§9. Deterministisches Chaos

9.1 Vorhersagbarkeit

Klassische mechanische Systeme sind *"deterministisch"*, das heißt die Anfangsbedingungen bestimmen das Verhalten zu allen anderen (früheren und späteren) Zeitpunkten. In diesem Sinne sind sie prinzipiell vorhersagbar. Es geschieht in anderen Worten nichts unvorhersehbares. Diese Aussage ist jedoch sehr theoretisch, denn das Verhalten komplexer mechanischer Systeme lässt sich in der Praxis häufig nicht genau vorhersagen, vor allem nicht für lange Zeiten.

Roche-Limes

Als erstes Beispiel betrachten wir das Problem eines Himmelskörpers (Mond, Asteroid oder Komet) mit der Masse $2m$, welcher im Abstand r an einem Planeten mit Radius R und Masse M vorbeifliegt. Falls r zu klein ist, wird der Himmelskörper durch die Gezeitenwirkung auseinander gerissen. Um den kritischen Abstand r_c abzuschätzen denken wir uns den Himmelskörper aus zwei Kugeln der Masse m und Radius a zusammengesetzt, welche sich gerade berühren. Der Abstand der beiden Kugeln ist also $2a$.
Die beiden Kugeln werden durch die Gravitationskraft

$$\frac{\kappa m^2}{(2a)^2}$$

zusammengehalten. Die "äußere" Kugel wird durch die Gravitation des Planeten weniger stark angezogen als die "innere" Kugel. Wir entwickeln die Differenz nach Potenzen von a/r:

$$\frac{\kappa M m}{(r-a)^2} - \frac{\kappa M m}{(r+a)^2}$$

$$= \frac{\kappa M m}{r^2}\left(\frac{1}{(1-a/r)^2} - \frac{1}{(1+a/r)^2}\right)$$
$$\approx \frac{\kappa M m}{r^2}\left((1+2a/r)-(1-2a/r)\right) = \frac{4a\kappa M m}{r^3}.$$

Der Himmelskörper wird also zerrissen, wenn

$$\frac{4a\kappa M m}{r^3} > \frac{\kappa m^2}{(2a)^2} \qquad \boxed{16\frac{M}{m}\frac{a^3}{r^3} > 1}$$

Falls Planet und Himmelskörper ungefähr dieselbe Massedichte ρ haben, also $M = (4\pi/3)\rho R^3$ und $m = (4\pi/3)\rho a^3$, dann erhalten wir

$$16\frac{R^3}{r^3} > 1, \qquad r_c = \sqrt[3]{16}\,R \approx 2.52\,R,$$

wie zum ersten mal von *Roche* gezeigt wurde. Für Saturn ist der Roche Radius $r_c = 152\ 300$ km und die Ringe liegen alle innerhalb. Erst 1967 wurde ein kleiner Mond in der Entfernung $r = 156\ 800$ km von Saturn gefunden. Janus wird zusammen mit Mimas ($r = 185\ 700$ km) als einer der sogenannten "Schäfer"-Monde betrachtet, welche durch ihre Gravitationswirkung die Saturn'schen Ringe hüten (Cassin'sche Teilung).

Vorhersagbarkeit

Betrachten wir den Fall eines Kometen, welcher im Abstand $r \sim r_c$ an einem Planeten vorbeifliegt, so ist es offensichtlich fast unmöglich, das weitere Geschehen im Detail vorherzusagen, obwohl das System deterministisch, also vorhersagbar ist.

9.2 Logistische Abbildung

Wir betrachten ein einfaches Beispiel um zu zeigen, wie ein deterministisches System chaotisches Verhalten zeigen kann. Dazu verlassen wir die klassische Mechanik und betrachten die "logistische Abbildung" des Intervalls $[0, 1]$ auf sich

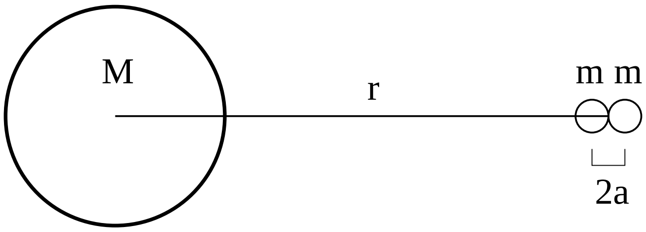

Abbildung 9.1: Einen Mond der Masse $2m$ kann man sich aus zwei Teilmassen zusammengesetzt denken, welche nur graviationell zusammengehalten werden.

$$x_{n+1} \;=\; f(x_n) \;=\; rx_n(1-x_n). \tag{9.1}$$

Hierbei sind die $x_n \in [0,1]$ und können, z.B., als die Populationsdichten einer sich reproduzierenden Spezies im Jahre n interpretiert werden. Im Rahmen dieser Interpretation kann $r \in [0,4]$ als Reproduktionsfaktor angesehen werden, wobei die Vermehrungsrate bei hohen Populationsdichten durch den quadratischen Term in (9.1) wieder gedämpft wird.
Kennen wir die Populationsdichte x_n in irgend einem Jahr n, könnten wir mit (9.1) die Populationsdichte für alle späteren Jahre exakt vorhersage. Das System ist also streng deterministisch. Totzdem kann es für gewisse Wertebereiche von r zu irregulärem Zeitverhalten kommen, welches man "chaotisch" nennt und welches die prinzipiell gegebene Vorhersagbarkeit einschränkt.

