

# Chapter 10

## Störungstheorie zeitabhängiger Prozesse

Die meisten physikalischen Übergänge sind nicht stationär, sondern laufen in einem endlichen Zeitintervall ab. Daher muss man i.d.R. die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung bzw. zeitabhängige Operatoren zur Beschreibung des Systems benutzen. Wichtige Beispiele sind:

1. Emission und Absorption von Quanten (Licht etc.),
2. Zerfälle von Teilchen,
3. Streuprozesse.

### Einschaltvorgang

Typischerweise wird die für die betrachteten Vorgänge maßgebliche Wechselwirkung  $V(t)$  erst zu einer Zeit  $t > -T$ ,  $T \gg 0$ , wirksam und ist später für  $t > T$  nicht mehr spürbar, d.h. wir haben

$$V(t) = 0 \quad \text{für} \quad |t| > T \gg 0 .$$

Äquivalent hierzu kann man langsame Einschaltvorgänge betrachten, d.h.

$$V(t) \equiv V_\varepsilon(t) = V_0 e^{-\varepsilon|t|} e^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad 0 < \varepsilon \ll 1 .$$

Hierbei ist  $\omega$  die Frequenz der Störung, z.B. die des Lichtfeldes.

## 10.1 Schrödinger-Bild

### Zeitunabhängiger Hamilton-Operator

Die infinitesimale Zeitentwicklung eines Schrödinger-Zustandes  $\psi_S(t)$  ist durch

$$i\hbar \partial_t \psi_S(t) = H \psi_S(t)$$

gegeben. Falls der Hamilton-Operator  $H$  nicht von der Zeit  $t$  abhängt, so ist die Zeitentwicklung von  $\psi_S(t_0)$  zur Zeit  $t_0$  nach  $\psi_S(t)$  zur Zeit  $t > t_0$  (siehe Kap. 9.1) durch die unitäre Transformation

$$\begin{aligned} \psi_S(t) &= U(t, t_0) \psi_S(t_0) \\ U(t, t_0) &= e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \\ U(t_0, t_0) &= 1 \end{aligned} \quad H(t) \equiv H ,$$

gegeben.

### Zeitabhängiger Hamilton-Operator

Für den allgemeinen Fall  $H = H(t)$  finden wir aus der Definition des Zeitewicklungsoperators,  $\psi_S(t) = U(t, t_0) \psi_S(t_0)$ , und der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \partial_t \psi_S(t) = i\hbar \partial_t U(t, t_0) \psi_S(t_0) = H(t) \psi_S(t) = H(t) U(t, t_0) \psi_S(t_0) ,$$

für  $U(t, t_0)$  die Differentialgleichung

$$i\hbar \partial_t U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0) ,$$

welche als Grundlage für weitere Darstellungen des Zeitewicklungsoperators dienen wird.

### Integralgleichung für $U(t, t_0)$

Die Differentialgleichung für  $U(t, t_0)$  ist zusammen mit der Anfangsbedingung  $U(t_0, t_0) = 1$  zu der folgenden Integralgleichung für  $U(t, t_0)$  äquivalent,

$$U(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') U(t', t_0)$$

wie man leicht durch Differentiation nachprüfen kann.

### Neumann-Reihe

Die Lösung der Integralgleichung läßt sich iterativ in Form einer sogenannten *Neumann'schen Reihe* angeben: Man setzt

$$\begin{aligned} U^{(0)}(t, t_0) &= 1 \\ U^{(1)}(t, t_0) &= 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1) U^{(0)}(t_1, t_0) \\ U^{(2)}(t, t_0) &= 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_2 H(t_2) U^{(1)}(t_2, t_0) \\ &= 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1) + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_2 H(t_2) \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_1) \end{aligned}$$

