Kapitel 4

Der harmonische Oszillator

4.1 Eigenfunktionen und Eigenwerte

Der klassische harmonische Oszillator hat die Hamiltonfunktion

$$E \;=\; \frac{1}{2\mathrm{m}}p^2 + \frac{b}{2}x^2 \;, \qquad b > 0 \;.$$

welches auch gleichzeitig die Gesamtenergie ist. Daraus ergibt sich nach dem Korrespondenzprinzip der Hamiltonoperator $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{b}{2}x^2$ und die zeitunabhängige Schrödinger–Gleichung

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{2}\,b\,x^2u(x) \;=\; E\,u(x).}$$

Die Wände des Potentials $\frac{1}{2}bx^2$ werden um so höher je größer x wird, d.h. die Aufenthaltswahrscheinlichkeit wird für große $|x|$ gegen Null gehen.

Randbedingungen
Gesucht sind Lösungen, für die

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad (u,u) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u^*(x)u(x) \;=\; 1$$

gilt.

Reskalierung
Es zeigt sich, daß nur bestimmte Werte von E mit dieser Bedingung verträglich sind (diskrektes Spektrum). Mit

$$\omega \;=\; \sqrt{\frac{b}{m}}\;, \qquad \varepsilon \;=\; \frac{2E}{\hbar\omega}\;, \qquad \beta^2 \;=\; \frac{m\omega}{\hbar}\;,$$

erhält man

$$H \;=\; \frac{\hbar\omega}{2}\left(\beta^2x^2 - \frac{1}{\beta^2}\frac{d^2u}{dx^2}\right), \qquad \boxed{\frac{1}{\beta^2}\frac{d^2u}{dx^2} \;=\; (\beta^2x^2 - \varepsilon)\,u\;.}$$

Eigenzustand für $\varepsilon = 1$

Die resaklierte Gleichung läßt sich zunächst approximativ für sehr große x lösen:

$$\beta^2 x^2 \gg \varepsilon : \qquad u''_\infty = \beta^4 x^2 u_\infty \ ;$$

Eine approximative Lösung ist

$$\begin{aligned} u_\infty &= e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} , \\ u'_\infty &= -\beta^2 x \, e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} , \\ u''_\infty &= -\beta^2 e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} + \beta^4 x^2 e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} = \beta^2(\beta^2 - 1) x^2 u_\infty . \end{aligned}$$

Man sieht: $u = e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2}$ ist sogar eine exakte Lösung, falls $\varepsilon = 1$, d.h. $E = E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Die zugehörige normierte Lösung der Schrödinger–Gleichung ist

$$\boxed{\begin{aligned} u_0(x) &= (\beta^2/\pi)^{+\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} , \quad (u_0, u_0) = 1 , \\ E &= E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega . \end{aligned}}$$

Wir werden sehen, dass $u_0(x)$ der Grundzustand ist und $E_0 = \hbar\omega/2$ die Grundzustandsenergie.

Auf- und Absteigeoperatoren

Alle Eigenlösungen und Eigenwerte lassen sich iterativ aus dem Grundzustand $u_0(x)$ berechnen. Dazu betrachten wir Operatoren

$$\boxed{\mathbf{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta x + \frac{1}{\beta} \frac{d}{dx} \right) , \qquad \mathbf{a}^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta x - \frac{1}{\beta} \frac{d}{dx} \right) .}$$

Man nennt $\mathbf{a}^+$ und $\mathbf{a}$ den Auf- und Absteigeoperator. Sei $u(x)$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^+(\mathbf{a}u) &= \frac{1}{2} \left(\beta^2 x^2 - \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2}{dx^2} \right) u - \frac{1}{2} u , \\ \mathbf{a}(\mathbf{a}^+ u) &= \frac{1}{2} \left(\beta^2 x^2 - \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2}{dx^2} \right) u + \frac{1}{2} u , \end{aligned}$$

also

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\mathbf{a}\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^+\mathbf{a} \right) u &= u , \qquad \text{oder} \\ \mathbf{a}\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^+\mathbf{a} &= 1 = [\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] . \end{aligned}}$$

Ferner gilt

$$\boxed{\mathbf{H} \;=\; \hbar\omega\left(\mathbf{a}^{+}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\right)}$$

und

$$(u_1, \mathbf{a}u_2) \;=\; (\mathbf{a}^{+}u_1, u_2)$$

für Funktionen u_1, u_2, die im Unendlichen hinreichend stark verschwinden. $\mathbf{a}$ und $\mathbf{a}^{+}$ sind also konjungierte Operatoren.

