Blatt 7

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 12.01.2021 18 Uhr über das Abgabetool auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabetool finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link
https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/9596239873
/CourseNode/102408662028611

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

20) N harmonische Oszillatoren *(10=2+2+3+3 Punkte)*

Die statistische Verteilungsfunktion für N harmonische Oszillatoren von N Teilchen (mit Masse $m = 1$), gegeben durch die Gesamtenergie $H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(p_i^2 + \omega^2 q_i^2)$, kann aus der Gibbs Verteilungsfunktion hergeleitet werden.

(i) Zeigen Sie für den klassischen harmonischen Oszillator, dass für die Verteilungsfunktion der Ortskoordinate q gilt:

$$dw_q = \frac{\omega}{\sqrt{2\pi k_B T}} e^{-\frac{\omega^2 q^2}{2k_B T}} dq.$$

(ii) Für N quantenmechanische harmonische Oszillatoren gilt:

$$dw_q = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\tanh\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-q^2\frac{\omega}{\hbar}\tanh\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) dq.$$

Zeigen Sie, dass hieraus im Limes $\hbar \to 0$ das klassische Resultat (i) hervorgeht.

(iii) Welches Resultat erhält man im Limes $\hbar\omega \gg k_B T$? Zeigen Sie, dass es sich dabei um die Wahrscheinlichkeitsdichte der Ortskoordinate im Grundzustand handelt.
Hinweis: Die Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators in Ortsdarstellung zu den Energieniveaus $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ *sind gegeben als*

$$\psi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} H_n\left(q\sqrt{m\omega/\hbar}\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2}$$

mit $H_n(x)$ *den Hermite Polynomen.*

(iv) Argumentieren Sie, warum für die Verteilungsfunktion der Impulskoordinate p gilt

$$dw_p = \left(\frac{1}{\pi\hbar\omega}\tanh\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-p^2\frac{1}{\hbar\omega}\tanh\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) dp.$$

Zeigen Sie, dass sich im Limes $\hbar \to 0$ die Maxwell-Verteilung ergibt.

21) Ultrarelativistisches ideales Gas *(10=3+2+1+1+2+1 Punkte)*

Gegeben sei ein ultrarelativistisches ideales Gas. Die Energie des i-ten Teilchens im ultrarelativistischen Limes ist gegeben als $\epsilon_i = |\vec{p}_i|c$.

(i) Leiten Sie die Zustandssumme $Z(T,V,N)$ im kanonischen Ensemble her.

(ii) Berechnen Sie daraus die freie Energie $F(T,V,N)$ und nutzen Sie die Stirling Formel um zu vereinfachen.

(iii) Berechnen Sie den Druck $P(T,V,N)$,

(iv) das chemische Potential $\mu(T,V,N)$,

(v) die Entropie $S(T,V,N)$ und

(vi) die innere Energie $E(T,V,N)$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!

Weihnachtsaufgabe: Reißverschlussproblem

(Die Bearbeitung der Weihnachtsaufgabe ist freiwillig. Die beste eingereichte Lösung wird mit einer Flasche Wein prämiert.)

Betrachten Sie einen Reißverschluss mit N Gliedern. Zum Öffnen eines Gliedes werde die Energie ϵ benötigt (ein geschlossenes Glied habe die Energie 0). Der Reißverschluss kann nur thermisch von oben nach unten geöffnet werden, und das Glied mit der Nummer s kann nur geöffnet werden, wenn alle darüberliegenden Glieder $(1, 2, \ldots, s-1)$ bereits geöffnet sind. Wir nehmen an, dass jedes Glied im geöffneten Zustand g-fach entartet ist.

(i) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme als Funktion von $x = ge^{-\beta\epsilon}$, mit $\beta = 1/T$.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe von (i) die mittlere Anzahl $\langle s \rangle$ geöffneter Glieder als Funktion von x. Zeichnen Sie $\langle s \rangle (x)$ für $N = 1024$.

(iii) Berechnen Sie die Entropie und die Wärmekapazität bei konstantem Volumen (C_V). Untersuchen Sie analytisch die Umgebung von $x = 1$ und betrachten Sie auch den thermodynamischen Limes $N \to \infty$. Zeichnen Sie die Größen in Abhängigkeit von x für $N = 1024$ und diskutieren Sie den Effekt verschiedener Entartungsgrade g.

(iv) Betrachten Sie nun $\langle s \rangle$ im thermodynamischen Limes $N \to \infty$. Diskutieren Sie das Verhalten in der Umgebung $x = 1$. Können Sie dieses Verhalten physikalisch interpretieren?

(v) Bestimmen Sie die Temperatur T_c an der Stelle $x = 1$ in Abhängigkeit von ϵ und g. Diskutieren Sie den nichtentarteten Spezialfall $g = 1$.