Blatt 6

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 25.05.2021 18 Uhr über das Abgabetool auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabetool finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link
https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/11327635464/CourseNode/103409770339160

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

16) Erwartungswerte *(3+2+1=6 Punkte)*

Berechnen Sie die Erwartungswerte

(i) der kinetischen Energie $\hat{T} = \hat{\vec{p}}^2/(2m)$,

(ii) des Potentials $\hat{V} = -e^2/r$,

(iii) der Gesamtenergie $\hat{T} + \hat{V}$

in einem Zustand, der durch folgende Wellenfunktion gegeben ist ($r = |\vec{r}|$):

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \ , \qquad a \equiv \frac{\hbar^2}{me^2}. \tag{1}$$

17) Fouriertransformation der freien Schrödingergleichung *(4 Punkte)*

In der Vorlesung haben Sie die Fouriertransformation einer Wellenfunktion $\psi(t, \mathbf{r})$ hinsichtlich ihrer Ortskoordinate $\mathbf{r}$ besprochen:

$$\tilde{\psi}(t, \mathbf{p}) = \int \psi(t, \mathbf{r}) e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} d^3r \qquad \psi(t, \mathbf{r}) = \int \tilde{\psi}(t, \mathbf{p}) e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Betrachten Sie die freie Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(t, \mathbf{r}),$$

und nutzen Sie die Fouriertransformation um die freie Schrödingergleichung in Impulsdarstellung herzuleiten.

18) Tunneleffekt ***(1+1+2+2+2+2=10 Punkte)***

Gegeben sei ein Teilchen mit Masse m und ein Potenzial der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0,\ x > L \\ V_0 & 0 \leq x \leq L\ . \end{cases} \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Tunnelwahrscheinlichkeit

$$T = \left(1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(\kappa L)}{4E(V_0 - E)}\right)^{-1},\ \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$$

in den folgenden Fällen:

(i) Ein Elektron mit Energie $E = 9$ eV, und ein Potenzial mit $L = 10^{-8}$ cm und $V_0 = 10$ eV.

(ii) Ein Proton mit Energie $E = 9$ MeV, und ein Potenzial mit $L = 10^{-13}$ cm und $V_0 = 10$ MeV.

(iii) Ein Auto mit Masse $m = 1000$ kg und Geschwindigkeit $v = 100$ km/h, das versucht, einen 100 m langen Hügel zu durchtunneln. Nehmen Sie an, dass $V_0 - E = 10^{-7}$ Joule (E ist die Energie des Autos). Dem Auto fehlen also nur 10^{-7} Joule, um den Hügel zu überqueren. Wie hoch ist der Hügel in Metern ausgedrückt?

(iv) Zeigen Sie, dass im Regime $T \ll 1$ näherungsweise gilt:

$$T = e^{-2L\kappa}, \qquad \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar. \tag{3}$$

(v) Für ein beliebiges Potenzial $V(x)$ kann T wie folgt hingeschrieben werden:

$$T = e^{-2\int_a^b \kappa(x)dx},\ \kappa = \sqrt{2m[V(x) - E]}/\hbar\ ,\ E = V(a) = V(b)\ , \tag{4}$$

wobei $V(x) \geq E$ für $a \leq x \leq b$. Zeigen Sie, dass Gl. (4) Gl. (3) reproduziert, wenn das Potenzial von Gl. (2) benutzt wird.

(vi) Gegeben sei das Potenzial $V(x) = -x^2 + 1$ für $|x| < 1$, und $V(x) = 0$ für $|x| \geq 1$. Benutzen Sie Gl. (4), um T für eine beliebige Masse m und Energie $E = 0$ zu bestimmen.