}{T}} \right],$$

mit ϵ'_k der Energie der einzelnen Quantenzustände mit Quantenzahlen k , die jedes Molekül besitzt. Wir nehmen im Folgenden an, die Elektronen in unseren zweiatomigen Molekülen befänden sich im niedrigsten Zustand, so dass ihre Energie einer konstanten Elektronenenergie ϵ_0 entspricht. Die Energieniveaus eines zweiatomigen Moleküls sind dann als

$$\epsilon_{n,K} = \epsilon_0 + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2I} K(K+1)$$

gegeben, mit einem Beitrag der Schwingungsenergie, mit Schwingungsquantenzahl n und einem Beitrag der Rotationsenergie, mit Rotationsquantenzahl K und Trägheitsmoment I des Moleküls.

- (i) Zeigen Sie, dass die freie Energie als Superposition der einzelnen Beiträge gegeben ist

$$F = -NT \ln \left[\frac{eV}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right] + F_{Rot} + F_{Schw} + N\epsilon_0.$$

Hinweis: Beim Summieren der Rotationsquantenzahlen K ist es nötig, in der Zustandssumme Z_{Rot} einen Entartungsfaktor $g_K = 2K + 1$ zu berücksichtigen, der die Entartung der Rotationsmoden entlang der Richtung der Rotationsachsen zählt.

- (ii) Bestimmen wir zunächst den Beitrag von Rotationen zur freien Energie F_{Rot} . Betrachten Sie den Grenzfall hoher Temperaturen $T \gg \frac{\hbar^2}{2I}$ und berechnen Sie die freie Energie F_{Rot} . Berechnen Sie anschließend den Beitrag der Rotationen zur Wärmekapazität c_V .

Hinweis: Argumentieren Sie, dass Sie im Grenzfall hoher Temperaturen die Summation der Quantenzahlen K durch ein Integral ersetzen können, sowie dass große Quantenzahlen K dominieren und man $(K+1) \approx K$ approximieren kann.

- (iii) Berechnen Sie nun den Beitrag der Schwingungen zur freien Energie F_{Schw} . Bestimmen Sie anschließend den Beitrag zur Wärmekapazität und kommentieren Sie dabei auch die Temperaturabhängigkeit. Betrachten Sie anschließend den Grenzfall hoher Temperaturen $T \gg \hbar\omega$ und entwickeln Sie die Wärmekapazität bis zur Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)$.

Hinweis: Nutzen Sie die geometrische Reihe bei der Summation der Quantenzahlen.

- (iv) Geben Sie die Wärmekapazität c_V des zweiatomigen Molekülgas für hohe Temperaturen an und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus dem Gleichverteilungssatz bekannten Ergebnis

$$c_V = \frac{l}{2},$$

für geeignete Wahl von l im Falle des zweiatomigen Molekülgas.