Übungsaufgaben — Theoretische Physik IV

SS 06 — Prof. Dr. C. Gros

8. Übung — Abgabe: Di., 13.06.06
(in der Vorlesung)

Aufgabe 28

Pauli-Matrizen **2 Punkte**

Die Pauli-Matrizen sind definiert als

$$\sigma_x \equiv \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen hermitisch sind, und dass $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$, wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix bezeichnet und $i = 1, 2, 3$.
Hinweis: Eine Matrix ist hermitisch, wenn sie gleich ihrer adjungierten Matrix ist. Die adjungierte Matrix ergibt sich aus der (entlang der Hauptdiagonalen) gespiegelten Matrix mit komplex konjugierten Elementen.

b) Zeigen Sie, dass

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i\, \epsilon_{ijk}\, \sigma_k$$

$(i, j, k = 1, 2, 3)$, wobei ϵ_{ijk} der total antisymmetrische Tensor $(\epsilon_{123} = 1, \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj})$ ist, und eine Summe über den Index k impliziert ist.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der obigen Beziehung, dass

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})\, (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \;=\; (\vec{A} \cdot \vec{B}) \;+\; i\, \vec{\sigma}\, (\vec{A} \times \vec{B})$$

für beliebige (auch nicht-vertauschende) dreikomponentige Objekte $\vec{A}, \vec{B}$ gilt.
Anleitung: Schreiben Sie $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}\,) = \sum_i \sigma_i A_i$, und $(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\,) = \sum_i \sigma_i B_i$, um die obige Beziehung verwenden zu können.

d) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus b) die Kommutatoren $[\sigma_i, \sigma_j] \equiv \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i$ $(i, j = 1, 2, 3)$ in symbolischer Schreibweise mit dem ϵ-Tensor.

Aufgabe 29

Spin in Richtung $\vec{n}$ **4 Punkte**

a) Die Eigenvektoren $\psi_z^+ = (1,0)$ und $\psi_z^- = (0,1)$ der z-Komponente des Spins-$\frac{1}{2}$ bilden eine Basis des zweidimensionalen komplexen Hilbertraumes. Berechnen Sie in dieser Basis die Spin-$\frac{1}{2}$-Eigenvektoren in Richtung eines Einheitsvektors $\vec{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi\,,\, \sin\vartheta\sin\varphi\,,\, \cos\vartheta)$ mit Polarkoordinaten (ϑ, φ). Lösen Sie dazu explizit die Eigenwertgleichung

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\,)\,\psi_n^{\pm} = \lambda^{\pm}\;\psi_n^{\pm}$$

Hinweis: Die Lösung für ψ_n^+ $(\lambda^+ = 1)$ lautet

$$\psi_n^+ = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\,\psi_z^+ + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\,e^{i\varphi}\psi_z^-$$

b) Berechnen Sie im Zustand $\psi = \psi_n^+$ die Wahrscheinlichkeit, bei Messung von S_x den Wert $+\hbar/2$ zu finden.

c) Berechnen Sie im Zustand $\psi = \psi_n^+$ die Unschärfe $\langle (S_x - \langle S_x\rangle)^2\rangle$. Für welchen Vektor $\vec{n}$ wird sie minimal? *Hinweis:* Rechnen Sie in der S_z-Darstellung.

Aufgabe 30

Wasserstoffähnliche Atome **2 Punkte**

Ein wasserstoffähnliches Atom mit Kernladungszahl Z befinde sich im Zustand mit Hauptquantenzahl n. Sämtliche relativistische Korrekturen sowie der Spin des Kerns und Elektrons seien vernachlässigt. Ferner können Sie die reduzierte Masse gleich der Elektronenmasse m setzen.

a) Beweisen Sie für alle Eigenzustände mit gegebener Hauptquantenzahl n, dass der Erwartungswert der kinetischen Energie die negative Hälfte des Erwartungswertes der potentiellen Energie ist,

$$E_{\text{kin}} \;=\; \langle\,\frac{\vec{\mathbf{p}}^2}{2m}\,\rangle = -\frac{1}{2}\langle\, V(\vec{r})\,\rangle\ .$$

Das ist das für Energieeigenzustände des Wasserstoffatoms gültige Virialtheorem.
Hinweis: Sie können Formeln aus dem Skriptum benutzen.

b) Der Kern eines Tritiumatoms (Kern mit $Z = 3$ und 1 Elektron) im Grundzustand zerfalle plötzlich unter Emission eines die Elektronenhülle nicht störenden Elektrons. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das resultierende He^+-Ion (Kern mit $Z = 2$ und 1 Elektron) im Grundzustand angetroffen wird?
Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem Quadrat des Überlapps der entsprechenden Wellenfunktionen, d.h. Grundzustandswellenfunktion des Tritiumatoms und des He^+-Ions. Benutzen Sie die Beziehung $\int_0^\infty y^n e^{-y} dy = n!$.