

Blatt 4

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 01.12.2020 18 Uhr über das Abgabewerkzeug auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabewerkzeug finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link <https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/9596239873/CourseNode/102408662028611>

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

10) Adiabatische Expansion ($2+2+4=8$ Punkte)

Gegeben sei das folgende Phasenvolumen eines Gases mit fester Teilchenzahl N , in konstantem Volumen V

$$\Gamma(E, V, N) = f(N)V^N E^{\frac{3N}{2}}.$$

- (i) Bestimmen Sie die Temperatur und geben Sie die Zustandsgleichung in der Form

$$E = g(T, N)$$

an.

- (ii) Bestimmen Sie den Druck und geben Sie die Zustandsgleichung in der Form

$$P = w(E, N)$$

an.

- (iii) Zeigen Sie, dass für eine adiabatische Zustandsänderung

$$PV^{\frac{5}{3}} = \text{const.}$$

gilt.

Hinweis: Nutzen Sie den 1. Hauptsatz.

11) Differenziale (2+2=4 Punkte)

Seien x, y, z Größen, die einer Zustandsgleichung $f(x, y, z) = 0$ gehorchen.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

Hinweis: Betrachten Sie das totale Differential df und beachten Sie, welche Größen konstant sind.

12) Stirlingformel und Shannon Entropie (2+3+3=8 Punkte)

(i) Beweisen Sie, dass $\log(n!)$ für sehr große n wie folgt approximiert werden kann (Stirlingformel):
 $\ln(n!) \simeq n \ln(n) - n$.

Hinweis: Schreiben Sie $\ln(n!)$ als Summe und argumentieren Sie, dass diese für große n in ein Integral übergeht.

(ii) Betrachten Sie N Subsysteme (z.B. N identisch gezinkte Würfel), die m Zustände (z.B. Augenzahlen) mit Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{w_1, \dots, w_m\}$ annehmen können. Zeigen Sie, dass die Gesamtheit aller Zustände gegeben ist durch $\Gamma = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_m!}$, wobei ein Zustand des Systems durch die Zahlen $\{N_k\}$ der Subsysteme im Zustand $k \in \{1, \dots, m\}$ charakterisiert ist, mit $\sum_{k=1}^m N_k = N$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass sie iterativ auswählen können: N_1 aus N Subsystemen im Zustand $k = 1$: $\binom{N}{N_1}$, N_2 aus $N - N_1$ Subsystemen im Zustand $k = 2$: $\binom{N - N_1}{N_2}$, etc.

(iii) Es ist möglich die Entropie $S = \ln \Gamma$ des in (ii) betrachteten Gesamtsystems Γ anzugeben. Zeigen Sie mit Hilfe der Stirlingformel, dass sich für sehr grosse N die folgende Form ergibt:

$$S = -N \sum_{k=1}^m w_k \ln(w_k), \quad \text{wobei} \quad w_k = \frac{N_k}{N}.$$

Diese Entropie ist eine Darstellung der sogenannten Shannon Entropie für N unabhängige Systeme. Die Shannon Entropie ist ein Maß für den Informationsgehalt einer Nachricht, sie gibt den Informationsgehalt pro Zeichen einer Quelle an. Die Shannon Entropie findet vor allem in der Informatik Anwendung.