Fixpunkte

Als erstes betrachten wir die Fixpunkte von $f(x)$:

$$x = rx(1-x) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x=0) \;\text{ oder }\; (1 = r(1-x)).$$

Der nicht-triviale Fixpunkt ist also

$$1/r = 1-x, \qquad\qquad x^{(1)} = 1-1/r \tag{9.2}$$

und existiert nur für $r_1 < r$ mit $r_1 \equiv 1$, da nur dann $x^{(1)}$ im erlaubten Wertebereich $[0,1]$ liegt.

Stabilität der Fixpunkte

Als nächstes wollen wir feststellen, ob dieser Fixpunkt stabil ist. Dazu

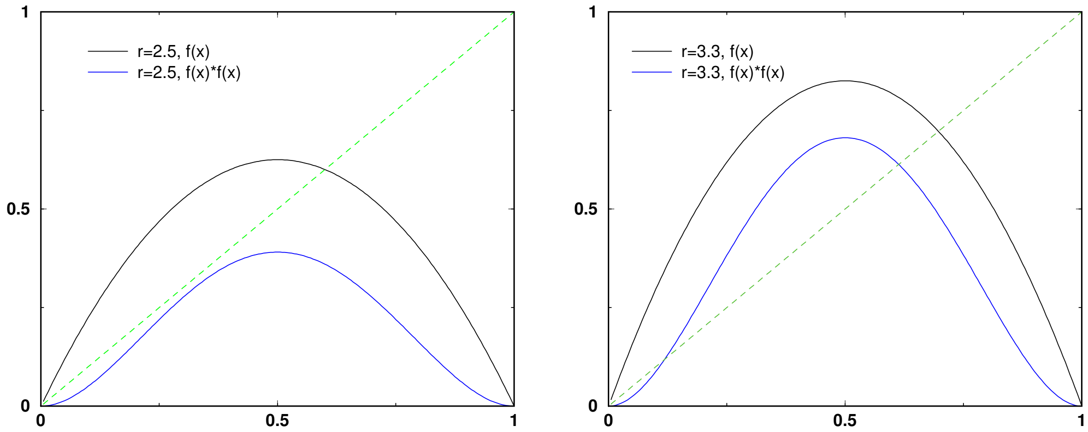

Abbildung 9.2: Illustration der logistischen Abbildung.

linearisieren wir, wie in §3 die Abbildung (9.1) um den Fixpunkt, indem wir $y_n = x_n - x^{(1)}$ als klein betrachten. Wir setzen $x_n = x^{(1)} + y_n$ in (9.1) ein

$$\begin{aligned} x^{(1)} + y_{n+1} &= r(x^{(1)} + y_n)(1 - x^{(1)} - y_n) \\ &= rx^{(1)}(1 - x^{(1)} - y_n) + ry_n(1 - x^{(1)} - y_n) \end{aligned}$$

und verwenden die Fixpunkteigenschaft von $x^{(1)}$ und vernachlässigen den Term $\sim y_n^2$:

$$y_{n+1} = -rx^{(1)}y_n + ry_n(1 - x^{(1)}) = r(1 - 2x^{(1)})\, y_n$$

oder, unter Verwendung von (9.2),

$$y_{n+1} = r(1 - 2(1 - 1/r))\, y_n = (2 - r)\, y_n. \tag{9.3}$$

Der Fixpunkt $x^{(1)}$ ist nun stabil, falls der Koeffizient $(2-r)$ in (9.3) vom Betrage her kleiner als eins ist, denn dann wird y_{n+1} vom Betrage her kleiner als y_n sein und die Abweichungen y_n vom Fixpunkt verschwinden schlussendlich. Die Stabilitätsbedingung ist

$$|2 - r| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{r_1 < r < r_2} \tag{9.4}$$

mit $r_1 = 1$ und $r_2 = 3$.

