Blatt 11

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 29.06.2021 18 Uhr über das Abgabetool auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabetool finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/11327635464/CourseNode/103409770339160

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

32) Unschärfe im eindimensionalen Harmonischen Oszillator *(4+1=5 Punkte)*

(i) Berechnen Sie für den Eigenzustand $|n\rangle$ des harmonischen Osziallators mittels der algebraischen Methode die Erwartungswerte $\langle n|\hat{x}|n\rangle$, $\langle n|\hat{x}^2|n\rangle$, $\langle n|\hat{p}|n\rangle$, $\langle n|\hat{p}^2|n\rangle$, wobei

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \qquad \hat{p} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger).$$

(ii) Berechen Sie damit das Unschärfeprodukt $\Delta x \Delta p$.

33) Energieeigenfunktionen im eindimensionalen Harmonischen Oszillator *(3 Punkte)*

Berechnen Sie ausgehend von der normierten Grundzustandswellenfuntion

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\xi^2/2}, \qquad \xi \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

mittels des Zusammenhangs

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n \psi_0, \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p})$$

die Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ der ersten zwei angeregten Zustände.

34) Kohärente Zustände *(2+3+2+2+3=12 Punkte)*

Ein kohärenter Zustand (auch Glauber-Zustand genannt) des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist definiert als Eigenzustand des Vernichtungsoperators:

$$\hat{a}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{beliebig.}$$

Erinnern Sie sich, wie Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren auf Energieeigenzustände wirken:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,$$

wobei die Menge der Energieeigenzustände $\{|n\rangle\}$ eine vollständige Basis von Eigenzuständen des Besetzungszahloperators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ ist und es gilt: $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$.

(i) Zeigen Sie, dass
$$|\lambda\rangle = e^{-\lambda^2/2} e^{\lambda \hat{a}^\dagger} |0\rangle.$$

(ii) Zeigen Sie, dass kohärente Zustände minimale Unschärfe besitzen:
$$\langle \Delta x \rangle^2 \langle \Delta p \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4}.$$

(iii) Drücken Sie $|\lambda\rangle$ in der Energiebasis aus, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten f_n mit
$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n\rangle.$$

(iv) Zeigen Sie, dass ein kohärenter Zustand $|\lambda_0\rangle$ zum Zeitpunkt $t = 0$ auch für $t > 0$ kohärent bleibt, wenn die Zeitentwicklung durch den Hamiltonian des harmonischen Oszillators gegeben ist, dass also gilt:
$$|\lambda(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\lambda_0\rangle = |\lambda_0 e^{-i\omega t}\rangle.$$

(v) Zeigen Sie, dass im Falle des harmonischen Oszillators der Ortserwartungswert eines kohärenten Zustands $|\lambda\rangle$ zeitlich oszilliert, dass also gilt:
$$\langle \hat{x} \rangle_\lambda = \sqrt{2} x_0 |\lambda| \cos(\omega t - \phi),$$

wobei ϕ der Phase von λ_0 entspricht. Somit kommen kohärente Zustände den klassischen Schwingungen am nächsten.