Übungsaufgaben — Theoretische Physik IV

SS 06 — Prof. Dr. C. Gros

3. Übung

Abgabe: Di., 09.05.06
(in der Vorlesung)

Aufgabe 9

Eigenschaften der Fouriertransformierten **3 Punkte**

Zeigen Sie die folgenden Beziehungen für kontinuierliche Fouriertransformationen:

a) $\widetilde{(x\,f)}(k) \;=\; i\frac{d}{dk}\tilde{f}(k)$

b) $k\,\tilde{f}(k) \;=\; -i\;(\widetilde{\frac{d}{dx}f})(k)$

c) *Faltungssatz:* Die Funktion $h \;=\; f \otimes g$ sei die Faltung der Funktion f und g, also

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x')g(x')dx' \;.$$

Zeigen Sie, dass

$$\tilde{h}(k) \;=\; \sqrt{2\pi}\;\tilde{f}(k)\;\tilde{g}(k)\;.$$

Hinweis: $\tilde{f}(k)$ bezeichnet die Fouriertransformierte von $f(x)$.

Aufgabe 10

Zeitentwicklung des Gaußschen Wellenpackets **5 Punkte**

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m, das sich in einer Dimension bewegen kann.

a) Lösen Sie die eindimensionale *freie* Schrödingergleichung im Impulsraum $[i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(k,t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}k^2\tilde{\psi}(k,t)]$ mit der Anfangsbedingung

$$\tilde{\psi}(k,t=0) \;=\; \left(\frac{\sigma_0^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp(-\frac{\sigma_0^2}{2}(k-k_0)^2).$$

Hinweise: Das Ergebnis lautet $\psi(k,t) \;=\; \exp(-i\frac{\hbar}{2m}k^2t)\;\psi(k,t=0)$.

Die Transformation in den Ortsraum ergibt nach längerer Rechnung (*nicht durchzuführen*)

$$\psi(x,t) \;=\; \frac{1}{(\pi\sigma(t)^2)^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{(x-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{2\sigma(t)^2}}\,e^{i\frac{\phi}{2}}\;,$$

mit $\sigma(t)^2 = \sigma_0^2 + \frac{\hbar^2}{\sigma_0^2 m^2}t^2$ und $\phi = \frac{\hbar t}{m\sigma_0^2}\left(\frac{(x-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{\sigma(t)^2} - k_0\sigma_0^2\right) - \arctan\frac{\hbar t}{m\sigma_0^2}$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlickeitsdichten $\tilde{\rho}(k,t) = |\tilde{\psi}(k,t)|^2$ und $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$. Sind hier beide zeitabhängig?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{x}\rangle$ des Ortsoperators und daraus die Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt}$.

d) Berechnen Sie $\langle\hat{p}\rangle$ (im Impulsraum!) und verifizieren Sie die Gültigkeit der klassischen Bewegungsgleichungen für die Erwartungswerte: $m\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt} = \langle\hat{p}\rangle$; $\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt} = 0$.
Hinweis zu c) und d): Sie können Die Ergebnisse im wesentlichen schon aus der Form der x- bzw. p-Abhängigikeit von ψ ablesen! $\psi(x,t)$ ist normiert.

e) Berechnen Sie $\Delta x(t) \equiv \sqrt{\langle(\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle)^2\rangle}$ und $\Delta p(t) \equiv \sqrt{\langle(\hat{p} - \langle\hat{p}\rangle)^2\rangle}$. Bestimmen Sie daraus die Unschärfe $\Delta x(t)\Delta p(t)$.

f) Bestimmen Sie mit Hilfe von $\Delta x(t)$ für
(i) ein Bakterium (Wasserwürfel mit Seitenlänge $1\mu m$ und $\sigma_0 = 10^{-8}m$)
(ii) ein Elektron mit $\sigma_0 = 10^{-10}m$,
wie groß Δx nach 1 Sekunde ist, und nach welcher Zeit Δx sich verdoppelt hat.

Aufgabe 11

Kontinuitätsgleichung **2 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial w(\vec{x},t)}{\partial t} + \text{div}\,\vec{s}(\vec{x},t) \;=\; 0\,, \qquad w(\vec{x},t) = \left|\psi(\vec{x},t)\right|^2,$$

$$\vec{s}(\vec{x},t) = \frac{\hbar}{2mi}\Big(\psi^*(\vec{x},t)\,\text{grad}\psi(\vec{x},t) - \psi(\vec{x},t)\,\text{grad}\psi^*(\vec{x},t)\Big)\,.$$

für ein allgemeines Wellenpaket

$$\psi(\vec{x},t) = \int d^3k\, g(\vec{k})e^{-i(\omega(k)t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\,.$$

erfüllt ist. *Hinweis:* $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$