Blatt 4

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 11.05.2021 18 Uhr über das Abgabetool auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabetool finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link
https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/11327635464/CourseNode/103409770339160

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

11) Kontinuitätsgleichung *(2+4=6 Punkte)*

(i) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q \left(\phi(\vec{r}, t) - \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \right) \tag{1}$$

unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichung die Lorentzkraft reproduziert.

(ii) Berechnen Sie den zu $\vec{r}$ kanonisch konjugierten Impuls $\vec{p}$ und die Hamiltonfunktion $H(\vec{r}, \vec{p})$.

12) Zeitentwicklung eines Wellenpakets *(2+2+2=6 Punkte)*

$\psi(x, t)$ sei die Lösung der Schrödingergleichung eines freien Teilchens der Masse m in einer Dimension. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelte

$$\psi(x, 0) = A \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

(i) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{\psi}(p, 0)$ der Funktion $\psi(x, 0)$.

(ii) Berechnen Sie $\tilde{\psi}(p, t)$ mittels der Schrödingergleichung im Impulsraum, die lautet:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(p, t) = \frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(p, t).$$

(iii) Transformieren Sie $\tilde{\psi}(p, t)$ zurück auf $\psi(x, t)$.

13) Eindimensionale Energieeigenwertprobleme *(2+2+2+4=10 Punkte)*

Man betrachte die Schrödingergleichung in einer Dimension mit beliebigem skalaren Potenzial $V(x)$.

(i) Zeigen Sie, dass das Eigenwertproblem für den Fall gebundener Zustände (d.h. es existiert eine normierbare Wellenfunktion $\psi_n(x)$ zum Energieeigenwert E_n) keine Entartung (mehrere linear unabhängige Lösungen zum selben Eigenwert) zulässt. Hierzu ist zu zeigen, dass die sogenannte

Wronski'sche Determinante W verschwindet, somit ψ_a und ψ_b linear abhängig sind, *(Hinweis: dies ergibt sich aus der Schrödingergleichung und der Normierbarkeit).*

$$W(\psi_a, \psi_b)(x) = \begin{vmatrix} \psi_a(x) & \psi_b(x) \\ \psi_a'(x) & \psi_b'(x) \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0. \tag{2}$$

(ii) Zeigen Sie, dass bei symmetrischem Potenzial $V(x) = V(-x)$ die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ entweder symmetrisch ($\psi_n(x) = \psi_n(-x)$) oder antisymmetrisch ($\psi_n(x) = -\psi_n(-x)$) sein müssen.

(iii) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion stets reell gewählt werden kann.
Hinweis: betrachten Sie die komplex konjugierte Schrödingergleichung.

(iv) Diskutieren sie das Energieeigenwertspektrum $\{E_n\}$ für den unendlich tiefen Potenzialtopf

$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| > a \\ 0 & |x| \leq a \end{cases} \tag{3}$$

unter Verwendung der Resultate aus (i)-(iii).