Fixpunkte der Periode zwei

Es zeigt sich nun, dass für $r > 3$ ein Fixpunkt der Periode zwei auftritt, also ein Fixpunkt von

$$f(f(x)) \;=\; rf(x)(1-f(x)) = r^2x(1-x)(1-rx(1-x)).$$

Die Fixpunktgleichung $x = f(f(x))$ der iterierten Abbildung führt unter Berücksichtigung des trivialen Fixpunktes $x = 0$ auf die kubische Gleichung

$$1 \;=\; r^2(1-rx+rx^2) - r^2x(1-rx+rx^2)$$

$$r^3x^3 - 2r^3x^2 + (r^3+r^2)x + 1 - r^2 = 0. \tag{9.5}$$

Um die Wurzeln von (9.5) zu finden, verwenden wir die Information, dass $x = x^{(1)} = 1-1/r$ auch eine Lösung von (9.5) ist. Wir dividieren also (9.5) durch $(x - x^{(1)}) = (x-1+1/r)$:

$$\begin{aligned}(r^3x^3 - 2r^3x^2 + (r^3+r^2)x + 1 - r^2) : (x-1+1/r) &= \\ r^3x^2 - (r^3+r^2)x + (r^2+r).&\end{aligned}$$

Die beiden neuen Fixpunkte von $f(f(x))$ sind also die Wurzeln von

$$x^2 - (1+\frac{1}{r})x + (\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}) \;=\; 0,$$

also

$$x_{\pm}^{(2)} \;=\; \frac{1}{2}(1+\frac{1}{r}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)}. \tag{9.6}$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned}x_{\pm}^{(2)}(r=3) \;&=\; \frac{1}{2}\frac{3+1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{3+1}{3}\right)^2 - \left(\frac{3+1}{9}\right)} \\ &=\; \frac{2}{3} \;=\; 1-\frac{1}{3} \;=\; x^{(1)}(r=3),\end{aligned}$$

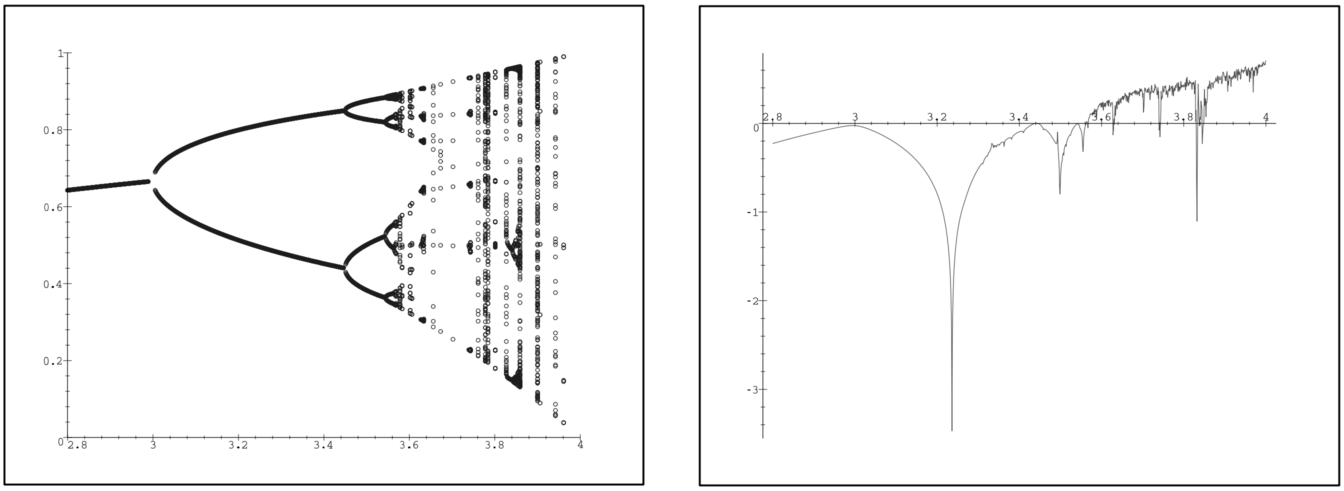

Abbildung 9.3: Die Fixpunkte der iterierten logistischen Abbildung (links) zusammen mit den dazugehörigen Liapunov Exponenten (rechts). Positive Liapunov Exponenten deuten auf chaotisches Verhalten hin.

da für $r = 3$ eine *Bifurkation* auftritt, also aus einem stabilen Fixpunkt $x^{(1)}$ zwei neue (stabile) Fixpunkte $x_{\pm}^{(2)}$ werden. Man kann nun ganz analog wie bei $x^{(1)}$ eine Stabilitätsanalyse für die $x_{\pm}^{(2)}$ durchführen.

Bifurkationen

Man findet, dass es einen kritischen Wert $r_3 > r_2$ gibt, so dass

$$x_{\pm}^{(2)}(r) \ \text{stabil} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{r_2 < r < r_3} \tag{9.7}$$

Für $r_3 < r < r_4$ findet man dann vier Fixpunkte der "Periode 4", also solche von $f(f(f(f(x))))$. Allgemein gibt es kritische Werte r_n und r_{n+1} so dass

$$2^{n-1} \ \text{Fixpunkte} \ x^{(n)} \ \text{der Periode} \ 2^{n-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{r_n < r < r_{n+1}}$$

Das Verhalten der logistischen Abbildung ist also ziemlich kompliziert, doch würde man nicht von Chaos sprechen, wenn das schon alles wäre.

