2. Klausur **Theoretische Physik VI**

SS 06 Prof. Dr. C. Gros

21. Juli 2006

Vorname:

Name:

Geburtsdatum:

Geburtsort:

Matrikelnummer:

pro Aufgabe 10 Punkte						
1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$

Aufgabe 1

Messprozess (Photonpolarisation)

Der Zustand eines Quantensystems werde durch einen zweidimensionalen Zustandsraum mit der Orthonormalbasis $|e_1\rangle, |e_2\rangle$ (Polarisationszustände, Polarisierung in x- und y-Richtung) beschrieben. Es seien Messapparaturen (Polarisationsfilter) zur Messung der folgenden Eigenschaften gegeben:

i) **"Das System ist mit dem Winkel θ $(-\pi/2 < \theta \leq \pi/2)$ linear polarisiert"**. Diese Eigenschaft wird durch den Projektor auf den eindimensionalen Vektorraum, $|f_\theta\rangle = \cos\theta\,|e_1\rangle + \sin\theta\,|e_2\rangle$, beschrieben.

ii) **"Das System ist rechts- bzw. linkszirkular polarisiert"**. Diese Eigenschaft wird durch den Projektor auf den eindimensionalen Vektorraum, $|f_\pm\rangle = (|e_1\rangle \pm i|e_2\rangle)/\sqrt{2}$, beschrieben.

Problemstellung:

a) Man bestimme die Projektionsoperatoren, die den Eigenschaften i) und ii) zuzuordnen sind. Wie lautet ihre Matrixform in der $\{|e_1\rangle,\ |e_2\rangle\}$-Basis? Welche Eigenwerte besitzen diese Projektionsoperatoren?

b) Die erste Messung ergebe **"Das System ist linear mit $\theta = 0$ polarisiert"**. In welchem Zustand ist das System? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer folgenden Messung die Zustände $|f_0\rangle, |f_{\pi/6}\rangle, |f_{\pi/4}\rangle, |f_{\pi/2}\rangle$ und $|f_+\rangle$ bzw. $|f_-\rangle$ vorliegen?

Aufgabe 2

Dreidimensionaler, unendlich tiefer Potentialtopf

Berechnen Sie die Energie–Eigenwerte eines dreidimensionalen, unendlich tiefen Potentialtopfs, der durch das Potential

$$V(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -a_k < x_k < a_k \quad (k = 1, 2, 3) \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 3

Streuphasen

Ein Teilchen der Masse m_0 werde am Potential (harte Kugel)

$$V(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r > a \\ \infty & , \quad r < a \end{cases}$$

gestreut.

a) Wie muss das Verhältnis C/B in diesem Potential gewählt werden damit

$$R_l(\rho) = B\, j_l(\rho) \,+\, C\, n_l(\rho)$$

den Radialanteil $R_l(\rho)$ der Schrödingerleichung löst ($\rho = \, k\, r$ und $k^2 = 2mE/\hbar^2$)?
Hinweis: $j_l(\rho)$ und $n_l(\rho)$ bezeichnen die sphärischen Bessel- bzw. Neumann-Funktionen. Die Bahndrehimpuls-Zustände werden durch die ganzzahlige Quantenzahl l angegeben.

b) Aus Vergleich des asymptotischen Verhaltens für $r \to \infty$ ergibt sich für die Streuphasen, $\tan \delta_l(k) = -C/B$. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Beziehung die Streuphase, $\delta_l(k)$, für den niederenergetischen Grenzfall $ka \ll 1$ und berechnen Sie daraus den totalen elastischen Wirkungsquerschnitt, $\sigma_{el}(k)$.
Hinweis: Für $\rho \to 0$ gilt

$$j_l(\rho) \approx \frac{\rho^l}{(2l+1)!!} \qquad \text{und} \qquad n_l(\rho) \approx \frac{-(2l-1)!!}{\rho^{l+1}} \ ,$$

wobei $(2l+1)!! \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1)$.

Aufgabe 4

Galilei-Transformation

Sei $\psi(\vec{x}, t)$ eine Lösung der freien Schrödinger–Gleichung $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{x}, t) = i\hbar\dfrac{d}{dt}\psi(\vec{x}, t)$.
Zeigen Sie, dass sich unter einer Galilei–Transformation $\quad \vec{x} \;\to\; \vec{x} + \vec{u}t \ , \quad t \;\to\; t$

die Wellenfunktion wie $\quad \psi(\vec{x}, t) \;\; \to \;\; \tilde{\psi}(\vec{x}, t) \;=\; \exp\left[\dfrac{i\,m}{2\hbar}\left(2\vec{u}\cdot\vec{x} - \vec{u}^2 t\right)\right]\psi(\vec{x} - \vec{u}t, t)$

transformiert.
Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass $\tilde{\psi}(\vec{x}, t)$ die freie Schrödingergleichung löst.

Aufgabe 5

Gestörter harmonischer Oszillator

Ein eindimensionaller harmonischer Oszillator der Kreisfrequenz ω werde durch das stationäre Potential

$$V(\hat{Q}) = \gamma \hat{Q}^3 \ , \quad \gamma > 0$$

gestört.
Drücken Sie das Störpotential durch Erzeuger $a^\dagger$ und Vernichter a aus und geben Sie die Energiekorrekturen des Grundzustandes in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie an.
Hinweis: Sie können $\hat{Q} = \alpha(a^\dagger + a)$ benutzen.

Aufgabe 6

Resonanz im 2-Niveau-System

Es seien $E_n^{(0)}$ und $E_m^{(0)}$ zwei ungestörte Energieniveaus mit

$$E_n^{(0)} - E_m^{(0)} = \hbar\omega_{nm} \ .$$

Der Hamiltonoperator dieses System hat daher die Form,

$$H^{(0)} \ = \ E_n^{(0)} \, |n\rangle\langle n| \ + \ E_m^{(0)} \, |m\rangle\langle m| \ ,$$

wobei $|n\rangle$ und $|m\rangle$ die ungestörten Wellenfunktionen zu den Eigenwerten $E_n^{(0)}$ und $E_m^{(0)}$ sind.
Es sei

$$V \ = \ |n\rangle\langle m| \, F \, e^{-i\omega t} \ + \ |m\rangle\langle n| \, F^* \, e^{i\omega t}$$

eine periodische Störung, wobei F eine zeitunabhängige Konstante ist.

Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit einer allgemeinen Wellenfunktion die durch

$$|\psi(t)\rangle = a_n(t) \, |n(t)\rangle \ + \ a_m(t) \, |m(t)\rangle$$

gegeben. Setzen Sie dazu $|\psi(t)\rangle$ in die zeitabhängige Schrödingergleichung ein und bestimmen Sie Funktionen $a_n(t)$ und $a_m(t)$.
Hinweis: Die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktionen im ungestörten System ist durch

$$|k(t)\rangle \ = \ e^{-\frac{i}{\hbar} H^{(0)} \, t} \, |k\rangle \ = \ e^{-\frac{i}{\hbar} E_k^{(0)} \, t} \, |k\rangle$$

gegeben $(k = n, m)$.