Übungsaufgaben — Theoretische Physik IV

SS 06 — Prof. Dr. C. Gros

10. Übung — Abgabe: Di., 04.07.06
(in der Vorlesung)

Aufgabe 34

Spinpräzession **2 Punkte**

Es werde ein Spin in einem Magnetfeld betrachtet: $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, wobei $\vec{\mu} = \frac{ge}{2m}\vec{s}$ und $\vec{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ ($e = -e_0$, $m = m_e$, $g = 2$ für ein Elektron).

a) Man bestimme die Zeitabhängigkeit des Zustandes

$$\chi = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

durch Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung. Das Magnetfeld sei in z-Richtung orientiert.

b) Anschließend soll der Erwartungswert des Operators $< \vec{\sigma} >$ im Zustand χ (d.h. $\langle \chi(t) | \, \sigma_x \, | \chi(t) \rangle$, etc.) als Funktion der Zeit berechnet werden.

Aufgabe 35

Harmonischer Oszillator mit zusätzlichen Potential **4 Punkte**

Rechnen Sie das Energiespektrum eines harmonischen Oszillators in einem zusätzlichen Potental:
a) $V(x) = a$
b) $V(x) = bx$
c) $V(x) = cx^2$
bis zur zweiten Ordnung in der Störungstheorie.(a, b, c sind Konstanten)
Interpretieren Sie die Ergebnisse, vergleichen Sie mit den exakten Ergebnissen.

Aufgabe 36

Dirac-Schreibweise **4 Punkte**

Viele Eigenschaften der Vektoren und Operatoren im Hilbertraum treten schon im R^3 auf, welcher in der folgenden Aufgabe in der *Dirac–Schreibweise* behandelt werden soll. Gegeben sei die *orthonormale Basis*

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie der *Zustand*

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle\right)$$

und der Operator $A = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}|i\rangle\langle j|$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den *Mittelwert* $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$.

(b) Berechnen Sie die *Eigenwerte* a_k und die zugehörigen orthonormierten *Eigenvektoren* $|a_k\rangle$ des Operators A.

(c) Bestimmen Sie die Matrix $\tilde{A}_{kl} = \langle a_k|A|a_l\rangle$ und zeigen Sie, dass $\tilde{A}_{kl} = a_k\delta_{kl}$.

(d) Bestimmen Sie die Komponenten ψ_k in der Zerlegung $|\psi\rangle = \sum_k \psi_k|a_k\rangle$.

(e) Drücken Sie den *Erwartungswert* $\langle\psi|A|\psi\rangle$ in der Basis $\{|a_k\rangle\}$ aus. Wie wäre die *Interpretation* dieses Ergebnisses im Rahmen der *Quantenmechanik*?

(f) Zeigen Sie, dass

$$P = |1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|$$

ein *Projektionsoperator* ist, d.h. die Gleichungen $P^2 = P$, $P^\dagger = P$ erfüllt. Was passiert, wenn P auf einen beliebigen Zustand $|\phi\rangle$ angewandt wird? Berechnen Sie die *Eigenwerte* und die zugehörigen *Eigenvektoren* des Operators P. Diskutieren Sie ebenso den Operator $Q = 1 - P$. Was ergibt $Q \cdot P$ bzw. $P \cdot Q$?