Blatt 7

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 01.06.2021 18 Uhr über das Abgabetool auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabetool finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link
https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/11327635464/CourseNode/103409770339160

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

19) Der Kommutator *(3+2=5 Punkte)*

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei lineare Operatoren und $[\hat{A},\hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ der Kommutator von $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

(i) Überprüfen Sie folgende Eigenschaften:

$$[\hat{A},\hat{B}] = -[\hat{B},\hat{A}], \qquad [\hat{A},\hat{A}] = 0, \qquad [a\hat{A},\hat{B}] = a[\hat{A},\hat{B}],$$
$$[\hat{A},a\hat{\mathbb{1}}] = 0, \qquad [\hat{A}+\hat{B},\hat{C}] = [\hat{A},\hat{C}] + [\hat{B},\hat{C}], \qquad [\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = [\hat{A},\hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B},\hat{C}],$$

Dabei sei $\hat{C}$ ebenfalls ein linearer Operator, $\hat{\mathbb{1}}$ der Identitätsoperator und $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Es gelte für zwei lineare Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$:

$$[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = 0 \qquad \text{und} \qquad [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0.$$

Zeigen Sie, dass daraus folgt:

$$[\hat{A},\hat{B}^n] = n\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}] \qquad \text{und} \qquad [\hat{A}^n,\hat{B}] = n\hat{A}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}] \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

20) Adjungierte Operatoren *(3+2=5 Punkte)*

Beweisen Sie die folgenden Relationen für lineare Operatoren in einem Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$:

(i) $(A^\dagger)^\dagger = A$

(ii) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

21) Hermitesche Operatoren *(2+3=5 Punkte)*

(i) Sei $\hat{A}$ hermitesch. Zeigen Sie, dass auch $\hat{A}^n$ hermitesch ist.

(ii) Sei $\hat{A}$ hermitesch. Zeigen Sie, dass der Operator

$$\hat{U} = \exp\left(i\hat{A}\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\hat{A})^n$$

die Gleichung $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = 1$ erfüllt, d.h., dass U unitär ist.

22) Vektoren im Hilbertraum *(1+2+2=5 Punkte)*

Es sei $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis eines dreidimensionalen Hilbertraums, und

$$|\psi_1\rangle = \alpha\,(i|u_1\rangle + |u_2\rangle - |u_3\rangle)\,, \qquad |\psi_2\rangle = \beta\,(|u_2\rangle + |u_3\rangle)\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$ für alle α, β.

(ii) Finden Sie ein α und ein β, so dass $\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1$.

(iii) Finden Sie ein $|\psi_3\rangle$, so dass $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis bilden.