

Blatt 12

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 06.07.2021 18 Uhr über das Abgabewerkzeug auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabewerkzeug finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link <https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/11327635464/CourseNode/103409770339160>

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

35) Drehimpulsoperator (2+4+4=10 Punkte)

Der Drehimpulsoperator ist definiert als

$$\hat{L} = \hat{x} \times \hat{p}. \quad (1)$$

(i) Benutzen Sie die kartesische Darstellung

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (2)$$

um zu zeigen, dass $(x \pm iy)^m$ Eigenfunktionen von \hat{L}_z sind.

(ii) Zeigen sie die Identität

$$\hat{L}^2 = \hat{x}^2 \hat{p}^2 - (\hat{x} \cdot \hat{p})^2 + i\hbar \hat{x} \cdot \hat{p}. \quad (3)$$

(iii) Berechnen Sie $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$ und $[\hat{L}_i, \hat{L}^2]$.

36) Unschärfe beim Drehimpuls (2+2=4 Punkte)

Ein physikalisches System befinde sich in einem Eigenzustand $|l, m\rangle$ zu \hat{L}^2 und \hat{L}_z .

(i) Bestimmen sie die quadratischen Schwankungen ΔL_x und ΔL_y .

Hinweis: Drücken sie \hat{L}_x und \hat{L}_y durch Leiteroperatoren aus.

(ii) Wann wird das Unschärfeprodukt $\Delta L_x \Delta L_y$ für festes l minimal?

Zeigen Sie dass es Zustände gibt, für die $\Delta L_x \Delta L_y = 0$ gilt. Warum steht dies nicht im Widerspruch zur Heisenberg'schen Unschärferelation?

37) Drehimpulsmessung beim Wasserstoffatom (3+3=6 Punkte)

Gegeben Sei der folgende Zustand des Elektrons im Wasserstoffatom:

$$|\psi\rangle = \alpha |1, 0, 0\rangle + \beta |2, 0, 0\rangle + \gamma(|2, 1, 0\rangle + |2, 1, -1\rangle + |2, 1, 1\rangle), \quad (4)$$

mit $|n, l, m\rangle$ der Energiequantenzahl n , den Drehimpulsquantenzahlen l, m und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

- (i) Berechnen Sie die Erwartungswerte von \hat{L}_z und \hat{L}^2 .
- (ii) Bestimmen Sie die Konstanten α, β und γ so, dass
 - (a) sie reell und positiv sind,
 - (b) $|\psi\rangle$ normiert ist und ein Energieeigenzustand ist und
 - (c) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von \hat{L}^2 den Wert $2\hbar^2$ zu erhalten, $1/2$ beträgt.