Chaotisches Verhalten

Es stellt sich heraus, dass es ein gewisses $r_\infty = 3.5699456\ldots$ gibt, so daß $\lim_{n\to\infty} r_n \to r_\infty$. Die kritischen r_n für Periodenverdopplung häufen sich also bei r_∞. Es zeigt sich nun, daß man im Bereich

$$r_\infty < r < 4$$

sogenanntes "chaotisches" Verhalten findet. Um dieses zu charakterisieren betrachtet man die Sensibilität der Abbildung (9.1) auf die Anfangsbedingungen.
Nehmen wir an, wir haben zwei leicht verschiedene Anfangspopulationen x_1 und x_1', also $x_1 - x_1' \equiv y_1$ soll klein sein. Wir stellen uns die Frage, ob nach $m-1$ Iterationen auch noch $y_m = x_m - x_m'$ klein ist. Wir betrachten $m = 2$ und verwenden $x_1' = x_1 - y_1$,

$$\begin{aligned} y_2 &= x_2 - x_2' = rx_1(1-x_1) - rx_1'(1-x_1') \\ &= rx_1(1-x_1) - r(x_1-y_1)(1-(x_1-y_1)) \\ &= rx_1(1-x_1) - rx_1(1-x_1+y_1) + ry_1(1-x_1+y_1). \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung des Terms $\sim y_1^2$ finden wir

$$y_2 = -rx_1y_1 + ry_1(1-x_1) = r(1-2x_1)\,y_1 \equiv \epsilon y_1.$$

Für $|\epsilon| < 1$ ist die Abbildung stabil, da zwei leicht verschiedene Startwerte unter wiederholter Iteration zusammenstreben, und für $|\epsilon| > 1$ instabil.

Liapunov Exponente

Es ist üblich, mit

$$|\epsilon| = \mathrm{e}^\lambda$$

den *Liapunov Exponenten* $\lambda = \lambda(r)$ zu definieren mit

$$\lambda < 0 \Leftrightarrow \text{Stabilität}, \qquad \lambda > 0 \Leftrightarrow \text{Instabilität}.$$

Wenn der Liapunov-Exponent positiv ist, so ist die Abbildung exponentiell auf die Anfangsbedingungen sensitiv und man spricht vom "chaotischen Regime". Ein solches chaotisches Verhalten wird in der Natur

unter geeigneten Umständen beobachtet, z.B. bei Rentierpopulationen auf einer Insel.
Da im Falle der logistischen Abbildung das chaotische Regime $r_\infty < r < 4$ an ein reguläres Regime $0 < r < r_\infty$ mit zunehmender Periodenverdopplung anschließt, spricht man auch von einer "Route zum Chaos via Periodenverdopplung".

9.3 Konservative mechanische Systeme

Wir betrachten nun ein konservatives (Energie ist erhalten) mechanisches System. Wir stellen uns die Frage, unter welchen Umständen die Bewegung regulär ist oder nicht. Die geeignete Methode zur Untersuchung dieser Fragestellung ist die Hamilton-Jacobi-Theorie.

Integrabilität

Ein mechanisches System mit f Freiheitsgraden ist *"integrabel"* wenn es $\alpha = 1 \dots f$ Konstanten der Bewegung $F_\alpha(q,p)$ gibt, mit

$$\frac{d}{dt} F_\alpha(q,p) \;=\; \{F, H\} \;=\; 0\ .$$

Im $2f$-dimensionalen Phasenraum $(q_1 \dots q_f, p_1 \dots p_f)$ wird die Bewegung auf einen f-dimensionalen Unterraum beschränkt. Da dieser Unterraum kompakt (zusammenhängend) ist, kann man zeigen, dass es sich hierbei um einen $f-$dimensionalen Torus handelt. Die Stabilitätsanalyse konservativer mechanischer Systeme stellt sich daher die Frage, ob unter einer nicht-integrablen Störung dieser Torus erhalten bleibt (wenn auch deformiert) oder zerstört wird. Im letzteren Fall kann nicht-reguläres Verhalten erwartet werden.

Hamilton-Jacobi-Theorie

Im Rahmen der Hamilton-Jacobi-Theorie §7.9 lässt sich ein integrables System $H(q,p)$ durch eine kanonische Transformation $S(q)$ lösen, welche von den f Erhaltungsgrössen abhängt, mit

$$p_\alpha = \frac{\partial S(q)}{\partial q_\alpha}, \qquad\qquad H(q, \frac{\partial S(q)}{\partial q}) = E.$$

Dabei hatten wir gefunden, dass die neue Hamiltonfunktion $H(Q,P) = P_f$ trivial (einfach) wurde, so daß sich die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen sofort integrieren lassen,

$$P_\alpha = \text{const.}, \qquad Q_\beta = \text{const.}, \qquad Q_f = \text{const.}\, t + \text{const.}$$

