

---

# Quantenmechanik I

---

**SS 2025**

Claudius Gros  
Institut für Theoretische Physik  
Goethe Universität Frankfurt



# Chapter 3

## Der harmonische Oszillator

### 3.1 Eigenfunktionen und Eigenwerte

Der klassische harmonische Oszillator wird durch die Hamiltonfunktion

$$E = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{b}{2}x^2, \quad b > 0$$

beschrieben, welche auch gleichzeitig die Gesamtenergie ist. Daraus ergibt sich nach dem Korrespondenzprinzip der Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{b}{2}x^2$$

für die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung  $\mathbf{H} u(x) = E u(x)$ .

#### Randbedingungen

Das Potential  $bx^2/2$  wächst monoton mit der Distanz vom Ursprung, womit die Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $|u(x)|^2$  für große  $|x|$  gegen Null geht. Gesucht sind damit Lösungen, für die

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \quad \text{und} \quad (u, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx u^*(x)u(x) = 1$$

gilt. Es wird sich zeigen, daß nur bestimmte Werte von  $E$  mit dieser Bedingung verträglich sind (diskretes Spektrum).

#### Reskalierung

Mit

$$\omega = \sqrt{\frac{b}{m}}, \quad \varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}, \quad \beta^2 = \frac{m\omega}{\hbar},$$

erhält man

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \left( \beta^2 x^2 - \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2 u}{dx^2} \right)$$

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{d^2 u}{dx^2} = (\beta^2 x^2 - \varepsilon) u$$

**Eigenzustand für  $\varepsilon = 1$** 

Die reskalierte Gleichung läßt sich zunächst approximativ für sehr große  $x$  lösen:

$$\text{Für } \beta^2 x^2 \gg \varepsilon \quad \text{gilt} \quad u''_\infty = \beta^4 x^2 u_\infty.$$

Eine approximative Lösung ist

$$\begin{aligned} u_\infty &= e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} \\ u'_\infty &= -\beta^2 x e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} \\ u''_\infty &= -\beta^2 e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} + \beta^4 x^2 e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} = \beta^2(\beta^2 - 1)x^2 u_\infty \end{aligned}$$

Falls  $\varepsilon = 1$  ist  $u_\infty(x)$  somit sogar eine exakte Lösung, mit  $E = E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ . Wir bezeichnen mit  $u_0(x)$  die zugehörige normierte Lösung der Schrödinger-Gleichung, mit  $(u_0, u_0) = 1$  (Gauss Integral) und

$$u_0(x) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\beta^2 x^2/2}, \quad E = E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Wir werden sehen, dass  $u_0(x)$  der Grundzustand ist und  $E_0 = \hbar\omega/2$  die Grundzustandsenergie.

**Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren**

Alle Eigenlösungen und Eigenwerte lassen sich iterativ aus dem Grundzustand  $u_0(x)$  berechnen. Dazu betrachten wir Operatoren

$$\mathbf{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \beta x + \frac{1}{\beta} \frac{d}{dx} \right) \quad \mathbf{a}^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \beta x - \frac{1}{\beta} \frac{d}{dx} \right)$$

Man nennt  $\mathbf{a}^+$  und  $\mathbf{a}$  *Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren*. Sei  $u = u(x)$  beliebig, mit  $\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} = 1$  gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^+(\mathbf{a}u) &= \frac{1}{2} \left( \beta^2 x^2 - \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2}{dx^2} \right) u - \frac{1}{2}u \\ \mathbf{a}(\mathbf{a}^+u) &= \frac{1}{2} \left( \beta^2 x^2 - \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2}{dx^2} \right) u + \frac{1}{2}u \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^+\mathbf{a})u &= u \\ \mathbf{a}\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^+\mathbf{a} &= 1 = [\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] \end{aligned}$$

Auf- und Absteigeoperatoren genügen daher *bosonischen Vertauschungsrelationen*, mehr dazu in der Quantenstatistik. Ferner gilt

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left( \mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \frac{1}{2} \right)$$

und

$$(u_1, \mathbf{a}u_2) = (\mathbf{a}^+u_1, u_2)$$

für Funktionen  $u_1, u_2$ , die im Unendlichen hinreichend stark verschwinden. Damit sind  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{a}^+$  konjugierte Operatoren.