Grundzustand

Die Schrödinger–Gleichung läßt sich damit in folgender Weise schreiben

$$\boxed{(\mathbf{a}^{+}\mathbf{a})\, u(x) \;=\; \frac{1}{2}\,(\varepsilon - 1)\, u(x)\,.}$$

Für normierte Wellenfunktionen $u(x)$ folgt hieraus

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2}(\varepsilon-1) \;&=\; \frac{1}{2}(\varepsilon-1)(u,u) \;=\; (u, \mathbf{a}^{+}\mathbf{a}u) \\ &=\; (\mathbf{a}u, \mathbf{a}u) \;\geq\; 0 \;\;, \end{aligned}}$$

wobei die Gleichheit dann und nur dann gilt, falls $\mathbf{a}u = 0$ und ebenfalls $\varepsilon = 1$. Also

$$\mathbf{a}u(x) \;=\; 0 \;: \qquad \frac{du}{dx} \;=\; -\beta^2 x u(x)\;, \qquad u(x) = u_0(x) = (\beta^2/\pi)^{+\frac{1}{4}}\, e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} \qquad .$$

$\varepsilon = 1$, d.h. $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ ist also der kleinstmögliche Eigenwert von $\mathbf{H}$, die Grundzustandsenergie.

Auf- und absteigen

Wir betrachten den Kommutator von $\mathbf{a}$ mit dem Hamiltonoperator $H = \hbar\omega(\mathbf{a}^{+}\mathbf{a} + 1/2)$:

$$\mathbf{a}\left(\mathbf{a}^{+}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\right) \;=\; \Big(\mathbf{a}^{+}\mathbf{a} + [\mathbf{a}, \mathbf{a}^{+}]\Big)\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a} \;=\; (\mathbf{a}^{+}\mathbf{a} + 1)\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a} \;\;,$$

also:

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\mathbf{a}^{+}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\right)(\mathbf{a}u) \;&=\; \mathbf{a}\left(\mathbf{a}^{+}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\right)u - \mathbf{a}u, \\ \left(\mathbf{a}^{+}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\right)(\mathbf{a}^{+}u) \;&=\; \mathbf{a}^{+}\left(\mathbf{a}^{+}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\right)u + \mathbf{a}^{+}u\;, \end{aligned}}$$

mit der analogen Rechnung für $\mathbf{a}^{+}$.

Interpretation

Mit $H = \hbar\omega(\mathbf{a}^+\mathbf{a} + 1/2) = \hbar\omega\varepsilon/2$ folgern wir somit

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{a}u) &= \frac{\hbar\omega}{2}\Big(\varepsilon - 2\Big)\,(\mathbf{a}u)\,,\\ \mathbf{H}(\mathbf{a}^+u) &= \frac{\hbar\omega}{2}\Big(\varepsilon + 2\Big)\,(\mathbf{a}^+u)\,.\end{aligned}$$

Ist also u eine Eigenfunktion mit Eigenwert $\widehat{\varepsilon}$, so ist auch $\mathbf{a}u$ eine Lösung mit Eigenwert $\widehat{\varepsilon} - 2$ und $\mathbf{a}^+u$ ist eine Eigenfunktion mit Eigenwert $\widehat{\varepsilon} + 2$. Entsprechend gehört $\mathbf{a}^m u$ zu $\widehat{\varepsilon}2m$.

Nun gilt $\varepsilon \geq 1$ (s. oben). D.h. für jeden Eigenwert $\widehat{\varepsilon}$ gibt es eine ganze Zahl n, so daß $\mathbf{a}^n u \neq 0$ ist , aber $\mathbf{a}^{n+1}u = 0$. Hieraus folgt (s. oben) $\widehat{\varepsilon} - 2n = 1$ bzw. $\mathbf{a}^n u \sim \cdot u_0$.