Wir wollen hier die f−te Koordinate nicht auszeichnen und lassen noch irgendwelche geeignete Koordinatentransformationen $Q \mapsto \theta = \theta(Q)$ zu mit den neuen kanonischen Koordinaten (verallgemeinerte Winkel) θ und kanonischen Impulsen J (Wirkungs-Variablen). In Anbetracht der Transformationseigenschaften kanonischer Impulse bei Koordinatentransformationen (siehe §7.2),

$$J_\alpha \;=\; \sum_\beta P_\beta \frac{\partial Q_\beta}{\partial \theta_\alpha}$$

sind auch die neuen Wirkungsvariablen Konstante der Bewegung und die Lösung hat in den Winkel/Wirkungsvariablen die allgemeine Form

$$J_\alpha = \text{const.}, \qquad \theta_\alpha = \omega_\alpha t + \delta_\alpha, \qquad (\alpha = 1, \dots f), \tag{9.8}$$

mit geeigneten "Frequenzen" ω_α . Die θ_α sind nun die Variablen, welche den invarianten Torus parametrisieren, und die ursprünglichen Koordinaten q sowie die Hamiltonfunktion $H(q,p)$ müssen periodische Funktionen der θ_α sein. O.B.d.A. können wir also für einen Wertebereich

$$\theta_\alpha \;\in\; [0, 2\pi] \tag{9.9}$$

festlegen, denn falls (9.9) nicht erfüllt sein sollte, so lässt sich dieses durch eine geeignete Koordinatentransformation immer erreichen. Also haben die ω_α die Bedeutung von Frequenzen. Für rationale Frequenzverhältnisse

$$\frac{\omega_\alpha}{\omega_\beta} = \frac{m}{n}, \qquad (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

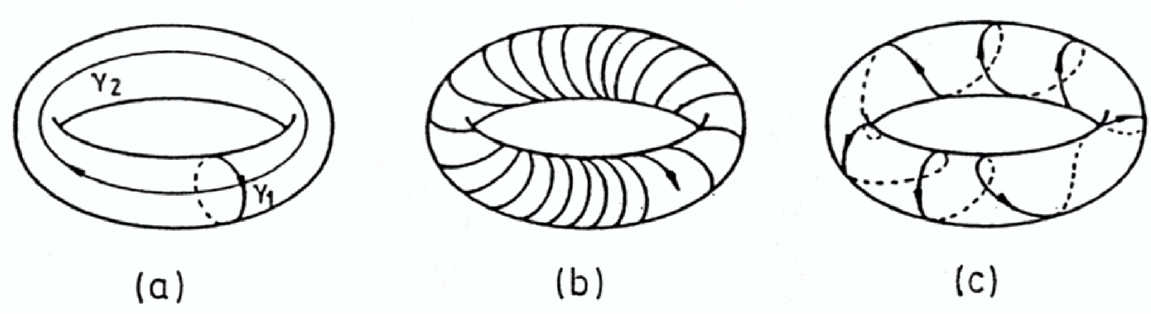

Abbildung 9.4: Illustration von einem KAM-Torus. (a) Topologisch verschiedene Wege. (b) Ein nicht-geschlossener Orbit. (c) Ein geschlossener Orbit (mit $\omega_1/\omega_2 = m/s$, siehe Gl. 9.16).

schließt sich die Bahn und sonst nicht.

Störungstheorie

Wir wollen nun untersuchen, ob ein mechanisches System, welches "fast" integrabel ist, reguläre oder irreguläre Bewegungen aufweist. Wir betrachten also ein integrables System $H_0(J)$, welches von den Konstanten der Bewegung $J_1 \ldots J_f$ abhängt, und schreiben das "fast" integrable System H in den Winkel/Wirkungsvariablen von H_0 , also

$$H(\theta, J) \;=\; H_0(J) + \varepsilon\, H_1(\theta, J)$$

wobei ϵ sehr klein sein soll, so dass wir die Lösung von $H(\theta, J)$ in eine Potenzreihe in ε entwickeln können. Wir suchen nach einer kanonischen Transformation

$$(\theta, J) \to (\theta', J')$$

mittels einer Erzeugenden $S(\theta, J')$ (vom Typus F_2) mit

$$J_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \theta_\alpha}, \qquad \theta'_\alpha = \frac{\partial S}{\partial J'_\alpha},$$

so dass die transformierte Hamiltonfunktion

$$H(\theta, \frac{\partial S}{\partial \theta}) \;=\; H_0(J) + \varepsilon H_1(\theta, \frac{\partial S}{\partial \theta}) \;\equiv\; H'(J') \qquad (9.10)$$

nur von den neuen Wirkungsvariablen J' abhängt. Zu diesem Zwecke schreiben wir (in niedrigster Ordnung in ε)

$$S(\theta, J') \;=\; \sum_\alpha \theta_\alpha J'_\alpha + \varepsilon\, S_1(\theta, J') + O(\varepsilon^2), \qquad (9.11)$$

mit

$$J_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \theta_\alpha} = J'_\alpha + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta_\alpha}, \qquad \theta'_\alpha = \frac{\partial S}{\partial J'_\alpha} = \theta_\alpha + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial J'_\alpha}. \qquad (9.12)$$