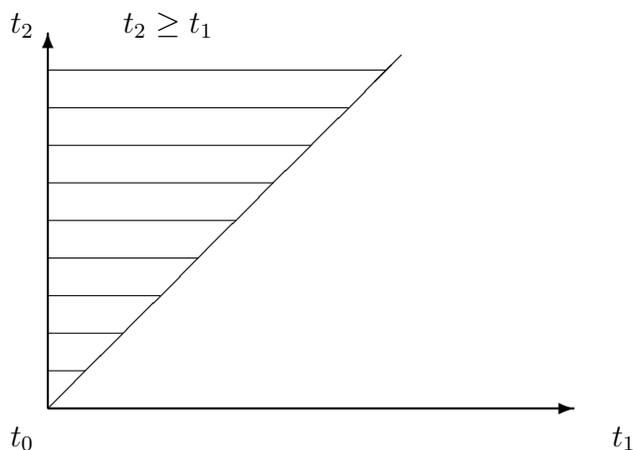
also allgemein für  $U^{(n)}(t, t_0)$ :

$$U^{(n)}(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_n H(t_n) U^{(n-1)}(t_n, t_0),$$

so daß

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^n \int_{t \geq t_n \geq \dots \geq t_1 \geq t_0} dt_n \cdots dt_1 H(t_n) \cdots H(t_1).$$

Unter dem Integral ist die Reihenfolge der  $H(t_i)$  wichtig, da i.a.  $H(t_2)H(t_1) \neq H(t_1)H(t_2)$ . Der Teilraum, über den integriert wird, sieht für  $n = 2$  so aus:



### Zeitordnungs-Operator

Die Integration über  $t_1$  und  $t_2$  etc. in der Neumann'schen Reihe läßt sich durch die Einführung des sog. *Zeitordnungsoperators*  $T$  symmetrisieren. Er ist wie folgt definiert:

$$T(H(t_1)H(t_2)) \equiv \begin{cases} H(t_1)H(t_2) & \text{für } t_1 > t_2 \\ H(t_2)H(t_1) & \text{für } t_2 > t_1 \end{cases}$$

Insbesondere gilt  $T(H(t_1)H(t_2)) = T(H(t_2)H(t_1))$ , und somit

$$\int_{t_0}^t dt_2 H(t_2) \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_1) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t T(H(t_1)H(t_2)) dt_1 dt_2 .$$

Mit der Stufenfunktion  $\theta(t)$ ,

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

läßt sich der Zeitordnungsoperator auch als

$$T(H(t_1)H(t_2)) = \theta(t_1 - t_2) H(t_1)H(t_2) + \theta(t_2 - t_1) H(t_2)H(t_1)$$

schreiben. Allgemein gilt somit

$$T(H(t_1) \cdots H(t_n)) = \sum_{\text{Permut.}} \theta(t_{\alpha_1} - t_{\alpha_2}) \cdots \theta(t_{\alpha_{n-1}} - t_{\alpha_n}) H(t_{\alpha_1}) \cdots H(t_{\alpha_n}).$$

Der Zeitentwicklungsoperator spielt in allen störungstheoretischen Darstellungen eine fundamentale Rolle, insbesondere auch in der Theorie der *Green'schen Funktionen*, durch welche alle Meßprozesse in der Vielteilchentheorie dargestellt werden.

### Formale Darstellung der Neumann-Reihe

Mit Hilfe des Zeitordnungsoperators  $T$  läßt sich die Neumann-Reihe für den Zeitentwicklungsoperator  $U(t, t_0)$  formal wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \cdots \int_{t_0}^t dt_1 \cdots dt_n T(H(t_1) \cdots H(t_n)) \\ &\equiv T \left( \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \right\} \right) \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist *formal*, da jede praktische Rechnung mit der ursprünglichen Definition durchgeführt werden muss. Für formale Umformungen und die Entwicklung diagrammatischer Methoden ist der Zeitordnungsoperator jedoch unerlässlich.

### Unitarität

Für zwei allgemeine Lösungen  $\psi(t)$  und  $\phi(t)$  gilt

$$i\hbar \frac{d}{dt} (\psi(t), \phi(t)) = (\psi(t), H(t)\phi(t)) - (H(t)\psi(t), \phi(t)) = 0$$

für die zeitliche Entwicklung des Skalarprodukts, da  $H(t)$  selbstadjungiert ist. Damit ist also das Skalarprodukt eine Konstante der Bewegung und aus

$$(\psi(t), \phi(t)) = (U(t, t_0)\psi(t_0), U(t, t_0)\phi(t_0)) = (\psi(t_0), \phi(t_0))$$

folgt das  $U(t, t_0)$  unitär ist.

