Bonus-Blatt 13

Die Punkte des Bonus-Blattes zählen nicht zu der Gesamtzahl der notwendigen 50% der Punkte auf alle Blätter, die zum Erreichen der Studienleistung benötigt werden. Die erreichten Punkte auf dem Bonusblatt werden allerdins zu diesen hinzugezählt.

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 13.07.2021 18 Uhr über das Abgabetool auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabetool finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link
https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/11327635464/CourseNode/103409770339160

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

38) Ortserwartungswerte im Wasserstoffatom *(2+2+2+2=8 Punkte)*

(i) Bestimmen Sie die Zustände $\psi_{100}(r,\theta,\phi)$ und $\psi_{211}(r,\theta,\phi)$ für das Elektron des Wasserstoffatoms, indem sie die Kugelflächenfunktionen und zugeordneten Laguerre-Polynome berechnen. Drücken Sie Ihre Antwort mithilfe des Bohr'schen Radius aus (das gilt auch für die folgenden Aufgaben).

(ii) Ermitteln Sie $\langle r\rangle$ und $\langle r^2\rangle$ für den Grundzustand.

(iii) Berechnen Sie $\langle x\rangle$ und $\langle x^2\rangle$ für den Grundzustand.
Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie des Grundzustandes aus und dass $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

(iv) Rechnen Sie $\langle x^2\rangle$ für den Zustand ψ_{211} aus.
Hinweis: Dieser Zustand ist nicht symmetrisch in x, y, und z. Setzen Sie $x = r\sin\theta\cos\phi$ an.

39) Drehung von Spinoren *(2+4+2+2+2=12 Punkte)*

(i) Lösen Sie die Eigenwertgleichung für die x-Komponente des Spins, d.h. drücken Sie die $|X_\pm\rangle$ durch die in der Vorlesung gegebene Eigenbasis $|+\rangle$, $|-\rangle$ von S_z aus.

$$S_x\,|X_\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}\,|X_\pm\rangle \qquad \text{mit} \qquad S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{1}$$

(ii) Wir verallgemeinern nun auf Spinkomponenten bezüglich beliebiger Richtungen

$$\vec{e} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta). \tag{2}$$

Berechnen Sie $S_{\vec{e}} = \vec{e}\cdot\vec{S}$ und lösen Sie die Eigenwertgleichung

$$S_{\vec{e}}|\vec{e}_\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\vec{e}_\pm\rangle. \tag{3}$$

(iii) Zeigen Sie, dass

$$e^{i(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\,\theta/2} = \cos(\theta/2)\,\mathbb{1} + i\sin(\theta/2)\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}). \tag{4}$$

(iv) Eine Drehung eines Ortsvektors $\vec{r}$ wird beschrieben durch

$$\vec{r} \to \vec{r}' = R(\vec{\alpha}) \cdot \vec{r}. \tag{5}$$

Damit lässt sich zeigen, dass ein Spinor χ unter Drehung transformiert wie

$$\chi \to \chi' = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha} \cdot \vec{S}\right)\chi \equiv U_S(\vec{\alpha})\chi. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass bei Drehung um 2π gilt: $\chi' = -\chi$, dass also eine vollständige Drehung nicht zum gleichen Vektor im Hilbertraum führt.
Hinweis: Betrachten Sie die spezielle Drehung mit $\vec{n} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, berechnen Sie $U_S(\vec{\alpha})$ und setzen ein: $\alpha = 2\pi$.

(v) Wie transformiert die gesamte Wellenfunktion $\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix}\psi_+(\vec{r})\\ \psi_-(\vec{r})\end{pmatrix}$ unter Rotation um $\vec{\alpha}$?

Erläutern Sie damit die Addition von Spin $\vec{S}$ und Bahndrehimpuls $\vec{L}$.
Verwenden Sie: Für Drehungen durch $\vec{L}$ gilt:

$$U_L(\vec{\alpha})\psi(\vec{r}) = \psi(R(-\vec{\alpha}) \cdot \vec{r}).$$

Betrachten Sie nun $U_L U_S \psi$ und bedenken Sie, in welchem Raum U_L, U_S wirken.