### Grundzustand

Die Schrödinger-Gleichung läßt sich folgenderweise schreiben:

$$(\mathbf{a}^+ \mathbf{a}) u(x) = \frac{1}{2} (\varepsilon - 1) u(x).$$

Für normierte Wellenfunktionen  $u(x)$  folgt hieraus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\varepsilon - 1) &= \frac{1}{2} (\varepsilon - 1) (u, u) = (u, \mathbf{a}^+ \mathbf{a} u) \\ &= (\mathbf{a} u, \mathbf{a} u) \geq 0 \end{aligned}$$

wobei die Gleichheit dann und nur dann gilt, falls  $\mathbf{a}u = 0$  und ebenfalls  $\varepsilon = 1$ . Also

$$\mathbf{a}u(x) = 0 : \quad \frac{du}{dx} = -\beta^2 x u(x), \quad u(x) = u_0(x) = \left( \frac{\beta^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2}.$$

Also ist  $\varepsilon = 1$ , d.h.  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ , der kleinstmögliche Eigenwert von  $\mathbf{H}$ , und damit die Grundzustandsenergie.

### Auf- und Absteigen

Wir betrachten den Kommutator von  $\mathbf{a}$  mit dem Hamiltonoperator  $H = \hbar\omega(\mathbf{a}^+ \mathbf{a} + 1/2)$ :

$$\mathbf{a} \left( \mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \frac{1}{2} \right) = \left( \mathbf{a}^+ \mathbf{a} + [\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] \right) \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{a} = (\mathbf{a}^+ \mathbf{a} + 1) \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{a},$$

also:

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \frac{1}{2} \right) (\mathbf{a}u) &= \mathbf{a} \left( \mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \frac{1}{2} \right) u - \mathbf{a}u \\ \left( \mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \frac{1}{2} \right) (\mathbf{a}^+u) &= \mathbf{a}^+ \left( \mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \frac{1}{2} \right) u + \mathbf{a}^+u \end{aligned}$$

mit der analogen Rechnung für  $\mathbf{a}^+$ .

### Interpretation

Mit  $H = \hbar\omega(\mathbf{a}^+\mathbf{a} + 1/2) = \hbar\omega \varepsilon/2$  folgern wir somit

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{a}u) &= \frac{\hbar\omega}{2}(\varepsilon - 2)(\mathbf{a}u), \\ \mathbf{H}(\mathbf{a}^+u) &= \frac{\hbar\omega}{2}(\varepsilon + 2)(\mathbf{a}^+u).\end{aligned}$$

Ist also  $u$  eine Eigenfunktion mit Eigenwert  $\hat{\varepsilon}$ , so ist damit  $\mathbf{a}u$  eine Lösung mit Eigenwert  $\hat{\varepsilon} - 2$  und  $\mathbf{a}^+u$  ist eine Eigenfunktion mit Eigenwert  $\hat{\varepsilon} + 2$ . Entsprechend gehört  $\mathbf{a}^m u$  zu  $\hat{\varepsilon} - 2m$ .

Nun gilt  $\varepsilon \geq 1$  (s. oben). D.h. für jeden Eigenwert  $\hat{\varepsilon}$  gibt es eine ganze Zahl  $n$ , so daß  $\mathbf{a}^n u \neq 0$  ist, aber  $\mathbf{a}^{n+1} u = 0$ . Hieraus folgt  $\hat{\varepsilon} - 2n = 1$  bzw.  $\mathbf{a}^n u \sim u_0$ . Wenn man genügend häufig absteigt erreicht man immer den Grundzustand.

### Energiespektrum

Aus der Forderung  $\varepsilon \geq 1$  folgt, daß nur die Eigenwerte  $\hat{\varepsilon}_n = 2n + 1$  möglich sind, mit  $n = 0, 1, \dots$ . Mit  $E = \hbar\omega \varepsilon/2$  sind die erlaubten Eigenwerte  $E_n$  des harmonischen Oszillators entsprechend