## 10.2 Dirac- oder Wechselwirkungsbild

Dieses, vor allem für die Störungstheorie wichtige Bild zur zeitlichen Entwicklung eines quantentheoretischen Systems, wurde von Dirac eingeführt (s. Kap. 9.1).

### Zeitunabhängiges ungestörtes System

Im Normalfall gilt

$$H(t) = H_0 + V(t),$$

das ungestörte System  $H_0$  ist also nicht explizit von der Zeit abhängig.

### Zeitentwicklung durch $H_0$

Beim Wechselwirkungsbild separiert man die Zeitentwicklung von Wellenfunktion im Schrödinger-Bild,  $\psi_S(t)$  in zwei Anteile. Die Zeitentwicklung durch  $H_0$  ist durch

$$\begin{aligned}\psi_I(t) &= e^{iH_0t/\hbar} \psi_S(t) \\ A_I(t) &= e^{iH_0t/\hbar} A_S e^{-iH_0t/\hbar}\end{aligned}$$

gegeben.  $\psi_I(t)$  ist die Wellenfunktion im Wechselwirkungsbild ( $I$  steht für *interaction*). Ohne Störung ( $V = 0$ ) gilt

$$\psi_I(t) = \psi_S(t).$$

Für eine Störung  $V(t)$ , welche für  $|t| > T$  verschwindet, sind also die Anfangs- und Endzustände  $\psi_S(\mp T)$  durch

$$\psi_S(\mp T) = \psi_I(\mp T)$$

gegeben.

### Zeitentwicklung durch die Störung

Die Zeitentwicklung ist im Wechselwirkungsbild durch

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{d}{dt} \psi_I &= -H_0 e^{iH_0t/\hbar} \psi_S(t) + e^{iH_0t/\hbar} i\hbar \frac{d}{dt} \psi_S(t) \\ &= e^{iH_0t/\hbar} (H(t) - H_0) \psi_S(t) \\ &= e^{iH_0t/\hbar} V(t) e^{-iH_0t/\hbar} e^{iH_0t/\hbar} \psi_S(t) \\ &= V_I(t) \psi_I(t)\end{aligned}$$

geben. Zusammen gilt also

$$\begin{aligned}i\hbar \partial_t \psi_I &= V_I(t) \psi_I(t) \\ \frac{d}{dt} A_I &= \frac{i}{\hbar} [H_0, A_I] + (\partial_t A)_I\end{aligned}$$

Das Wechselwirkungsbild erlaubt es damit die unterschiedliche physikalische Bedeutung von  $H_0$  und der Störung  $V(t)$  mathematisch präzise zu erfassen.

### Zeitentwicklungsoperator $U_I(t, t_0)$ im Wechselwirkungsbild

Von Interesse ist nun der Zeitentwicklungsoperator  $U_I(t, t_0)$  im Wechselwirkungsbild, welcher via

$$\psi_I(t) = U_I(t, t_0) \psi_I(t_0) \quad U_I(t_0, t_0) = 1$$

definiert ist. Falls  $V(t)$  nicht explizit von der Zeit abhängt, so gilt (s. Kap. 9.1)

$$U_I(t, t_0) = e^{iH_0 t/\hbar} e^{-iHt/\hbar} e^{iHt_0/\hbar} e^{-iH_0 t_0/\hbar}.$$

Ist  $V(t)$  dagegen zeitabhängig, so bemerkt man wieder (wie im Schrödinger-Bild), daß die Differentialgleichung

$$i\hbar \partial_t U_I(t, t_0) = V_I(t) U_I(t, t_0)$$

zusammen mit der Anfangsbedingung  $U_I(t_0, t_0) = 1$  zu der Integralgleichung

$$U_I(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') U_I(t', t_0)$$

äquivalent ist. Diese hat nun wiederum die formale Lösung

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots dt_n T(V_I(t_1) \cdots V_I(t_n)) \\ &= T\left(\exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t')\right\}\right) \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist der maßgebliche Ausgangspunkt für störungstheoretische Rechnungen, indem man sukzessive Terme mit  $n = 1, 2, 3$  etc. berücksichtigt.