Energiespektrum

Aus der Forderung $\varepsilon \geq 1$ folgt, daß nur die Eigenwerte $\widehat{\varepsilon}_n = 2n + 1$, $n = 0, 1, \ldots$, möglich sind. Dementsprechend sind die möglichen Eigenwerte E_n des harmonischen Oszillators mit $E = \hbar\omega\varepsilon/2$

$$\boxed{E_n \;=\; \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\;, \quad n = 0, 1, \ldots\,.}$$

Eigenfunktionen

Bezeichnet man die zugehörigen Eigenfunktionen mit u_n, so gilt

$$\mathbf{a}^+u_n(x) \;=\; N\,u_{n+1}(x) \quad .$$

Die Normierungskonstante N garantiert die Normierung von u_{n+1}. Sei u_n normiert, dann ist:

$$\begin{aligned}N^2(u_{n+1}, u_{n+1}) &= N^2 = (\mathbf{a}^+u_n, \mathbf{a}^+u_n)\\ &= (\mathbf{a}\mathbf{a}^+u_n, u_n) = ((\mathbf{a}^+\mathbf{a} + 1)u_n, u_n) \quad .\end{aligned}$$

Da die Schrödinger–Gleichung

$$\boxed{\mathbf{a}^+\mathbf{a}u_n \;=\; n\,u_n}$$

gilt, so hat man schließlich $N^2 = n + 1$. Demnach erhält man

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{a}^+u_n(x) &= \sqrt{n+1}\,u_{n+1}(x)\,,\\ \mathbf{a}u_n(x) &= \sqrt{n}\,u_{n-1}(x)\,.\end{aligned}}$$

Mittels Iteration folgt daraus

$$\boxed{\begin{aligned}u_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{n!}}(\mathbf{a}^+)^n u_0(x)\,,\\ u_0(x) &= (\beta^2/\pi)^{+\frac{1}{4}}\,e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} \quad .\end{aligned}}$$

Sämtliche Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators können also iterative durch einfaches differenzieren aus dem Grundzustand gewonnen werden, das Problem ist also gelöst.

Expliziete Form der Eigenfunktionen

Man kann die Eigenfunktionen $u_n(x)$ auch expliziet

$$\boxed{u_n(x) \;=\; \sqrt{\beta}\,(n!\,2^n\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}\beta^2x^2}\,H_n(\beta x) \quad ,}$$

als Funktion der *Hermiteschen Polynomen* $H_n(y)$ schreiben (hier ohne Beweis). Es gilt

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1, \qquad H_1(y) = 2y \;, \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2, \qquad H_3(y) = 8y^3 - 12y \;, \ldots . \end{aligned}$$

Die Hermiteschen Polynome sind Lösungen der Differentialgleichung

$$\boxed{H_n''(y) \;-\; 2yH_n'(y) \;+\; 2nH_n(y) \;=\; 0 \;.}$$

Sind $E_{n_1} \neq E_{n_2}$ zwei verschiedene Eigenwerte, so hat man

$$\begin{aligned} E_{n_1}(u_{n_2}, u_{n_1}) &= (u_{n_2}, \mathbf{H}u_{n_1}) = (\mathbf{H}u_{n_2}, u_{n_1}) \\ &= E_{n_2}(u_{n_2}, u_{n_1}) \;, \end{aligned}$$

d.h. $(u_{n_2}, u_{n_1}) = 0$ für $n_1 \neq n_2$. Die $u_n(x)$ bilden also ein orthonormales System. Sie sind auch vollständig (s. z.B. Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, Bd. I, Kap. 2)

4.2 Matrizenmechanik, Operatoren

4.2.1 Matrixelemente

Ist V^n ein n–dimensionaler Vektorraum mit Elementen $\vec{v}$, Basis $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n$ (orthonormiert!) und Skalarprodukt $(\vec{v}, \vec{v})$, so ist eine lineare Abbildung A (Operator $\mathbf{A}$) definiert, falls man die Bildvektoren der Basis angeben kann:

$$\vec{e}_i \quad \rightarrow \quad \hat{\vec{e}}_i \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\,\vec{e}_k \;\equiv\; A\,\vec{e}_i \;.$$

Für die Matrixelemente a_{ik} hat man

$$a_{ik} \;=\; (\vec{e}_i, A\vec{e}_k) \quad .$$

Matrixelemente des harmonischen Oszillators

Ganz analog kann man sich die Matrixelemente der nun unendlich–dimensionalen Matrizen bezüglich der Basis $\{u_n\}$ beim harmonischen Oszillator ausrechnen, die den Operatoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^+$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{H}$ entsprechen. Man hat

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a_{mn} & = & (u_m, \mathbf{a} u_n) = \sqrt{n}\,(u_m, u_{n-1}) \;=\; \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1} \\ a^+_{mn} & = & (u_m, \mathbf{a}^+ u_n) \;=\; \sqrt{n+1}\,(u_m, u_{n+1}) \;=\; \sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1}\ . \end{array}}$$