Jetzt sieht man auch, warum der Ansatz (9.11) sinnvoll ist: Für $\varepsilon = 0$ wird die Transformation (9.12) zur Identität.
Mittels (9.12) entwickeln wir nun (9.10) nach Potenzen in ε

$$H'(J') \;=\; H_0(J') + \varepsilon \sum_\alpha \frac{\partial H_0}{\partial J_\alpha}\frac{\partial S_1}{\partial \theta_\alpha} + \varepsilon\, H_1(\theta, J') + O(\varepsilon^2).$$

Da nun beide Seiten von θ unabhängig sein müssen, erhalten wir mit

$$\sum_\alpha \omega_\alpha \frac{\partial S_1(\theta, J')}{\partial \theta_\alpha} \;=\; -H_1(\theta, J'). \qquad (9.13)$$

die Bedingungsgleichung (Differentialgleichung) für $S_1(\theta, J')$. Hierbei sind die ω_α wegen der kanonischen Bewegungsgleichung $\omega_\alpha = \dot\theta_\alpha = \frac{\partial H}{\partial J_\alpha}$ und nach (9.8) die Frequenzen des ungestörten Systems.

Fourier-Entwicklung

Nun sind sowohl $S_1(J', \theta)$ wie auch $H_1(J', \theta)$ periodische Funktionen der $\theta_\alpha \in [0, 2\pi]$. In §8.2 haben wir gesehen, dass sich jede Funktion auf einem beschränkten Intervall $[0, L]$ in eine Fourierreihe entwickeln lässt, wobei die Wellenzahlen die Werte $2\pi/Ln$, $n = 1, \ldots$ annehmen. In unserem Fall gibt es f k_α und die Fourierreihen nehmen die Form

$$\begin{aligned} S_1(J', \theta) \;&=\; \sum_k S_{1,k}(J')\, \mathrm{e}^{i\sum_\alpha k_\alpha \theta_\alpha} \\ H_1(J', \theta) \;&=\; \sum_k H_{1,k}(J')\, \mathrm{e}^{i\sum_\alpha k_\alpha \theta_\alpha} \end{aligned}$$

an, wobei die $\Sigma_k\, S_{1,k}(J')$ und die $\Sigma_k\, H_{1,k}(J')$ die Entwicklungskoeffizienten sind, mit $k_\alpha = 1, 2, \ldots$. Wir setzen nun die Fourierdarstellung in (9.13) ein,

$$i\sum_k\Big(\sum_\alpha\omega_\alpha k_\alpha\Big)\,S_{1,k}(J')\,\mathrm{e}^{i\sum_\alpha k_\alpha\theta_\alpha} \;=\; -\sum_k H_{1,k}(J')\,\mathrm{e}^{i\sum_\alpha k_\alpha\theta_\alpha}$$

und erhalten durch Koeffizientenvergleich, dass

$$i\Big(\sum_\alpha\omega_\alpha k_\alpha\Big)\,S_{1,k}(J') \;=\; -H_{1,k}(J').$$

Die Lösung für die erzeugende Funktion hat also in niedrigster Ordnung in ε die Form

$$S(\theta,J') \;=\; \sum_\alpha\theta_\alpha J'_\alpha \,+\, i\varepsilon\sum_k\frac{H_{1,k}(J')}{\sum_\alpha\omega_\alpha k_\alpha}\,\mathrm{e}^{i\sum_\alpha k_\alpha\theta_\alpha}. \tag{9.14}$$

Zusammenbruch der Störungstheorie

Wir bemerken den Frequenznenner auf der rechten Seite von (9.14). Wenn dieser verschwindet, dann bricht die Störungsentwicklung zusammen, denn dann ist die Wirkung der Störung $\varepsilon H_1(\theta,J)$ nicht mehr klein, selbst wenn ε klein ist. Für $f=2$ ist dies der Fall ($k_\alpha = n_\alpha$), wenn

$$\omega_1 n_1+\omega_2 n_2=0, \qquad \frac{\omega_1}{\omega_2}=-\frac{n_2}{n_1}=\text{rational}. \tag{9.15}$$

Dies ist die berühmte Einsicht, dass geschlossene Bewegungen, also solche auf einem “rationalen” Torus instabil gegenüber sehr kleinen Störungen sind.

Beispiel: Lücken in den Saturnringen

Ein spektakuläres Beispiel für (9.15) sind die Lücken in den Saturnringen. Das Verhältnis der Umlauffrequenz eines (hypothetischen) Teilchens in der Cassinischen Unterteilung (zwischen dem A-Ring und dem B-Ring, $r=118\,000$km) zu der Umlauffrequenz des “Schäfermondes” Mimas ist $2:1$. Für die Lücke zwischen dem B-Ring und dem Crepe-Ring ($r=89\,000$ km) ist das Verhältnis $7:3$. Die Umlaufbahn eines Teilchens in den Lücken zwischen den Saturnringen ist also instabil gegenüber kleinen Störungen.

