Übungsaufgaben — Theoretische Physik IV

SS 06 — Prof. Dr. C. Gros

4. Übung — Abgabe: Di., 16.05.06
(in der Vorlesung)

Aufgabe 12

Kommutatoren **1 Punkte**

Zeigen Sie, dass für lineare Operatoren folgenden Beziehungen gültig sind:

- $[A, B + \lambda C] = [A, B] + \lambda[A, C]$
- $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
- $[A, B] = -[B, A]$
- $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

Aufgabe 13

Eigenschaften von Operatoren **3 Punkte**

Die Ableitung eines Operators A, der von einem kontinuierlichen reellen Parameter λ abhängt, ist durch

$$\frac{dA(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(\lambda + \varepsilon) - A(\lambda)}{\varepsilon}$$

definiert. Zeigen Sie:

a) $\frac{d}{d\lambda} AB = \frac{dA}{d\lambda} B + A \frac{dB}{d\lambda}$

b) $\frac{d}{d\lambda} A^{-1} = -A^{-1} \frac{dA}{d\lambda} A^{-1}$

c) $\frac{d}{d\lambda}(A^n) = \sum_{l=1}^{n} A^{l-1} \frac{dA}{d\lambda} A^{n-l}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$

d) Berechnen Sie für den Fall, daß A und B nicht von λ abhängen,

$$\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda B} A e^{-\lambda B}) \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda A} e^{\lambda B}).$$

Aufgabe 14

Streuung am repulsiven δ-Potential **3 Punkte**

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m kann sich in einer Dimension frei bewegen. Im Punkt $x = 0$ trifft es auf ein lokalisiertes Streuzentrum, das durch das Potential

$$V(x) = \gamma\ \delta(x), \qquad \gamma > 0$$

beschrieben wird.

a) Geben Sie die stationäre Schrödingergleichung des Problems in der Ortsdarstellung an.

b) Berechnen Sie für eine von links einfallende Welle der Wellenzahl $k > 0$ den Reflektions- und Transmissions-Koeffizienten. Lösen Sie dazu die Schrödingergleichung im Ortsraum. *Hinweis:* Es ist vorteilhaft, die Abkürzung $g = 2m\gamma/\hbar^2$ zu verwenden.

Aufgabe 15

Ehrenfestsches Theorem **3 Punkte**

Zeigen Sie, daß für ein Teilchen der Masse m im Potential $V(\vec{x}, t)$ folgende Beziehung für die zeitliche Ableitung des Impulserwartungswertes gilt:

$$\frac{d\langle\vec{p}\rangle}{dt} = \langle\vec{F}\rangle$$

mit $\vec{F} \equiv -\vec{\nabla}V$ und $\langle\vec{\nabla}V\rangle = \int d^3x\psi^*(\vec{x}, t)\left(\vec{\nabla}V\right)\psi(\vec{x}, t)$. Beachten Sie, daß die Zustandsfunktion $\psi(\vec{x}, t)$ der Schrödinger–Gleichung genügt.