### 10.3 Übergänge 1. Ordnung

Liegt zur Zeit  $t = t_0$  der Zustand  $|\psi_I(t_0)\rangle$  vor, so entwickelt sich daraus aufgrund der Störung  $V_I(t)$  zur Zeit  $t$  der Zustand  $|\psi_I(t)\rangle = U_I(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle$ .

#### Lineare Störungstheorie

Nimmt man aus der Reihe für  $U(t, t_0)$  nur die Terme mit  $n = 0$  und 1 mit, so folgt:

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi_I(t_0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') |\psi_I(t_0)\rangle$$

Die Korrektur ist also linear in der Störung.

#### Eigenzuständen von $H_0$

Es seien

$$|\varphi_n\rangle, \quad H_0 |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle,$$

die stationären Eigenzustände von  $H_0$ . Wir wählen einen Eigenzustand als Anfangszustand:

$$|\psi_I(-T)\rangle = |\varphi_n\rangle, \quad t_0 = -T, \quad T \gg 0.$$

### **Entwicklung nach Eigenfunktionen von $H_0$**

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, daß sich das System zur Zeit  $t = +T$  im Zustand  $|\varphi_m\rangle$  befindet, ist durch

$$\langle \varphi_m | \psi_I(T) \rangle = \delta_{mn} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-T}^{+T} dt' \langle \varphi_m | V_I(t') | \varphi_n \rangle$$

gegeben. Aus  $V_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V(t) e^{-iH_0 t/\hbar}$ , folgt

$$\langle \varphi_m | V_I(t) | \varphi_n \rangle = e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \langle \varphi_m | V(t) | \varphi_n \rangle,$$

und daher

$$\langle \varphi_m | \psi_I(T) \rangle = \delta_{mn} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-T}^{+T} dt' e^{i(E_m - E_n)t'/\hbar} \langle \varphi_m | V(t') | \varphi_n \rangle$$

### **Übergangswahrscheinlichkeit**

Dies ist die grundlegende Formel für die Berechnung der *Übergangswahrscheinlichkeit*

$$w_{n \rightarrow m}(2T) = \left| \langle \varphi_m | \psi_I(T) \rangle \right|^2$$

für die Störungstheorie in ersten Ordnung in  $V(t)$ . Um die Formel weiter auszuwerten, sind zusätzliche Kenntnisse zur Form von  $V(t)$  notwendig. Zwei wichtige Beispiele werden nun diskutiert.

#### **10.3.1 Zeitunabhängiges Potential**

Falls  $V$  nicht explizit von der Zeit abhängt, so läßt sich für  $\omega_{mn} \neq 0$  das Zeitintegral unmittelbar ausführen:

$$\int_{-T}^{+T} dt' e^{i\omega_{nm}t'} = \frac{2 \sin(\omega_{mn}T)}{\omega_{mn}} \quad \omega_{mn} = \frac{1}{\hbar} (E_m - E_n).$$

### **Darstellung der $\delta$ -Funktion**

Bei der Berechnung von  $w_{n \rightarrow m}(2T)$  ist die Darstellung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin^2(xT)}{\pi x^2 T} \right) = \delta(x),$$

für die *Distribution*  $\delta(x)$  nützlich. Begründung: Es sei  $f(x)$  eine Testfunktion. Dann gilt

$$\int_{-a}^{+a} dx \frac{\sin^2(xT)}{x^2T} f(x) = \int_{-aT}^{+aT} dy \frac{\sin^2(y)}{y^2} f(y/T), \quad y = Tx.$$

Für große  $T$  folgt daraus

$$\int_{-a}^{+a} dx \frac{\sin^2(xT)}{x^2T} f(x) \approx f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\sin^2(y)}{y^2} = f(0) \pi.$$

### Übergangswahrscheinlichkeit

Für  $E_m \neq E_n$  und  $T \rightarrow \infty$  erhalten wir somit

$$\begin{aligned} w_{n \rightarrow m}(2T) &= \left| \frac{2 \sin(\omega_{mn}T)}{i\hbar\omega_{mn}} \right|^2 |\langle \varphi_m | V | \varphi_n \rangle|^2 \\ &= \frac{4\pi T}{\hbar^2} \delta(\omega_{mn}) |\langle \varphi_m | V | \varphi_n \rangle|^2 \end{aligned}$$

für die Übergangswahrscheinlichkeit. Wegen  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$  bekommen wir damit für die Übergangsrate

$$\Gamma_{n \rightarrow m} = w_{n \rightarrow m}(2T)/(2T)$$

das wichtige Resultat

$$\Gamma_{n \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_n - E_m) |\langle \varphi_m | V | \varphi_n \rangle|^2$$

