

Blatt 3

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 24.11.2020 18 Uhr über das Abgabewerkzeug auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabewerkzeug finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link <https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/9596239873/CourseNode/102408662028611>

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängendenen, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

7) Mikrokanonisches Ensemble in der Quantenstatistik (4+4=8 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie das mikrokanonische Ensemble in der Quantenstatistik kennengelernt. Für die Dichtematrix von Mikrozuständen in einem quasi-abgeschlossenen Untersystem gilt

$$\hat{\rho} = \sum_n \rho_n \hat{P}_n = \sum_n \rho_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad \rho_n = \begin{cases} \frac{1}{\Delta\Gamma(E_0, V, N)} & E_0 \leq E_n \leq E_0 + \Delta E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

mit ψ_n den zu E_n gehörigen Energieeigenzuständen.

(i) Die aus der Vorlesung bekannte allgemeine Definition der Dichtematrix lautet

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} |\Psi_{\alpha}\rangle \langle \Psi_{\alpha}|,$$

mit Wahrscheinlichkeiten $\sum_{\alpha} \omega_{\alpha} = 1$ und reinen Zuständen

$$|\Psi_{\alpha}\rangle = \sum_n c_{\alpha n} |\psi_n\rangle.$$

Zeigen Sie, dass

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} = \sum_n \rho_n \hat{P}_n.$$

Bestimmen Sie dazu ρ_n als Funktion von $c_{\alpha n}$ und ω_{α} , indem Sie $\text{tr}(\hat{\rho})$ in der Energiebasis auswerten.

(ii) Zeigen Sie, dass auch im mikrokanonischen Ensemble der Quantenstatistik für $\Delta E \ll 1$ gilt

$$\langle \hat{H} \rangle = E_0$$

8) Äquivalente Definitionen der Entropie (3+3=6 Punkte)

Das Volumen einer d -dimensionalen Kugel ist gegeben als

$$V(r) = \frac{2(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}}{d!!} r^d,$$

mit der Doppelfakultät $d!!$.

- (i) Zeigen Sie, dass für große Dimensionen d das gesamte Volumen der d -dimensionalen Kugel in einer dünnen Schicht an der Oberfläche zu finden ist.

Hinweis: Betrachten Sie das Volumen einer dünnen Kugelschale mit Breite ΔR , dass sich direkt an der Oberfläche einer Kugel mit Radius R befindet und vergleichen Sie dieses mit dem Volumen der gesamten d -dimensionalen Kugel. Betrachten sie schließlich den Grenzfall großer Dimensionen.

- (ii) In der Vorlesung haben Sie die Entropie als

$$S(E_0, V, N) = \ln(\Delta\Gamma(E_0, V, N))$$

definiert, mit $\Delta\Gamma(E_0, V, N)$ dem Phasenraumvolumen einer Schale mit Breite $[E_0 \leq E \leq E_0 + \Delta E]$. Nutzen Sie (i) um zu argumentieren, dass die Definitionen

$$S(E_0, V, N) = \ln(\Gamma(E_0, V, N)), \quad S(E_0, V, N) = \ln(\Omega(E_0, V, N)),$$

mit $\Gamma(E_0, V, N)$ dem Phasenraumvolumen $[E \leq E_0]$, bzw. der Zustandsdichte $\Omega(E_0, V, N)$, im Falle von statistischen Systemen äquivalent sind.

9) Spinsystem (6=2+4 Punkte)

Betrachten Sie ein System, bestehend aus N freien Teilchen vom Spin $\frac{1}{2}$. Die kinetische Energie der Teilchen sei vernachlässigbar klein. Jedes Teilchen hat wegen des Spins ein magnetisches Moment m , das sich parallel oder antiparallel zu einem angelegten konstanten Magnetfeld H einstellen kann. Die Energie des Systems ist dann gegeben durch

$$E_n = -(n - n')mH, \quad n' = N - n,$$

mit n die Anzahl der zum Feld parallel (und n' antiparallel) ausgerichteten Spins.

- (i) Geben Sie die Zustandsdichte $\Omega(E_n) = \frac{\Delta\Gamma(E_n)}{\Delta E}$ an (mit $\Delta\Gamma(E_n)$ der Zahl der Mikrozustände mit Energie E_n und ΔE der minimalen positiven Energiedifferenz zwischen zwei Mikrozuständen).
- (ii) Berechnen Sie daraus die Entropie als Funktion von E_n . (Skizze!)