Blatt 8

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 08.06.2021 18 Uhr über das Abgabewerkzeug auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabewerkzeug finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link <https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/11327635464/CourseNode/103409770339160>

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängendenen, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

23) Zweizustandssystem (3+4=7 Punkte)

Betrachten Sie ein quantenmechanisches System, dessen Hamiltonoperator $\hat{H}_0$ die Eigenzustände $|e_1\rangle$ und $|e_2\rangle$ besitzt

$$\hat{H}_0|e_1\rangle = \omega_1|e_1\rangle, \quad \hat{H}_0|e_2\rangle = \omega_2|e_2\rangle.$$

Hierbei bildet $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen Hilbertraums, mit $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$. Ein Vektor $|\phi\rangle$ des Hilbertraums kann geschrieben werden als

$$|\phi\rangle = c_1|e_1\rangle + c_2|e_2\rangle.$$

- (i) Berechnen Sie $\langle\phi|\phi\rangle$ und den Erwartungswert von $\hat{H}_0$ im Zustand $|\phi\rangle$.
- (ii) Die Operatoren $\hat{R}$ und $\hat{L}$ seien definiert als $\hat{R} \equiv |e_2\rangle\langle e_1|$, $\hat{L} = |e_1\rangle\langle e_2|$. Berechnen Sie:

$$\hat{R}|e_1\rangle, \quad \hat{R}|e_2\rangle, \quad \hat{L}|e_1\rangle, \quad \hat{L}|e_2\rangle, \quad \hat{R}|\phi\rangle, \quad \hat{L}|\phi\rangle.$$

Drücken Sie $\hat{H}_0$ durch ω_1 , ω_2 , $\hat{R}$ und $\hat{L}$ aus. Zeigen Sie, dass $\hat{L}\hat{R}$ und $\hat{R}\hat{L}$ die Eigenschaften von Projektoren haben und auf orthogonale Unterräume projizieren.

24) Operatoren im Hilbertraum (2+2+3=7 Punkte)

Sei $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis eines dreidimensionalen Hilbertraums. Die Matrixdarstellung eines Operators $\hat{H}$ bzgl. dieser Basis sei gegeben durch

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1 & 1 \\ i/\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Finden Sie die Eigenwerte λ_i und orthonormalen Eigenvektoren $|\phi_i\rangle$ von $\hat{H}$.
- (ii) Zeigen Sie mit Hilfe der Korrespondenz “ket” $\leftrightarrow$ Spaltenvektor, “bra” $\leftrightarrow$ Zeilenvektor:

$$\mathbf{1} = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad \hat{H} = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|.$$

(iii) Der Operator $\hat{U}$ sei definiert durch

$$\hat{U}|u_i\rangle = |\phi_i\rangle, \quad i = 1, 2, 3.$$

Berechnen Sie die Matrixdarstellung von $\hat{U}$ bzgl. der Basis $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ und prüfen Sie, ob $\hat{U}$ unitär ist.

25) Energieeigenwerte (2+2+2=6)

Gegeben sei der Hamiltonoperator $\hat{H}$ eines quantenmechanischen Systems mit diskretem Spektrum, dessen kleinster Eigenwert E_0 sei.

- (i) Beweisen Sie, dass der Erwartungswert des Hamiltonoperators in einem beliebigen normierten Zustand $|\psi\rangle$ größer als die Grundzustandsenergie E_0 ist.
- (ii) Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ setze sich nun aus den Hamiltonoperatoren $\hat{H}^{(1)}$ und $\hat{H}^{(2)}$ mit den Grundzustandsenergien $E_0^{(1)}$ und $E_0^{(2)}$ zusammen. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Ungleichung $E_0 \geq E_0^{(1)} + E_0^{(2)}$ gilt.
- (iii) Wir betrachten nun den zweitkleinsten Eigenwert E_1 des Hamiltonoperators $\hat{H}$. Zeigen Sie: Ist der Operator $\hat{O} = (\hat{H} - E_0)(\hat{H} - a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ positiv semidefinit, d. h. $\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle \geq 0 \forall \psi$, so gilt $E_1 \geq a$.