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, \dots$$

### Eigenfunktionen

Bezeichnet man die Eigenfunktionen mit  $u_n$ , so gilt

$$\mathbf{a}^+ u_n(x) = N u_{n+1}(x),$$

mit einer Normierungskonstante  $N$ . Sei  $u_n$  normiert, dann ist  $u_{n+1}$  ebenfalls normiert falls

$$\begin{aligned}N^2(u_{n+1}, u_{n+1}) &\equiv N^2 = (\mathbf{a}^+ u_n, \mathbf{a}^+ u_n) \\ &= (\mathbf{a}\mathbf{a}^+ u_n, u_n) = ((\mathbf{a}^+\mathbf{a} + 1)u_n, u_n),\end{aligned}$$

wobei wir die  $\mathbf{a}\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^+\mathbf{a} = 1$  verwendet haben. Aus der Schrödinger-Gleichung

$$\mathbf{a}^+\mathbf{a} u_n = n u_n, \quad \mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{a}^+\mathbf{a} + \frac{1}{2}\right), \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

folgt schließlich  $N^2 = n + 1$ . Demnach erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^+ u_n(x) &= \sqrt{n+1} u_{n+1}(x) \\ \mathbf{a} u_n(x) &= \sqrt{n} u_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Mittels Iteration folgt aus der ersten Gleichung:

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\mathbf{a}^+)^n u_0(x) \quad u_0(x) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\beta^2 x^2/2}$$

Sämtliche Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators können also iterative durch einfaches differenzieren aus dem Grundzustand gewonnen werden, das Problem ist somit gelöst.

### Orthonormalität

Sind  $E_{n_1} \neq E_{n_2}$  zwei verschiedene Eigenwerte, so gilt

$$\begin{aligned} E_{n_1}(u_{n_2}, u_{n_1}) &= (u_{n_2}, \mathbf{H}u_{n_1}) = (\mathbf{H}u_{n_2}, u_{n_1}) \\ &= E_{n_2}(u_{n_2}, u_{n_1}), \end{aligned}$$

d.h.  $(u_{n_2}, u_{n_1}) = 0$  für  $n_1 \neq n_2$ . Die  $u_n(x)$  bilden also ein orthonormales System. Sie sind auch vollständig. Der obrige Beweis gilt für beliebige selbst-adjungierte Operatoren, insbesondere für alle Hamilton-Operatoren.

### Explizite Form der Eigenfunktionen

Man kann die Eigenfunktionen  $u_n(x)$  auch explizit

$$u_n(x) = \sqrt{\beta} (n! 2^n \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} H_n(\beta x)$$

als Funktion der *Hermiteischen Polynome*  $H_n(y)$  schreiben (hier ohne Beweis). Es gilt

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1, & H_1(y) &= 2y, \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2, & H_3(y) &= 8y^3 - 12y, \dots \end{aligned}$$

Hermiteischen Polynome sind Lösungen der Differentialgleichung

$$H_n''(y) - 2yH_n'(y) + 2nH_n(y) = 0$$

Wir gehen hier nicht weiter auf die Eigenschaften von Hermite Polynome ein. Weit wichtiger werden später die *Legendre Polynome* sein.

## 3.2 Matrizenmechanik, Operatoren

Anhand vom harmonischen Oscillator diskutieren wir im Folgenden einige allgemeine Konzepte.

### 3.2.1 Matricelemente

Sei  $V^n$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum mit Elementen  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ , einer orthonormierten Basis  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ , und einem Skalarprodukt  $(\vec{v}, \vec{v})$ . Eine lineare Abbildung  $A$  (Operator  $\mathbf{A}$ ) ist via den Matricelementen  $a_{ik}$ ,

$$a_{ik} = (\vec{e}_i, A\vec{e}_k),$$

definiert:

$$\vec{v} \quad \rightarrow \quad (A\vec{v})_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} v_k, \quad \vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}_k.$$

#### Matricelemente des harmonischen Oszillators

Analog zu endlich-dimensionalen Vektorräumen lassen sich die Matricelemente von unendlich-dimensionalen Matrizen bezüglich einer Basis  $\{u_n\}$  ausrechnen, was wir hier für den harmonischen Oszillator nachvollziehen. Dabei interessieren uns die Operatoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}^+$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{H}$ . Man hat

$$\begin{aligned} a_{mn} &= (u_m, \mathbf{a}u_n) = \sqrt{n} (u_m, u_{n-1}) = \sqrt{n} \delta_{m,n-1} \\ a_{mn}^+ &= (u_m, \mathbf{a}^+u_n) = \sqrt{n+1} (u_m, u_{n+1}) = \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}\beta} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^+), \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar \beta}{i \sqrt{2}} (\mathbf{a} - \mathbf{a}^+),$$

und daher gilt

$$\mathbf{Q}u_n = \frac{1}{\sqrt{2}\beta} (\sqrt{n}u_{n-1} + \sqrt{n+1}u_{n+1}),$$

$$\begin{aligned} (u_m, \mathbf{Q}u_n) &= \frac{1}{\sqrt{2}\beta} (\sqrt{n} \delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}) \\ (u_m, \mathbf{P}u_n) &= \frac{\hbar \beta}{i \sqrt{2}} (\sqrt{n} \delta_{m,n-1} - \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}) \end{aligned}$$

