Übungsaufgaben — Theoretische Physik IV

SS 06 — Prof. Dr. C. Gros

5. Übung — Abgabe: Di., 23.05.06
(in der Vorlesung)

Aufgabe 16

Schrödinger Gleichung im Impulsraum **2 Punkte**

Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x},t) + V(\vec{x})\psi(\vec{x},t)$$

beschrieben. Schreiben Sie mit Hilfe der Fouriertransformierten

$$\tilde{\psi}(k,t) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\vec{x}\,\psi(\vec{x},t)\,e^{-i\vec{k}\vec{x}}$$

die Schrödingergleichung im Impulsraum. Sie können dazu die Ergebnisse aus Aufgabe 9 benutzen.
Hinweis: Die freie Schrödinger Gleichung ($V = 0$) lautet im Impulsraum,

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(\vec{k},t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\vec{k}^2\tilde{\psi}(\vec{k},t)\ .$$

Aufgabe 17

δ-Distribution **2 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale für eine Testfunktion $f(x)$:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,f(x)\,dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(b\,x)\,f(x)\,dx$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\cos(x))\,f(x)\,dx$

Aufgabe 18

δ-Potential **3 Punkte**

Man untersuche durch Integration der Schrödingergleichung über ein infinitesimales Intervall $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ welche Bedingung die Wellenfunktion für ein Potential

$$V(x) = -V_0\delta(x), \quad V_0 > 0$$

bei $x = 0$ erfüllen muss. Man bestimme Energie und Wellenfunktion für gebundene Lösungen und vergleiche das Ergebnis mit dem für einen Potentialtopf mit endlicher Tiefe und Breite.

Aufgabe 19

Potentialtopf **3 Punkte**

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m befinde sich in einer Dimension in folgendem Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{ma^2} \frac{1}{\cosh^2(x/a)}.$$

Das Teilchen habe eine Energie $E = -\frac{\hbar^2 \epsilon^2}{2m} < 0$ und $a > 0$.

a) Stellen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung auf und geben Sie die Randbedingungen für die Wellenfunktion $\psi(x)$ im Unendlichen an.

b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion

$$\psi(x) = C_1(A_+ + \tanh\frac{x}{a})e^{+\epsilon x} + C_2(A_- + \tanh\frac{x}{a})e^{-\epsilon x}$$

die Schrödingergleichung erfüllt. Wie mussen dazu die Konstanten A_+ und A_- gewählt werden?

c) Zeigen Sie, dass $\psi(x)$ nur für einen Energieeigenwert die Randbedingungen im Unendlichen erfüllt und berechnen Sie diesen.