Übungsaufgaben — Theoretische Physik IV

SS 06 — Prof. Dr. C. Gros

2. Übung

Abgabe: Di., 02.05.06
(in der Vorlesung)

Aufgabe 5

Interferenz **2 Punkte**

Mit Hilfe der Braggschen Reflexionsbedingung $n\lambda = 2g\sin\theta$ bestimme man für die Reflexion an einem Raumgitter die Energie eines
a) Photons,
b) Elektrons,
c) Neutrons,
für die bei gegebener Gitterkonstanten g das Maximum n-ter Ordnung unter einem Winkel θ erscheint. Die Teilchen sollen dabei nicht-relativistisch behandelt werden. Geben Sie numerische Werte für $n = 1$, $g = 5$Å und $\theta = 10°$ an.

Aufgabe 6

Eigenwertproblem II **3 Punkte**

Gegeben seien die beiden 3×3 Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{, und } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie den Kommutator $[A, B] := AB - BA$.

b) Berechnen Sie für A und B jeweils die Eigenwerte und Eigenvektoren.

c) Zeigen Sie dass die Eigenvektoren von A auch Eigenvektoren zu B sind. Sind die Eigenvektoren von B auch Eigenvektoren zu A? Begründen Sie dieses Ergebnis.

Aufgabe 7

Norm der Fouriertransformierten **2 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Norm von Funktionen unter der Fouriertransformation erhalten ist. Im rein kontinuierlichen Fall soll also gelten

$$||\tilde{f}(k)||^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}^*(k)\tilde{f}(k)\,dk \quad \stackrel{?}{=} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)f(x)\,dk \equiv ||f(x)||^2 .$$

Zeigen Sie auch die analoge Beziehung im rein diskreten Fall (Fourierreihen). Führen Sie die Rechnungen explizit durch (Summen bzw. Integrale).
Hinweis: $\tilde{f}(k)$ bezeichnet die Fouriertransformierte von $f(x)$.

Aufgabe 8

Erwartungswerte von Wellenfunktionen **3 Punkte**

Gegeben sei die Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k,t)\, e^{ikx}\, dk$$

mit

$$\varphi(k,t) = C \frac{k_0}{k_0^2 + k^2}\, e^{-i\omega(k)t} \qquad \text{und} \qquad \omega(k) = \hbar k^2/2m.$$

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante C.

b) Berechnen Sie $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ und $\Delta p = \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle}$.

c) Zeigen Sie, daß der Erwartungswert $\langle x \rangle$ auch in der Form

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(k,t) i \frac{\partial}{\partial k} \varphi(k,t)\, dk,$$

wobei $i\frac{\partial}{\partial k} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$ der Ortsoperator in Impulsdarstellung ist, geschrieben werden kann.

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2}{(1+z^2)^4} dz = \frac{\pi}{16}.$$