Es fehlen noch die Matricelemente des Hamilton-Operators,

$$(u_m, \mathbf{H}u_n) = E_n \cdot \delta_{mn}.$$

In der Basis der Eigenzustände  $\{u_n\}$  ist die Hamiltonmatrix  $H_{mn} \equiv (u_m, \mathbf{H}u_n)$  diagonal, was zu erwarten war. Allgemein spricht von der "Matrizen"-Mechanik des harmonischen Oszillators.

### 3.2.2 Eigenschaften von Operatoren

#### Leiteroperatoren

Die Auf- und Absteigeoperatoren  $\mathbf{a}^+$  und  $\mathbf{a}$ , die die Eigenwerte von  $\mathbf{H}$  um den Betrag  $\hbar\omega$  erhöhen, bez. erniedrigen, werden auch Leiter-Operatoren genannt, bzw. *Erzeugungs-* und *Vernichtungs-*Operatoren. Diese Operatoren spielen in der Physik eine zentrale Rolle, da viele Systeme (Teilchenphysik/Elektrodynamik) auf harmonischen Oszillatoren aufbaut sind.

#### Adjungierte Operatoren

Sei  $B[\varphi] = \{\varphi_\nu, \nu = 1, \dots\}$  ein vollständiges System von Funktionen bezüglich des Skalarproduktes  $(u_1, u_2)$ . Ferner sollen alle  $\varphi_\nu$  zum Definitionsbereich des Operators  $\mathbf{A}$  gehören, mit  $|A\varphi_\nu| < \infty$ .

Läßt sich zu gegebenem  $u$  ein  $u^+$  finden, derart daß

$$(u, A\varphi_\nu) = (u^+, \varphi_\nu)$$

für alle  $\varphi_\nu$ , so definiert die Zuordnung

$$u \rightarrow u^+ = A^+u$$

den zu  $A$  adjungierten Operator  $A^+$ .

In matrix Notation. Aus  $A_{\nu\mu} = (\varphi_\nu, A\varphi_\mu)$  und  $(A^+\varphi_\nu, \varphi_\mu) = (\varphi_\mu, A^+\varphi_\nu)^*$  folgt

$$(A^+)_{\mu\nu} = (\varphi_\mu, A^+\varphi_\nu) = (A^+\varphi_\nu, \varphi_\mu)^* = (\varphi_\nu, A\varphi_\mu)^* = A_{\nu\mu}^*,$$

was wir schon früher gesehen hatten. Ein Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^+ = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}.$$

#### Selbst-adjungierte Operatoren

Falls

$$(\varphi_\nu, A\varphi_\mu) = (A\varphi_\nu, \varphi_\mu), \quad \forall \varphi_\nu, \varphi_\mu$$

so ist  $\mathbf{A}$  selbst-adjungiert.

Selbst-adjungierte Operatoren haben reelle Diagonal-Elemente, wie z.B.

$$A = \begin{pmatrix} a & b + ib' \\ b - ib' & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \text{ reel.}$$

Es gilt  $A_{ij} = A_{ji}^*$ .

### Observable

Alle physikalischen Observablen entsprechen in der Quantenmechanik selbstadjungierte Operatoren, insbesondere auch der Hamilton-Operator  $H$ , sowie die Orts- und Impulsoperatoren  $\vec{x}$  und  $\vec{p}$ . Selbstadjungierte Operatoren haben als symmetrische Matrizen nur reelle Eigenwerte und damit auch reellen Meßwerte. Komplexe Impulse kommen experimentell nicht vor.