### Fermi's goldene Regel

Im allgemeinen steht als Endzustand nicht nur ein einziger Zustand  $\varphi_m$  mit scharfer Energie experimentell zur Verfügung, sondern ein Energieintervall  $\Delta E_m$ , in dem  $\rho(E_m)\Delta(E_m)$  Zustände liegen. Dann beträgt die Gesamtrate

$$\bar{\Gamma}_n(E_n) = \int dE_m \rho(E_m) \Gamma_{n \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} \rho(E_n) |\langle \varphi_n | V | \varphi_n \rangle|^2$$

Diese Formel wird (nach Fermi) als *Goldene Regel* der zeitabhängige Störungstheorie 1. Ordnung bezeichnet.

- Es sei betont, daß die 1. Ordnung der Störungstheorie nur Sinn macht, falls die höheren Ordnungen entsprechend vernachlässigt werden können.
- Die Zustandsdichte  $\rho(E_n)$  läßt sich experimentell mittels der goldenen Regel bestimmen wenn die Matrixelemente  $\langle \varphi_n | V | \varphi_n \rangle$  nur schwach von der Energie  $E_n$  abhängig sind.

### 10.3.2 Zeitlich periodisches Potential

$V(t)$  habe die Gestalt

$$V(t) = A e^{-i\omega t} + A^+ e^{i\omega t},$$

wobei  $A$  ein beliebiger Operator ist. Damit ist  $V(t)$  selbstadjungiert und periodisch in der Zeit  $t$ .

#### Übergangsamplitude

Für die Übergangsamplitude ergibt sich daraus

$$\langle \varphi_m | \varphi_I(T) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \int_{-T}^{+T} dt \left[ e^{i(\omega_{mn}-\omega)t} \langle m | A | n \rangle + e^{i(\omega_{mn}+\omega)t} \langle m | A^+ | n \rangle \right].$$

Bei der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit ist zu beachten, daß die gemischten Terme beim Quadrieren wegfallen: Für sehr große  $T$  gilt nämlich für  $m \neq n$

$$\int_{-T}^{+T} dt e^{i(\omega_{mn}-\omega)t} \int_{-T}^{+T} dt' e^{i(\omega_{mn}+\omega)t'} \approx \delta(\omega_{mn}-\omega) \delta(\omega_{mn}+\omega) = 0.$$

Wir haben demnach für große  $T$

$$w_{n \rightarrow m} = 4\pi T \frac{1}{\hbar^2} \left[ \delta(\omega_{mn}-\omega) |\langle m | A | n \rangle|^2 + \delta(\omega_{mn}+\omega) |\langle m | A^+ | n \rangle|^2 \right].$$

#### Emission und Absorption

Für die Rate  $\Gamma_{n \rightarrow m} = w_{m \rightarrow n} / (2T)$  folgt hieraus

$$\Gamma_{n \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} \left[ \delta(E_m - E_n - \hbar\omega) |\langle m | A | n \rangle|^2 + \delta(E_m - E_n + \hbar\omega) |\langle m | A^+ | n \rangle|^2 \right]$$

Wegen  $E_m = E_n + \hbar\omega$  beschreibt der Operator  $A$  einen Absorptionsprozeß, während  $A^+$  wegen  $E_m = E_n - \hbar\omega$  einen Emissionsprozeß für ein Quant der Energie  $\hbar\omega$  beschreibt.

#### Photonen

Die gerade skizzierten Überlegungen sind die Grundlage für das Verständnis von Absorption und Emission von Strahlung. Dabei sind dann die  $A^+$  und  $A$  die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Lichtquanten, den *Photonen*. Allerdings kommt zu  $V(t)$  dann auch noch die Ortsabhängigkeit der ebenen Wellen,  $\sim \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  hinzu.