KAM-Theorem

Kolmogorov, Arnold und Moser haben die Fragestellung untersucht, was bei einem integrablen System unter einer Störung passiert, wenn ω_1/ω_2 *"fast irrational"* ist. Diese Fragestellung wird durch die Einsicht aus der Zahlentheorie motiviert, dass nicht alle irrationalen Zahlen gleich sind.

Jede irrationale Zahl r lässt sich durch eine Folge von rationalen Zahlen mit immer größeren Nennern

$$\frac{m_1}{s_1},\ \frac{m_2}{s_2},\ \frac{m_3}{s_3},\ \ldots \qquad\qquad s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$$

annähern. Je "irrationaler" eine Zahl r ist, desto schlechter geht das, d.h. desto größere Nenner s braucht man, um die gleiche Genauigkeit $|r - m/s|$ zu erhalten.

Das KAM-Theorem besagt nun, dass ein solcher Torus **stabil** unter der Störung εH_1 im Limes $\varepsilon \to 0$ ist, falls

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{m}{s}\right| > \frac{k(\varepsilon)}{s^{2.5}}, \qquad\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} k(\varepsilon) = 0. \tag{9.16}$$

Mit anderen Worten: Das Verhältnis ω_1/ω_2 muß "genügend irrational" sein und (9.16) fasst dieses in eine präzise mathematische Formel.

Das KAM Theorem gilt strikt nur im Grenzfall $\varepsilon \to 0$, was passiert nun für ein endliches ε? Mit wachsendem ε wird ein Torus nach dem anderen zerstört und der irrationalste Torus, mit einem Frequenzverhältnis $\omega_1/\omega_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$ (goldener Schnitt) wird zuletzt zerstört.

9.4 Dissipative Systeme

Ein *"dissipatives"* mechanisches System ist ein solches, in welchem die Energie nicht erhalten ist. Daher gilt der Satz von Liouville nicht und das Phasenraumvolumen zieht sich zusammen. Für lange Zeiten strebt die mechanische Bahn dann einem Fixpunkt zu, z.B. der Ruhelage beim gedämpften Pendel, oder einem *"Attraktor"*. Ein Attraktor kann ein Fixpunkt sein, eine periodische Bahn, oder ein chaotisches Gebiet.

Als einführendes Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung (ohne physikalische Motivation)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\left[\Gamma + (x^2+y^2)\right] x - \omega y \\ \frac{dy}{dt} &= -\left[\Gamma + (x^2+y^2)\right] y + \omega x, \end{aligned} \tag{9.17}$$

wobei Γ und ω freie Parameter sind. Offensichtlich ist $(x,y)=(0,0)$ ein Fixpunkt von (9.17). Um seine Stabilität zu untersuchen linearisieren wir um $(0,0)$ und erhalten die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\Gamma & -\omega \\ \omega & -\Gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom $\lambda^2 + 2\Gamma\lambda + \Gamma^2 + \omega^2$ und den Eigenwerten

$$\lambda_{1,2} = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \Gamma^2 - \omega^2} = -\Gamma \pm i\omega.$$

Da ja die Lösungen den zeitlichen Verlauf $\sim e^{\lambda_{1,2}t}$ haben, ist der Fixpunkt $(x,y)=(0,0)$ für $\Gamma > 0$ stabil und instabil für $\Gamma < 0$.

Polar-Koordinaten

Um näher zu untersuchen, was für $\Gamma < 0$ passiert, gehen wir auf Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

über und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\sin\varphi &= -\left[\Gamma + r^2\right] r\cos\varphi - \omega r\sin\varphi \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + \dot{\varphi}r\cos\varphi &= -\left[\Gamma + r^2\right] r\sin\varphi + \omega r\cos\varphi. \end{aligned}$$

Die Kombinationen $\dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi$ und $\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi$ ergeben

$$\dot{r} = -(\Gamma + r^2)r, \qquad \dot{\varphi} = \omega. \tag{9.18}$$

Offensichtlich ist für $\Gamma < 0$ die Kreisbahn mit dem Radius r_c eine Lösung, mit