### Unitäre Operatoren

Gilt

$$A^+ = A^{-1}, \quad A^+A = AA^+ = 1,$$

so heißt  $A \equiv U$  *unitär*. Es gilt

$$(Uu_1, Uu_2) = (U^+Uu_1, u_2) = (u_1, u_2),$$

d.h. *unitäre Operatoren lassen Skalarprodukte invariant*.

Beispiele für unitäre Transformationen:

- (a) Orthogonale Transformationen
- (b) Zeitentwicklungs-Operatoren in einem  $n$ -dimensionalen Vektorraum.

## 3.3 Kohärente Zustände

Es läßt sich leicht nachrechnen, daß die Erwartungswerte  $(u_n, \mathbf{Q}u_n)$  und  $(u_n, \mathbf{P}u_n)$  für alle Eigenzustände  $u_n = u_n(x)$  des harmonischen Oszillators verschwinden. Dies ist auch für die zeitabhängigen Lösungen

$$\psi_n(x, t) = e^{-iE_n t/\hbar} u_n(x)$$

der Fall. Der Erwartungswert des Ortsoperators  $\mathbf{Q}$  bezüglich der Energie-Eigenfunktionen  $u_n(x)$  beschreibt also nicht die klassische Bewegung  $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$  des harmonischen Pendels.

### Kohärente Zustände

Ausgehend von dieser Betrachtung ist es naheliegend, Überlagerung der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators zu betrachten, analog zu der Überlagerung von ebenen Wellen für freie Teilchen (siehe Abschnitt ??). Im Falle der freien Teilchen gab es eine ausgezeichnete Überlagerung der Eigenfunktionen, das Gauss'sche Wellenpaket, im Falle des harmonischen Oszillators sind es die *kohärenten Zustände*.

Ein kohärente Zustand ist als Eigenfunktion  $u_z(x)$  des Vernichtungsoperators  $\mathbf{a}$  zum komplexen Eigenwert  $z$  definiert:

$$\mathbf{a}u_z(x) = zu_z(x)$$

**Erwartungswerte**

Man hat

$$(u_z, \mathbf{Q} u_z) = \frac{1}{\sqrt{2}\beta} (u_z, (\mathbf{a} + \mathbf{a}^+) u_z) = \frac{1}{\sqrt{2}\beta} (z + z^*)$$

und analog

$$(u_z, \mathbf{P} u_z) = \frac{\hbar\beta}{i\sqrt{2}} (u_z, (\mathbf{a} - \mathbf{a}^+) u_z) = \frac{\hbar\beta}{i\sqrt{2}} (z - z^*)$$

was jeweils dem Real- und Imaginär-Anteil von  $z$  entspricht. Die Erwartungswerte des Orts- und Impulsoperators verschwinden für  $u_z$  also nicht.

**Entwicklung nach Energie-Eigenfunktionen**

Wir verwenden

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\mathbf{a}^+)^n u_0$$

um das Matrixelement

$$(u_n, u_z) = \frac{1}{\sqrt{n!}} ((\mathbf{a}^+)^n u_0, u_z) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (u_0, \mathbf{a}^n u_z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}} (u_0, u_z)$$

zu berechnen. Damit erhalten wir

$$u_z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, u_z) u_n(x) = (u_0, u_z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\mathbf{a}^+)^n}{n!} u_0(x) = (u_0, u_z) e^{z\mathbf{a}^+} u_0(x).$$

Mit  $(u_0, u_z) = e^{-|z|^2/2}$  ist  $u_z(x)$  normiert,

$$u_z = e^{-|z|^2/2} e^{z\mathbf{a}^+} u_0(x)$$

wie man leicht nachrechnen kann.

**Über-Vollständigkeit**

Eigenfunktionen, die zu verschiedenen  $z$ -Werten gehören, sind *nicht* zueinander orthogonal,

$$(u_{z_2}, u_{z_1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_{z_2}, u_n)(u_n, u_{z_1}) = \exp\left(-\frac{1}{2}|z_1|^2 - \frac{1}{2}|z_2|^2 + z_2^* z_1\right)$$

und damit über-vollständig.

**Ortsraum-Darstellung**

Mit  $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}^+ = \left(\beta x - \frac{1}{\beta} \frac{d}{dx}\right)$  findet man  $\mathbf{a} u_z(x) = z u_z(x)$  für

$$u_z(x) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2 + \sqrt{2}z\beta x - \frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}z^2}$$

Bei den Eigenfunktionen  $u_z(x)$  des Vernichtungsoperators  $\mathbf{a}$  handelt es sich also um Gauß'sche Wellenpakete.

