Blatt 10

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 22.06.2021 18 Uhr über das Abgabetool auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabetool finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link
https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/11327635464/
CourseNode/103409770339160

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

29) Zeitabhängigkeit von Skalarprodukten *(2 Punkte)*

Zeigen Sie, dass für beliebige Zustandsvektoren $|\psi_1(t)\rangle$, $|\psi_2(t)\rangle$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle = 0,$$

sofern $\frac{\partial}{\partial t}\hat{H} = 0$.

30) Ehrenfest'sches Theorem *(5+5=10 Punkte)*

(i) Leiten Sie mit Hilfe des Ehrenfest'schen Theorems die Bewegungsgleichungen für $\langle p\rangle$, $\langle x\rangle$, $\langle p^2\rangle$, $\langle x^2\rangle$ und $\langle xp+px\rangle$ für den Fall eines eindimensionalen freien Teilchens her.

(ii) Zeigen Sie, dass sich die Ortsunschärfe $\Delta x(t)^2 = \langle x^2\rangle_t - \langle x\rangle_t^2$ eines eindimensionalen freien Teilchens zeitlich gemäß

$$\Delta x(t)^2 = \Delta x(0)^2 + \frac{\Delta p(0)^2}{m^2}t^2$$

entwickelt. Integrieren Sie dazu die zuvor hergeleiteten Bewegungsgleichungen unter der Annahme, dass die Erwartungswerte $\langle x\rangle$ und $\langle xp+px\rangle$ zur Zeit $t=0$ verschwinden, $\langle x\rangle_0 = \langle xp+px\rangle_0 = 0$.

31) Erzeugendes Funktional der Hermite-Polynome *(2+4+2=8 Punkte)*

Zur Lösung des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik wurden in der Vorlesung die Hermite-Polynome eingeführt. Wir zeigen hier, wie man diese effizient berechnen kann.
Die Hermite-Polynome $H_n(z)$ für $n \geq 0$ sind bis auf einen multiplikative Faktor eindeutig dadurch definiert, dass $H_n(z)$:

- ein Polynom n-ter Ordnung mit Parität n ist (d. h. $H_n(-z) = (-1)^n H_n(z)$) und
- eine Lösung der Gleichung

$$H_n'' - 2zH_n' + 2nH_n = 0 \tag{1}$$

ist.

Wir weisen nun nach: Wenn man $H_n(z)$ durch das erzeugende Funktional $S(z,s)$ folgendermaßen definiert:

$$S(z,s) = e^{z^2-(s-z)^2} = e^{-s^2+2sz} \tag{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} s^n, \tag{3}$$

dann ist diese Definition mit den obigen Bedingung konsistent.

(i) Zeigen Sie, dass das durch das erzeugende Funktional definierte H_n ein Polynom n-ter Ordnung mit Parität n ist.

(ii) Weisen Sie nach, dass die so definierten H_n die (1) erfüllen.
Hinweis: Leiten Sie $S(z,s)$ jeweils einmal nach z und s ab und folgern Sie daraus die Gleichungen

$$H_n' = 2nH_{n-1}, \tag{4}$$

$$H_{n+1} = 2zH_n - 2nH_{n-1}. \tag{5}$$

Zeigen Sie dann, dass dies (1) impliziert.

(iii) Da nun klar ist, dass die so definierten $H_n(z)$ in der Tat die Hermite-Polynome sind, leiten Sie mithilfe des erzeugenden Funktionals den Ausdruck

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} e^{-z^2} \tag{6}$$

für die Hermite-Polynome her.