## 10.4 Potentialstreuung: 1. Ordnung Störungstheorie

Es sei  $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$  und  $\tilde{V}$  ein Potential, an dem die im Anfangs- und Endzustand freien Teilchen gestreut werden,  $H = H_0 + \tilde{V}$ .

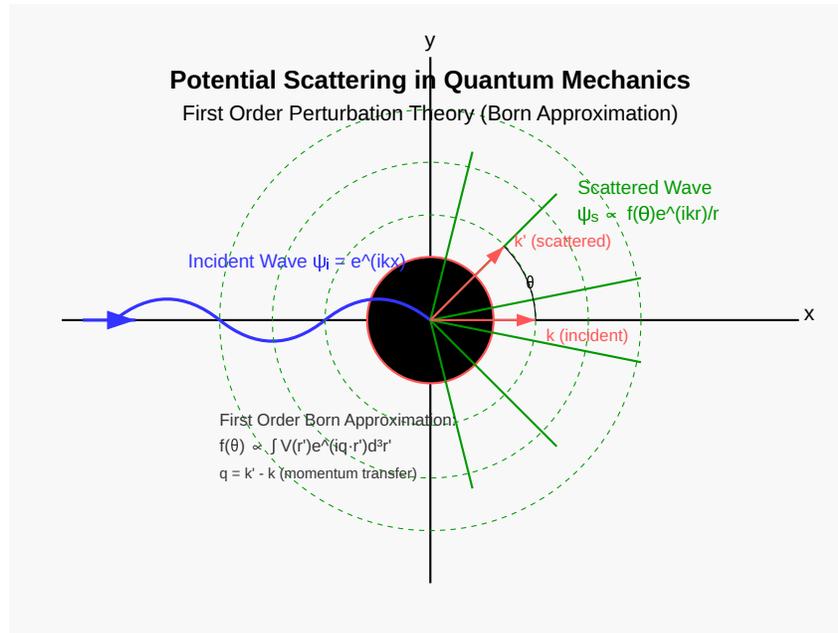


Figure 10.1: Potentialstreuung Illustration

### Periodische Randbedingungen

Das System sei in einem Volumen  $V = L^3$  gegeben. Als Basis wählen wir die freien Wellenfunktionen

$$\varphi_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}.$$

Da wir am Limes  $V \rightarrow \infty$  interessiert sind, können wir die Randbedingungen frei wählen. Günstig sind die periodischen Randbedingungen:

$$e^{ik_j L} = 1, \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{L} \vec{n}, \quad \vec{n} = (n_1, n_2, n_3), \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

### Anfangs- und Endzustand

Wir betrachten einen Streuprozess an einem räumlich begrenzten Potential  $\tilde{V}$ . Dann sind sowohl der Anfangs- wie auch der Endzustand ebene Wellen:

$$\begin{aligned} \text{Anfangszustand:} \quad \varphi_{\vec{k}_a} &= \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_a \cdot \vec{x}} & E_a &= \frac{\hbar^2 k_a^2}{2m} \\ \text{Endzustand:} \quad \varphi_{\vec{k}_e} &= \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_e \cdot \vec{x}} & E_e &= \frac{\hbar^2 k_e^2}{2m} \end{aligned}$$

### Goldene Regel

Für die Übergangsrates  $\Gamma_{\vec{k}_a \rightarrow \vec{k}_e}$  erhält man nach der Goldenen Regel

$$\Gamma_{\vec{k}_a \rightarrow \vec{k}_e} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_e - E_a) \left| \langle \vec{k}_e | \tilde{V} | \vec{k}_a \rangle \right|^2,$$

mit

$$\left| \langle \vec{k}_e | \tilde{V} | \vec{k}_a \rangle \right|^2 = \frac{1}{V} \int d^3x e^{i(\vec{k}_a - \vec{k}_e) \cdot \vec{x}} \tilde{V}(\vec{x}).$$

Die Anzahl der Zustände im Endzustandsintervall  $\Delta k_{1e} \Delta k_{2e} \Delta k_{3e} = \Delta^3 k_e$  ist durch

$$\Delta^3 n_e = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta^3 k_e$$

gegeben. Die zugehörige Rate ist demnach

$$\Gamma_{\vec{k}_a \rightarrow \vec{k}_e} \Delta^3 n_e = \frac{1}{(2\pi)^2 \hbar V} \delta(E_a - E_e) \Delta^3 k_e \left| \int d^3x e^{i(\vec{k}_a - \vec{k}_e) \cdot \vec{x}} \tilde{V}(\vec{x}) \right|^2.$$