### Unschärfe-Relationen

Aus

$$\mathbf{Q}^2 = \frac{1}{2\beta^2} [\mathbf{a}^2 + (\mathbf{a}^+)^2 + 2\mathbf{a}^+ \mathbf{a} + 1], \quad \mathbf{P}^2 = \frac{\hbar^2 \beta^2}{2} [2\mathbf{a}^+ \mathbf{a} - \mathbf{a}^2 - (\mathbf{a}^+)^2 + 1]$$

folgt

$$(u_z, \mathbf{Q}^2 u_z) = \frac{1}{2\beta^2} (4(\operatorname{Re}(z))^2 + 1), \quad (u_z, \mathbf{P}^2 u_z) = \frac{\hbar^2 \beta^2}{2} (4(\operatorname{Im}(z))^2 + 1).$$

Wegen  $\langle u_z, \mathbf{Q} u_z \rangle = (\sqrt{2}/\beta) \operatorname{Re}(z)$ , und  $\langle u_z, \mathbf{P} u_z \rangle = \sqrt{2}\beta\hbar \operatorname{Im}(z)$  gilt daher für die mittleren Schwankungen:

$$\boxed{(\Delta \mathbf{Q})^2 = \frac{1}{2\beta^2}, \quad (\Delta \mathbf{P})^2 = \frac{\hbar^2 \beta^2}{2}, \quad \Delta \mathbf{Q} \Delta \mathbf{P} = \frac{\hbar}{2}}$$

Das Produkt der Schwankungen von  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{P}$  im Zustand  $u_z$  hat also den minimalen Wert der Heisenberg'schen Unschärferelation und ist von  $z$  unabhängig. Diese Minimaleigenschaft hinsichtlich der Unschärferelation ist für Gauß'schen Wellenpakete charakteristisch.

### Zeitabhängigkeit

Wegen der Zeitabhängigkeit

$$\psi_n(x, t) = e^{-i E_n t / \hbar} u_n(x) = e^{-i \omega t / 2} e^{-i n \omega t} u_n(x)$$

der Energie-Eigenfunktionen ist die Zeitabhängigkeit der Zustände  $u_z$  durch

$$\boxed{u_z(x, t) = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{-i \frac{\omega}{2} t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z e^{-i \omega t})^n}{\sqrt{n!}} u_n = e^{-i \omega t / 2} u_{z(t)}(x), \quad z(t) = z e^{-i \omega t}}$$

gegeben. Man beachte, daß  $u_z(x, t=0) = u_z$ . Für den Erwartungswert von  $\mathbf{Q}$  bezüglich  $u_z(x, t)$  erhalten wir

$$\boxed{\langle \mathbf{Q} \rangle_z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\beta} (u_{z(t)}, (\mathbf{a} + \mathbf{a}^+) u_{z(t)}) = \frac{1}{\sqrt{2}\beta} (z(t) + z^*(t))}$$

Setzt man  $z = |z| e^{i\delta}$ , so folgt schließlich

$$\boxed{\langle \mathbf{Q} \rangle_z(t) = A \cos(\omega t - \delta), \quad A = \frac{\sqrt{2}|z|}{\beta}}$$

Hier hat der Erwartungswert von  $\mathbf{Q}$  dieselbe Form wie die klassische Bewegung.

**Formkonstanz des Wellenpaketes**

Die zeitabhängige Funktion  $u_{z(t)}(x)$  hat die explizite Gestalt

$$u_{z(t)}(x) = (\beta^2/\pi)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^2 x^2 + \sqrt{2} z(t)\beta x - \frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}z^2(t)\right)$$

Es handelt sich um ein zeitabhängiges Gauß'sches Wellenpaket, dessen Breite jedoch nicht von der Zeit abhängt, d.h. *kohärente Wellenpakete zerfließen nicht* (wie das auch beim Laser der Fall ist).

Der Name "*kohärente Zustände*" rührt von ihren Anwendungen bei Kohärenzproblemen in der Quantenoptik her. Da kohärente Zustände nicht zerfließen, sind sie geeignet, um Signale in Glasfaser ohne Dämpfung über weite Entfernungen zu transportieren.