Blatt 9

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 15.06.2021 18 Uhr über das Abgabetool auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabetool finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/11327635464/CourseNode/103409770339160

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

26) Unschärferelation *(3+5=8 Punkte)*

(i) Seien A, B Observablen mit $[\hat{A},\hat{B}] \neq 0$. In der Herleitung der Ungleichung

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4}\left|\left\langle [\hat{A},\hat{B}]\right\rangle\right|^2 \tag{1}$$

wurde als Zwischenschritt (mit $[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}$) die Ungleichung

$$\alpha^2(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2 + \alpha\langle\hat{C}\rangle \geq 0 \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

diskutiert. Zeigen Sie, dass die Wahl $\alpha = -\frac{\langle\hat{C}\rangle}{2(\Delta A)^2}$ die rechte Seite in Gleichung (1) zur größten unteren Schranke macht.

(ii) Zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gauß'schen Wellenpakets zum Zeitpunkt $t = 0$, $|\psi(x,0)|^2 = \mathcal{N}e^{-x^2/(2d^2)}$ die Orts-Impuls-Unschärfe minimal ist, da gilt: $\Delta x\Delta p = \frac{\hbar}{2}$.
Hinweis: Berechnen Sie die Erwartungswerte

$$\Delta x = \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2} \quad \textit{und} \quad \Delta p = \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle}.$$

27) Übung zur Dirac-Schreibweise *(9 Punkte)*

Der Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ habe ein diskretes Spektrum mit dem vollständigen System orthonormierter Eigenzustände $|n\rangle$. Die zugehörigen Eigenwerte seien E_n.
Berechnen Sie zunächst $[[\hat{H},\hat{x}],\hat{x}]$ und beweisen Sie dann:

$$\sum_n (E_n - E_0)|\langle n|\hat{x}|0\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\ .$$

28) Wechsel zwischen Orts- und Impulsdarstellung *(3 Punkte)*

Für einen Zustandsvektor $|\psi\rangle$ ist die Ortsdarstellung $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ und die Impulsdarstellung $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$. Zeigen Sie, dass die "Matrix" für den Basiswechsel gegeben ist durch

$$S(x,p) = \langle x|p\rangle = e^{ipx/\hbar}.$$

Hinweis: Erinnern Sie sich, wie $\tilde{\psi}(p)$ und $\psi(x)$ zusammenhängen.