### Teilchenstromdichte

Die Teilchenstromdichte  $\vec{j}_a$  der einfallenden Teilchen ist

$$\vec{j}_a = \frac{1}{V} \frac{\hbar \vec{k}_a}{m}.$$

Damit erhalten wir für den 3-fach differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\Delta\sigma = j_e \Delta\Omega_e / j_a$

$$\Delta\sigma = \frac{\Gamma_{\vec{k}_a \rightarrow \vec{k}_e} \Delta^3 n_e}{|\vec{j}_a|} = \frac{m}{(2\pi\hbar)^2} \frac{1}{|\vec{k}_a|} \delta(E_a - E_e) \Delta^3 k_e \left| \int d^3x e^{i(\vec{k}_a - \vec{k}_e) \cdot \vec{x}} \tilde{V}(\vec{x}) \right|^2$$

Wegen

$$\Delta^3 k_e = k_e^2 dk_e d\Omega_e = \frac{m}{\hbar^2} k_e dE_e d\Omega_e$$

bekommen wir schließlich mit  $k_e = k_a$

$$\Delta\sigma = \frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \left| \int d^3x e^{i(\vec{k}_a - \vec{k}_e) \cdot \vec{x}} \tilde{V}(\vec{x}) \right|^2 \delta(E_a - E_e) dE_e d\Omega_e$$

### Differentielle Wirkungsquerschnitt

Die Integration über die Endzustandsenergie  $E_e$  ergibt die wichtige Formel

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega_e} = \frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \left| \int d^3x e^{i(\vec{k}_a - \vec{k}_e) \cdot \vec{x}} \tilde{V}(\vec{x}) \right|^2$$

(Der Index (1) soll andeuten, daß es sich lediglich um die 1. Näherung handelt.)

### Impulsübertrag

Man sieht, daß  $d\sigma^{(1)}/d\Omega_e$  nur vom Impulsübertrag  $\vec{q} = \vec{k}_a - \vec{k}_e$  abhängt.

Falls  $\tilde{V}(\vec{x}) = \tilde{V}(r)$ , so läßt sich das Integral noch weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{iq \cos \theta} \tilde{V}(r) &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \tilde{V}(r) \int_0^\pi d\theta e^{iq \cos \theta} \sin \theta \\ &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \tilde{V}(r) \int_{-1}^{+1} dz e^{iqz} \\ &= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr r \tilde{V}(r) \sin(qr) \end{aligned}$$

so daß

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega_e} = \left( \frac{4m^2}{q^2 \hbar^4} \right) \left| \int_0^\infty dr r \tilde{V}(r) \sin(qr) \right|^2$$

### Yukawa-Potential

Das abgeschirmte Coulomb-Potential

$$\tilde{V}(r) = g \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

wird auch das *Yukawa-Potential* genannt, hierbei ist  $1/\mu$  die Abschirmlänge.

Da  $\int_0^\infty dr e^{-\mu r} \sin(rq) = \frac{q}{q^2 + \mu^2}$ , so folgt

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega_e} = \left( \frac{2mg}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{(q^2 + \mu^2)^2}$$

Da

$$\begin{aligned} \vec{q}^2 &= (\vec{k}_a - \vec{k}_e)^2 = 2k_a^2(1 - \cos[\angle(\vec{k}_a, \vec{k}_e)]), \\ \angle(\vec{k}_a, \vec{k}_e) &= \vartheta : \quad \text{Streuwinkel,} \end{aligned}$$

und  $(1 - \cos \vartheta) = 2 \sin^2(\vartheta/2)$ , so folgt

$$q^2 = 4k_a^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{8mE_a}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

### Rutherford'sche Streuformel

Für  $\mu = 0$  ergibt sich daher

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega} = \frac{g^2}{16E_a^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Dies ist die *Rutherford'sche Formel* für die Coulomb-Streuung. Sie ergibt sich also quantenmechanisch in 1. Ordnung Störungstheorie.