Ferner ist

$$\mathbf{Q} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\left(\mathbf{a}+\mathbf{a}^+\right)\,, \qquad \mathbf{P} \;=\; \frac{\hbar}{i}\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{a}-\mathbf{a}^+\right)\,,$$

und daher gilt

$$\mathbf{Q}\,u_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\left(\sqrt{n}\,u_{n-1} \;+\; \sqrt{n+1}\,u_{n+1}\right)\,,$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (u_m, \mathbf{Q} u_n) & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}\beta}\left(\sqrt{n}\,\delta_{m,n-1} \;+\; \sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1}\right)\,, \\ (u_m, \mathbf{P} u_n) & = & \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n}\,\delta_{m,n-1} \;-\; \sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1}\right)\,. \end{array}}$$

Schließlich hat man noch für die Matrixelemente des Schrödinger–Operators

$$\boxed{(u_m, \mathbf{H} u_n) = E_n \cdot \delta_{mn} \quad .}$$

In der Basis der Eigenzustände $\{u_n\}$ ist die Hamiltonmatrix $\{H_{mn} \equiv (u_m, \mathbf{H} u_n)\}$ diagonal. Wegen

$$(u^{(1)}, u^{(2)}) \;=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} (u^{(1)}, u_\nu)\,(u_\nu, u^{(2)})$$

gelten die üblichen Regeln der Matrixmultiplikation (selber beweisen) und man spricht von der Matrizen-Mechanik (Heisenberg, Born, Jordan) des harmonischen Oszillators.

4.2.2 Eigenschaften von Operatoren

Leiteroperatoren

Bei Operatoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{a}^+$, die Eigenwerte von $\mathbf{H}$ um den Betrag $\hbar\omega$ erniedrigen bzw. erhöhen, spricht man auch von Leiter-Operatoren, bzw. von *Vernichtungs-* und *Erzeugungs-*Operatoren. Solche Operatoren spielen eine sehr große Rolle in der heutigen Physik, da man viele Systeme aus harmonischen Oszillatoren aufbauen kann.

Adjungierte Operatoren

Sei $B[\varphi] = \{\varphi_\nu\ ,\ \nu = 1, \ldots\}$ ein vollständiges System von Funktionen bezüglich des

Skalarproduktes (u_1, u_2). Ferner sollen alle φ_ν zum Definitionsbereich vom Operator **A** gehören, d.h. $|A\varphi_\nu| < \infty$.

> Läßt sich dann zu gegebenem u ein u^+ finden, derart daß
>
> $$(u, A\varphi_\nu) \;=\; (u^+, \varphi_\nu)$$
>
> für alle φ_ν, so definiert die Zuordnung
>
> $$u \;\to\; \quad u^+ \;=\; A^+ u$$
>
> eindeutig den *zu A adjungierten Operator A^+.*

Zur Eindeutigkeit: Aus $(u_1^+ - u_2^+, \varphi_\nu) = 0 \;\; \forall \varphi_\nu$ folgt $u_1^+ = u_2^+$, da das System der $\{\varphi_\nu\}$ vollständig ist.

Selbst-adjungierte Operatoren

> Falls
>
> $$(\varphi_\nu,\, A\,\varphi_\mu) = (A\,\varphi_\nu,\, \varphi_\mu) \qquad \forall\;\; \varphi_\nu,\, \varphi_\mu\,,$$
>
> so ist **A** symmetrisch, und falls $A^+ = A$, so ist **A** *selbst-adjungiert.*

Die Gleichheit von Operatoren schließt die Gleichheit des Definitionsbereiches und die Gleichheit des Wertebereiches ein.

Observable

Alle physikalischen Observablen entsprechen in der Quantenmechanik selbstadjungierte Operatoren, insbesondere auch der Hamilton-Operator H selber sowie die Orts- und Impulsoperatoren $\vec{\mathbf{x}}$ und $\vec{\mathbf{p}}$ (nachrechnen). Selbstadjungierte Operatoren haben als symmetrische Matrizen nur reelle Eigenwerte und damit auch reellen Meßwerte. Es wäre ja auch schon verwunderlich in einem Experiment einen komplexen Impuls zu messen!

