Blatt 2

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 27.04.2021 18 Uhr über das Abgabetool auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabetool finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link
https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/11327635464/CourseNode/103409770339160

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

5) Schwingungen im Hohlraum *(4 Punkte)*

Leiten Sie die in der Vorlesung erwähnte Formel für die Zustandsdichte ebener Wellen in einem 3-dimensionalen Kasten der Länge L her (Skript S. 4, eq. 1.3):

$$N(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega,$$

indem Sie die Zahl der Moden zählen, die in ein Frequenzintervall $d\omega$ passen. Dabei muss für jede räumliche Komponente des Wellenvektors die Bedingung erfüllt sein, dass die zugehörigen Moden ganzzahlige Vielfache der halben Grundschwingung sind. Betrachten Sie dann den Limes $L \to \infty$.

6) Compton Streuung *(4 Punkte)*

Leiten Sie mittels Impuls- und Energieerhaltung bei der Streuung eines Photons an einem Elektron das Comptongesetz her:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 4\pi\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad \lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c},$$

mit Θ dem Streuwinkel zwischen einlaufendem und auslaufendem Photon.

7) Gauß'sches Wellenpaket *(2+2+2+3+3=12 Punkte)*

Betrachten Sie ein Gauß'sches Wellenpaket mit folgender Darstellung

$$\psi(x,t) = \mathcal{N}\int_{-\infty}^{\infty} dk f(k) e^{i(kx-\omega(k)t)}.$$

(i) Wie muss die Dispersionsrelation $\omega(k)$ ausssehen, damit das Wellenpaket eine Lösung der Schrödinger-Gleichung für ein 1-dimensionales freies Teilchen ist:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t).$$

(ii) Als (reelle) Fourier-Amplitude $f(k)$ stellen wir uns nun eine Funktion mit einem deutlichen Maximum (bei k_0) vor, so dass das Wellenpaket $\psi(x,t)$ hauptsächlich von den Eigenschaften von $f(k)$ in der Umgebung des Maximums k_0 bestimmt wird. Welche Wellenfunktion $\psi^\delta(x,t)$

ergibt sich falls man vollends idealisiert $f(k) = \delta(k - k_0)$?
Zeigen Sie, dass für beliebige Fourier-Amplituden $f(k)$ gilt:

$$\psi(x,t) = \psi^\delta(x,t) \int_{-\infty}^{\infty} dk f(k + k_0) e^{i(kx - \tilde{\omega}(k)t)}.$$

Bestimmen Sie die modifizierte Dispersionsrelation $\tilde{\omega}(k)$.

(iii) Um das in (ii) auftretende Integral nährungsweise zu bestimmen, setzt man

$$f(k_0 + k) \approx f(k_0) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\kappa_0}\right)^2}.$$

Wie gewinnt man die Konstante κ_0 aus den Eigenschaften von f an der Stelle k_0?

(iv) Berechnen Sie explizit das in (ii) auftretende Integral mit Hilfe der Approximation in (iii) und geben Sie die unnormierte Wellenfunktion $\psi(x,t)$ an.
Hinweis: quadratische Ergänzung im Exponenten führt auf ein Gauß'sches Integral.

(v) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x,t)$ an und normieren Sie damit die in (iv) gefundene Wellenfunktion:

$$w(x,t) = \psi^*(x,t)\psi(x,t), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, w(x,t) \stackrel{!}{=} 1.$$

Diskutieren Sie damit die zeitliche Entwicklung des Wellenpakets.
Hinweis: Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist von der Form

$$w(x,t) = \frac{\pi^{-1/2}}{\Gamma(t)} e^{-\left(\frac{x - vt}{\Gamma(t)}\right)^2}.$$

Geben Sie die "Halbwertsbreite" $\Gamma(t)$ und die Geschwindigkeit v an.