Blatt 3

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 04.05.2021 18 Uhr über das Abgabetool auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabetool finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link
https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/11327635464/
CourseNode/103409770339160

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

8) Kontinuitätsgleichung *(2+4=6 Punkte)*

Sei ψ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung und bezeiche $\vec{j}$ den Wahrscheinlichkeitsstrom.

(i) Zerlegen Sie die Wellenfunktion in Betrag und reelle Phase $\psi = |\psi| e^{i\phi}$ und zeigen Sie, dass $\vec{j}$ wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\vec{j} = \frac{\hbar |\psi|^2}{m} \nabla \phi.$$

(ii) Gegeben sei die eindimensionale Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \frac{\sin[(x-ut)\alpha]}{x-ut} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)},$$

wobei α und u reelle und positive Konstanten sind und $\omega_0 = \hbar k_0^2/2m$.
Ist diese Wellenfunktion zu jeder Zeit t normiert? Berechnen Sie die explizite Form von $\vec{j}$.
Unter welcher Bedingung ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt?
Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi$.

9) Normerhaltung der Wellenfunktion *(5 Punkte)*

Benutzen Sie die Schrödingergleichung für freie Teilchen, um zu zeigen, dass die Norm ihrer Lösung erhalten ist, d.h.

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t) d^3x = 0.$$

10) Klein-Gordon und Schrödinger *(3+2+2+1+1=9 Punkte)*

Wie in der Vorlesung diskutiert, ist die Wellengleichung für ein relativistisches freies Teilchen mit Masse m durch die Klein-Gordon-Gleichung gegeben:

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(t,\vec{x}) = 0. \tag{1}$$

Die Schrödinger-Gleichung für ein nichtrelativistisches freies Teilchen mit Masse m lautet

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t,\vec{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,\vec{x}). \tag{2}$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$\phi(t, \vec{x}) = N e^{-\frac{i}{\hbar}(E(\vec{p})t - \vec{p}\cdot\vec{x})} \tag{3}$$

mit $E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ eine Lösung der Gl. (1) ist.

(ii) Sei $\vec{p}^2 \ll m^2 c^2$. Bestimmen Sie $E(\vec{p})$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}\right)$ (nichtrelativistischer Limes). Ist Gl. (3) eine Lösung der freien Schrödinger-Gleichung (2) in diesem Limes?

(iii) Ist $\psi(t, \vec{x}) = e^{imc^2 t/\hbar}\phi(t, \vec{x})$ mit $\phi(t, \vec{x})$ aus Gl. (3) eine Lösung der freien Schrödinger-Gleichung (2) im nichtrelativistischen Limes?

(iv) Sei $\psi(t)$ eine Lösung der Gl. (2), die nur von der Zeit t abhängt. Kann diese Lösung ein Teilchen im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik beschreiben?

(v) Sei $\psi(x)$ eine Lösung der Gl. (2), die nur von der Ortskoordinate x abhängt. Kann diese Lösung ein Teilchen im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik beschreiben?