Unitäre Operatoren

> Ist $A^+ = A^{-1}$, d. h. $A^+A = AA^+ = 1$,
> so heißt $A \equiv U$ *unitär.* Es gilt
>
> $$(Uu_1, Uu_2) \;=\; (U^+Uu_1, u_2) \;=\; (u_1, u_2) \quad ,$$
>
> d.h. *unitäre Operatoren lassen das Skalarprodukt (u_1, u_2) invariant.*

Beispiele für unitäre Transformationen:

(a) Orthogonale Transformationen

(b) Zeitentwicklungs-Operatoren in einem n–dimensionalen Vektorraum.

4.3 Kohärente Zustände

Es läßt sich leicht nachrechnen, daß die Erwartungswerte $(u_n, \mathbf{Q} u_n)$ und $(u_n, \mathbf{P} u_n)$ für alle Eigenzustände $u_n = u_n(x)$ des harmonischen Oszillators verschwinden. Dies ist auch für die zeitabhängigen Lösungen

$$\psi_n(x,t) \;=\; e^{-iE_n\, t/\hbar}\, u_n(x)$$

der Fall. Der Erwartungswert des Ortsoperators $\mathbf{Q}$ *bezüglich der Energie-Eigenfunktionen* $u_n(x)$ hat also sehr wenig mit dem periodischen Verlauf der *klassischen Bewegung* $x(t) = A\sin(\omega\, t + \alpha)$ zu tun.

Kohärente Zustände
Ausgehend von dieser Betrachtung ist es naheliegend, Überlagerung der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators zu betrachten, analog zu der Überlagerung von ebenen Wellen (siehe Kap. 2.1) für freie Teilchen. Im Falle der freien Teilchen gab es eine ausgezeichnete Überlagerung der Eigenfunktionen, das Gauss'sche Wellenpaket, im Falle des harmonischen Oszillators sind es die *kohärenten Zustände*.

Ein kohärente Zustand is als Eigenfunktion $u_z(x)$ des Vernichtungsoperators $\mathbf{a}$ zum komplexen Eigenwert z definiert:

$$\boxed{\mathbf{a} u_z(x) \;=\; z\, u_z(x)\ .}$$

Erwartungswerte
Man hat

$$\boxed{(u_z, \mathbf{Q}\, u_z) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}\beta}(u_z, (\mathbf{a}+\mathbf{a}^{+}) u_z) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\Big(z + z^*\Big) \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\beta}\, Re(z)\ ,}$$

und analog

$$\boxed{(u_z, \mathbf{P}\, u_z) = \sqrt{2}\, \beta\, \hbar\, Im(z).}$$

Die Erwartungswerte des Orts- und es Impulsoperators verschwinden als nicht für u_z.

Entwicklung nach Energie-Eigenfunktionen
Die Eigenfunktionen u_z des Absteigeoperators lassen sich nach den Energie-Eigenfunktionen u_n entwickeln:

$$u_z(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, u_z)\, u_n(x) \;=\; e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} u_n(x) \;=\; e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\mathbf{a}^{+})^n}{n!} u_0(x) \;=\; e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, e^{z\mathbf{a}^{+}}\, u_0(x)\ .$$

Die Matrixelemente (u_n, u_z) lassen sich zu

$$\boxed{(u_n, u_z) \;=\; \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\left(\mathbf{a}^+\right)^n u_0, u_z\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{n!}}(u_0, \mathbf{a}^n u_z) \;=\; \frac{z^n}{\sqrt{n!}}(u_0, u_z),}$$

berechnen. Der Wert von $(u_0, u_z) = e^{-|z|^2/2}$ garantiert die Normierung von $u_z(x)$.

Über-Vollständigkeit
Eigenfunktionen, die zu verschiedenen z-Werten gehören, sind *nicht* zueinander orthogonal,

$$\boxed{(u_{z_2}, u_{z_1}) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(u_{z_2}, u_n)(u_n, u_{z_1}) \;=\; e^{-\frac{1}{2}|z_1|^2 - \frac{1}{2}|z_2|^2 + z_2^* z_1},}$$

den sie sind über-vollständig.

Ortsraum-Darstellung
Mit $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}^+ = \left(\beta x - \frac{1}{\beta}\frac{d}{dx}\right)$ findet man $\mathbf{a}u_z(x) = z u_z(x)$ für

$$\boxed{u_z(x) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2 + \sqrt{2}z\,\beta\,x - \frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}z^2}.}$$

Bei den Eigenfunktionen $u_z(x)$ des Vernichtungsoperators $\mathbf{a}$ handelt es sich also um Gauß'sche Wellenpakete.

