Übungsaufgaben — Theoretische Physik IV

SS 06 — Prof. Dr. C. Gros

6. Übung — Abgabe: Di., 30.05.06 (in der Vorlesung)

Aufgabe 20

Auf- und Absteigeoperatoren **3 Punkte**

Die sogenannten Auf- und Absteigeoperatoren (auch Erzeuger und Vernichter genannt) erfüllen folgende Gleichungen:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad \hat{a}|0\rangle = 0.$$

Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\psi\rangle = Ne^{-S}|0\rangle, \quad S = \frac{1}{2}\mu\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger$$

mit der Normierungskonstanten N und einer beliebigen reellen Konstanten μ von dem Operator $\hat{b} = u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger$ bei geeigneter Wahl der reellen Konstanten u und v vernichtet wird, d.h. $\hat{b}|\psi\rangle = 0$ (entwickeln Sie hierfür S in eine Taylorreihe). Wie müssen u und v in Abhängigkeit von μ gewählt werden, damit die kanonische Vertauschungsrelationen $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ erfüllt ist.

Aufgabe 21

Mischung von Eigenzuständen **3 Punkte**

a) Konstruieren Sie eine Linearkombination der beiden Eigenzustände $u_n(x)$ und $u_{n+1}(x)$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators derart, dass $\langle x\rangle$ so groß wie möglich wird.

b) $\psi(0)$ sei der eben konstruierte Zustand. Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit $\psi(t)$ und die dazugehörigen Erwartungswerte $\langle x(t)\rangle$, $\langle p(t)\rangle$.

c) Berechnen Sie die Unschärfe $\Delta x(t) \cdot \Delta p(t)$.

Hinweis: Benutzen Sie für alle Rechnungen die Darstellung der auftretenden Operatoren in Erzeugern und Vernichtern $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$. Schreiben Sie dazu zur Vereinfachung $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ als $\hat{Q} = \alpha(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ und $\hat{P} = i\,\gamma(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$.

Aufgabe 22

Gestörter Harmonischer Oszillator **2 Punkte**

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Störung $\lambda \hat{H}_1 = \lambda \hat{Q}$.

a) Bringen Sie den Hamiltonoperator durch quadratisches Ergänzen in die Form eines ungestörten harmonischen Oszillators mit verschobener Koordinate $x' = x - x_0$, plus einer konstanten Energie.

b) Zeigen Sie, dass der verschobene Impulsoperator $\hat{Q}' := \hat{Q} - x_0$ dieselben Vertauschungsrelationen hat wie $\hat{Q}$. Deswegen können Sie nun die exakten Eigenenergien in Teil a) sofort ablesen.

c) Die exakte Eigenfunktionen erhalten Sie dann, indem Sie den Translationsoperator $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{P}\,x_0}$ auf die Eigenzustände $u_n(x)$ des ungestörten Oszillators anwenden. Berechnen Sie die Korrektur zu den ungestörten Zuständen durch Entwicklung der Exonentialfunktion bis zur ersten Ordnung in x_0.

Hinweis: Benutzen Sie in c) die Dastellung in Erzeugern und Vernichtern $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$.

Aufgabe 23

Variationsrechnung für den zweidimensionalen Oszillator **2 Punkte**

a) Normieren Sie die Wellenfunktion

$$\psi(\vec{x}) = c\, e^{-\alpha r}$$

(mit Normierungskonstante c und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) und berechnen Sie damit den Energie-Erwartungswert des Harmonischen Oszillators in 2 Dimensionen, $E_{\text{var}} = \langle \hat{H} \rangle$, mit

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\vec{x}^2 \ .$$

Für welchen Wert von α wird der Erwartungswert minimal? Wie lautet die dazugehörige optimale Energie?

b) Die exakte Lösung erhalten Sie sofort, wenn Sie das Problem als zwei unabhängige harmonische Oszillatoren in den Richungen x und y betrachten. Vergleichen Sie die exakte Grundszustandsenergie mit dem Ergebnis der obigen Rechnung.

Hinweis: Benutzen Sie die Beziehung $\Delta\psi(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$ und $\int_0^\infty y^n e^{-y} dy = n!$.