# 1. Klausur — Theoretische Physik IV

SS 06 — Prof. Dr. C. Gros

26. Juni 2006

Vorname:

Name:

Geburtsdatum:

Geburtsort:

Matrikelnummer:

| **pro Aufgabe 10 Punkte** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | $\sum$ |
| | | | | | | |

## Aufgabe 1

**Wissensfragen**

a) Was definiert einen linearen Operator?

b) Wie lautet die freie Schrödingergleichung im Impulsraum?

c) Welche Eigenwerte kann ein Projektionsoperator $P^2 = P$ besitzen? Warum? (Beweis)

d) Was ist ein Hilbert-Raum?

e) Wie ist der Dichte-Operator definiert und wie lauten seine Eigenwerte?

f) Was ist die Spur des Dichteoperators und welchen Wert hat sie?

g) Worin unterscheidet sich ein reiner von einem gemischten Zustand?

h) Auf welche Weise verknüpft die Kontinuitätsgleichung Wahrscheinlichkeitsstrom und Wahrsscheinslichkeitskeitssdichte?

i) Wie ist ein unitärer Operator definiert?

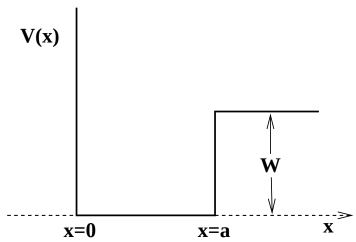
j) Wie lauten die Eigenwerte eines ungestörten harmonischen Oszillators?

## Aufgabe 2

**Potentialtopf**

Ein Teilchen der Masse $m$ sei in einer Dimension in folgendem Potential gebunden

$$V(x) = \begin{cases} W\theta(x-a) - G\delta(x-a) & \text{für} \quad x \geq 0 \\ +\infty & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$




a) Setzen Sie die Lösung der Schrödingergleichung an und benutzen Sie die Rand- und Stetigkeitsbedingungen, um eine transzendente Gleichung für die Parameter dieser Lösung herzuleiten.

b) Nehmen Sie an, dass die Ableitung $\psi'(a_-)$ (d.h. für $x \to a$ von links) gleich Null ist! Wann ist das der Fall? Setzen Sie diese Bedingung in die obige transzendente Gleichung ein und zeigen Sie, dass dann *eine* Lösung für die Parameter $W$, $G$, $m$ und $a$ durch $\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}W - \frac{\pi^2}{4a^2}} = \frac{2m}{\hbar^2}G$ gegeben ist. Bestimmen Sie für diesen Fall auch die zugehörige Energie.

## Aufgabe 3

**Mischung von Eigenzuständen**

**a)** Konstruieren Sie eine Linearkombination der beiden Eigenzustände $u_n(x)$ und $u_{n+1}(x)$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators derart, dass $\langle x \rangle$ so klein wie möglich wird.

**b)** $\psi(0)$ sei der eben konstruierte Zustand. Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit $\psi(t)$ und den dazugehörigen Impuls-Erwartungswert $\langle p(t) \rangle$.

*Hinweis:* Benutzen Sie für alle Rechnungen die Darstellung der auftretenden Operatoren in Erzeugern und Vernichtern $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$. Schreiben Sie dazu zur Vereinfachung $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ als $\hat{Q} = \alpha(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ mit $\alpha > 0$ und $\hat{P} = i\,\gamma(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$.

## Aufgabe 4

**Darstellungen der Wellenfunktion**

Die komplexe Wellenfunktion $\Psi(\vec{x}, t)$ kann zerlegt werden in Real– und Imaginärteil $\Psi = u + iv$ oder in Betrag und Phase $\Psi = Ae^{iS}$. Dabei sind $u$, $v$, $A$ und $S$ reelle Funktionen von $\vec{x}$ und $t$.

**a)** Welche Gleichungen folgen für diese reellen Funktionen aus der zeitabhängigen Schrödingergleichung? Geben Sie jeweils eine Gleichung für Real- und Imaginärteil der Schrödingergleichung an.

**b)** Drücken Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte und den Wahrscheinlichkeitsstrom durch diese Funktionen aus.

## Aufgabe 5

**Drehimpuls, Unschärfe und Matrixdarstellungen**

**a)** Zu berechnen sind die Erwartungswerte der Operatoren $L_x, L_y, L_x^2, L_y^2$ in einem Eigenzustand $Y_{j,m}$ zu den Operatoren $L^2$ und $L_z$. Berechnen Sie die Unschärfe $\Delta L_x$ und $\Delta L_y$.

**b)** Geben Sie die Matrixdarstellungen der Drehimpulsoperatoren $L_+, L_-, L_x, L_y, L_z$ und $L^2$ in dem Unterraum zu $l = 1$ explizit an.

## Aufgabe 6

**Vertauschungsrelationen**

Die Orts- und Impulsoperatoren (in einer Dimension) sind durch $Q$ und $P$ gegeben.

**a)** Zeigen Sie, dass

$$[Q^n, P] = i\hbar\, n\, Q^{n-1}$$

und

$$[P^n, Q] = -i\hbar\, n\, P^{n-1} \ .$$

Benutzen Sie dazu die Beziehung $[P, Q] = -i\hbar$. Beweisen Sie zuerst den Fall $n = 1$ und zeigen Sie anschließend, dass die Richtigkeit für $n + 1$ aus der Richtigkeit für $n$ folgt.

**b)** Zeigen Sie weiters, dass für analytische Funktionen, $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n)\, a^n$ folgende Beziehungen gelten:

- $[f(Q), P] = i\hbar \frac{\partial}{\partial Q} f(Q)$
- $[f(Q), Q] = 0$

*Hinweis:* Unter der Ableitung $\frac{\partial}{\partial O} f(O)$ ist zu verstehen $\frac{\partial}{\partial o} f(o)|_{o \to O}$.