Übungsaufgaben — Theoretische Physik IV

SS 06 — Prof. Dr. C. Gros

7. Übung — Abgabe: Di., 06.06.06 (in der Vorlesung)

Aufgabe 24

Eigenschaften linearer Operatoren **2 Punkte**

Sei A ein (linearer) Operator und $A^\dagger$ sein adjungierter Operator. Zeigen Sie:

- $A^\dagger$ ist ebenfalls linear
- $\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$
- $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
- $(A \cdot B)^\dagger = B^\dagger \cdot A^\dagger$
- $(\lambda I)^\dagger = \lambda^* I$ (I: Einheitsoperator, λ: C–Zahl)
- $(A+\lambda B)^\dagger = A^\dagger + \lambda^* B^\dagger$
- wenn A^{-1} existiert, dann existiert auch $\left(A^\dagger\right)^{-1}$ und es gilt: $\left(A^\dagger\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\dagger$

Aufgabe 25

Matrixdarstellung, Eigenwerte, Basiswechsel **3 Punkte**

In einem dreidimensionalen Hilbertraum sei die Matrixdarstellung der folgenden hermitischen Operatoren gegeben:

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Was sind die möglichen Resultate einer Messung von L_z?

b) Es werde der Eigenzustand des Operators L_z zum Eigenwert 1 betrachtet: Was sind die Erwartungswerte von L_x, L_x^2 und der Schwankung ΔL_x in diesem Zustand?

c) Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände und die Eigenwerte von L_x in der vorgegebenen L_z-Basis.

d) Gegeben sei nun ein Eigenzustand zu L_z mit Eigenwert -1. Was sind die möglichen Resultate bei einer Messung von L_x? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Meßergebnisse?

Aufgabe 26

Bahndrehimpuls, Kugelfunktionen, Legendre-Polynome **3 Punkte**

a) Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass sich durch Verwenden von Polarkoordinaten

$$x_1 = r\cos\varphi\ \sin\vartheta\ , \quad x_2 = r\sin\varphi\ \sin\vartheta\ , \quad x_3 = r\cos\vartheta$$

die folgenden Beziehungen für $\tilde{\mathbf{L}}_3$, $\tilde{\mathbf{L}}_\pm$ ergeben:

$$\tilde{\mathbf{L}}_3 \;=\; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad \tilde{\mathbf{L}}_\pm \;=\; e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\vartheta} \;+\; i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

Hinweis: Starten Sie mit den Beziehungen in Polarkoordinaten und führen Sie diese auf ihre kartesische Form zurück.

b) Berechen Sie, $\tilde{\mathbf{L}}_+ Y_{lm}(\varphi,\vartheta)$, mit

$$Y_{lm}(\varphi,\vartheta) = \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{1/2} P_l^m(\cos\vartheta)e^{im\varphi}$$

durch explizites Anwenden von $\tilde{\mathbf{L}}_+$ [Form aus a) verwenden!]. Zeigen Sie das die Beziehung

$$\tilde{\mathbf{L}}_+ Y_{lm} = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\ Y_{lm+1}$$

gültig ist.
Hinweis: P_l^m bezeichnet, dass entsprechende zugeordnete Legendre-Polynom (siehe Skriptum).

Aufgabe 27

Hermitsche Operatoren **2 Punkte**

Hermitesche Operatoren sind durch die Eigenschaft $A = A^\dagger$ charakterisiert. Beweisen Sie die folgenden Beziehungen:

(a) Der Operator $C = A \cdot B$ mit $A = A^\dagger$ und $B = B^\dagger$ ist nur dann hermitisch, falls $[A, B] = 0$.

(b) Die Operatoren $C_n = (A + B)^n$ sind hermitisch, falls $A = A^\dagger$ und $B = B^\dagger$.

(c) Die Operatoren $C_+ = A + A^\dagger$, $C_- = i(A - A^\dagger)$ und $C_A = A \cdot A^\dagger$ sind für beliebige Operatoren A hermitisch.

(d) $\langle A^2\rangle \geq 0$, falls $A = A^\dagger$.

(e) $(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$ mit $\langle\ldots\rangle = \langle\psi|\ldots|\psi\rangle$ ist Null genau dann, wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand des hermitischen Operators A ist.