Unschärfe-Relationen
Aus

$$\mathbf{Q}^2 \;=\; \frac{1}{2\beta^2}\left[\mathbf{a}^2 + (\mathbf{a}^+)^2 + 2\mathbf{a}^+\mathbf{a} + 1\right], \quad \mathbf{P}^2 \;=\; \frac{\hbar^2\beta^2}{2}\left[2\mathbf{a}^+\mathbf{a} - \mathbf{a}^2 - (\mathbf{a}^+)^2 + 1\right],$$

folgt

$$(u_z, \mathbf{Q}^2 u_z) \;=\; \frac{1}{2\beta^2}\Big(4\,(Re(z))^2 + 1\Big), \qquad (u_z, \mathbf{P}^2 u_z) \;=\; \frac{\hbar^2\beta^2}{2}\Big(4\,(Im(z))^2 + 1\Big)$$

und daher gilt für die mittleren Schwankungen wegen $\langle u_z, \mathbf{Q}u_z\rangle = (\sqrt{2}/\beta)Re(z)$, und $\langle u_z, \mathbf{P}u_z\rangle = \sqrt{2}\beta\hbar Im(z)$

$$\boxed{(\Delta\mathbf{Q})^2 \;=\; \frac{1}{2\beta^2}, \qquad (\Delta\mathbf{P})^2 \;=\; \frac{\hbar^2\beta^2}{2}, \qquad \Delta\mathbf{Q}\,\Delta\mathbf{P} = \frac{\hbar}{2}.}$$

Das Produkt der Schwankungen von $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{P}$ im Zustand u_z hat also den minimalen Wert der Heisenberg'schen Unschäferelation und ist von z unabhängig. Diese Minimaleigenschaft hinsichtlich der Unschärferelation ist für die Gauß'schen Wellenpakete charakteristisch.

Zeitabhängigkeit

Wegen der Zeitabhängigkeit

$$\psi_n(x,t) \;=\; e^{-i\,E_n\,t/\hbar}\,u_n(x) \;=\; e^{-i\,\omega\,t/2}\,e^{-in\omega t}\,u_n(x)$$

der Energie-Eigenfunktionen ist die Zeitabhängigkeit der Zustände u_z durch

$$\boxed{u_z(x,t) \;=\; e^{-\frac{|z|^2}{2}}\,e^{-i\frac{\omega}{2}t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ze^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}\,u_n \;=\; e^{-i\omega t/2}u_{z(t)}(x)\;, \qquad z(t) = ze^{-i\omega t}.}$$

gegeben. Man beachte, daß $u_z(x,t=0) = u_z$.
Für den Erwartungswert von $\mathbf{Q}$ bezüglich $u_z(x,t)$ erhalten wir

$$\boxed{<\mathbf{Q}>_z(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}\beta}(u_{z(t)},(\mathbf{a}+\mathbf{a}^{+})u_{z(t)}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\Big(z(t)+z^*(t)\Big).}$$

Setzt man $z = |z|e^{i\delta}$, so folgt schließlich

$$\boxed{<\mathbf{Q}>_z(t) \;=\; A\,\cos(\omega t-\delta)\;, \qquad A \;=\; \frac{\sqrt{2}|z|}{\beta}}.$$

Hier hat der Erwartungswert von $\mathbf{Q}$ dieselbe Form wie die klassische Bewegung.

Formkonstanz des Wellenpaketes

Die zeitabhängige Funktion $u_{z(t)}(x)$ hat die explizite Gestalt

$$\boxed{u_{z(t)}(x) \;=\; (\beta^2/\pi)^{1/4}e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2+\sqrt{2}\,z(t)\beta x-\frac{1}{2}|z|^2-\frac{1}{2}z^2(t)}\;.}$$

Es handelt sich um ein zeitabhängiges Gauß'sches Wellenpaket, dessen *Breite jedoch nicht von der Zeit abhängt, d.h. diese Wellenpakete zerfließen nicht!*

Der Name *"kohärente Zustände"* rührt von ihren Anwendungen bei Kohärenzproblemen in der Quantenoptik her. Da kohärente Zustände nicht zerfließen, sind sie geeignet, um Signale in Glasfaser ohne Dämpfung über weite Entferungen zu transportieren.