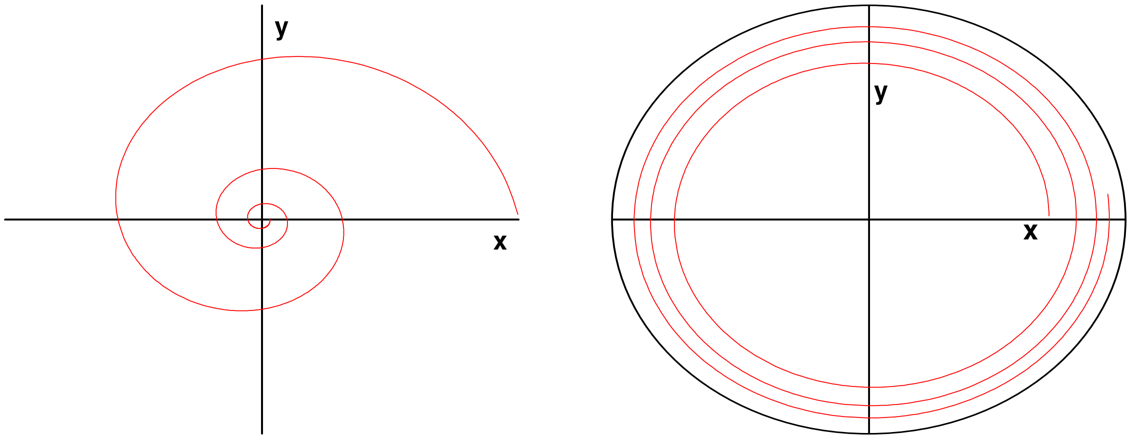

Abbildung 9.5: Lösunen der Gl. 9.17 für $\Gamma > 0$ (rechts) und $\Gamma, 0$ (links).

$$0 \;=\; \Gamma + r_c^2, \qquad\qquad r_c \;=\; \sqrt{-\Gamma}.$$

Wir setzen $\Gamma = -r_c^2$ in (9.18) ein,

$$\dot{r} \;=\; (r_c^2 - r^2)r, \qquad\qquad \dot{\varphi} \;=\; \omega.$$

und bemerken, dass $\dot{r} > 0$ für $r < r_c$ und $\dot{r} < 0$ für $r > r_c$. Das Flussdiagramm sieht also folgendermaßen aus:
Alle Bahnen streben also auf $(x_c(t), y_c(t)) = r_c(\cos\omega t, \sin\omega t)$ zu. Die Bahn $(x_c(t), y_c(t))$ nennt man daher einen Attraktor, welcher hier die Gestalt eines "Grenzzyklus" hat. Die Differentialgleichung (9.17) zeigt also bei $\Gamma = 0$ einen Übergang von einem stabilen Fixpunkt zu einem Grenzzyklus, welchen man "Hopf-Bifurkation" nennt.

Van der Pool'sche Gleichung

Wir betrachten den gedämpften harmonischen Oszillator

$$\ddot{u} + 2\gamma(u)\dot{u} + \omega^2 u = 0, \qquad\qquad \gamma(u) = -\gamma_0(1 - u^2/u_0^2), \qquad (9.19)$$

bei welchem der Reibungsterm $\sim \dot{u}$ nicht konstant ist, sondern amplitudenabhängig. Für kleine Amplituden $u < u_0$ ist $\gamma(u)$ negativ, d.h. die Bewegung wird verstärkt, während die Bewegung für große Amplituden $u > u_0$ gedämpft wird. Folglich muss die "Van der Poolsche Gleichung" (9.19) einen Attraktor haben, also ein Gebiet im Phasenraum $(u, \dot{u})$, auf welches die Bahnen für lange Zeiten drauflaufen. Man kann zeigen, dass es sich auch hier um eine periodische Bahn handelt.

Chaos und merkwürdige Attraktoren

Im allgemeinen kann ein Attraktor auch ein komplizierteres Gebilde im Phasenraum sein. Chaos tritt dann ein, wenn der Attraktor ein sogenannter *"strange attractor"* ist. Bei einem solchen findet die Bewegung im Limes großer Zeiten zwar auch in einem zusammenhängenden Gebiet des Phasenraumes statt, jedoch mit positiven Liapunov Exponenten (eine periodische Bahn hat den Liapunov Exponenten Null). Das heißt, dass auch Bahnen in der Nähe des Attraktors noch exponentiell auseinanderlaufen und dies obgleich sich das Phasenraumvolumen dabei zusammenzieht. Daher die Bezeichnung "strange" - merkwürdig.

Poincaré Abbildung

Im allgemeinen ist der physikalische Phasenraum hochdimensional, $2f$. Man möchte sich dennoch häufig gerne ein zweidimensionales Bild von der Bewegung machen. Dies ist insbesondere für Computersimulationen besonders wichtig. Die einfachste Möglichkeit hierzu ist die *"Poincaré Abbildung"*. Hierzu nimmt man irgend eine Ebene im Phasenraum, z.B. die $q_1 - p_1$ Ebene mit $q_\beta = 0 = p_\beta$, $\beta = 2 \ldots f$. I.A. wird die Bahn die betrachtete Ebene immer wieder durchstoßen. Diese Durchstoßpunkte malt man dann hin und schreibt die Zeit hinzu. Mit diesen Bildern kann man dann leicht einen Eindruck gewinnen, ob das Verhalten regulär, periodisch oder chaotisch ist.
Die Serie von Durchstoßpunkten

$$x^{(i)} = (q_1^{(i)}, p^{(i)}, 0, 0, \ldots), \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

definierten nun eine Abbildung P der Ebene des Phasenraums auf sich,

$$\mathbf{P}: \quad x^{(i)} \mapsto x^{(i+1)}.$$

Bei dieser Abbildung, der Poincaré-Abbildung, wird ein Punkt der betrachteten Ebene also als Ausgangspunkt für die Bewegung angesehen

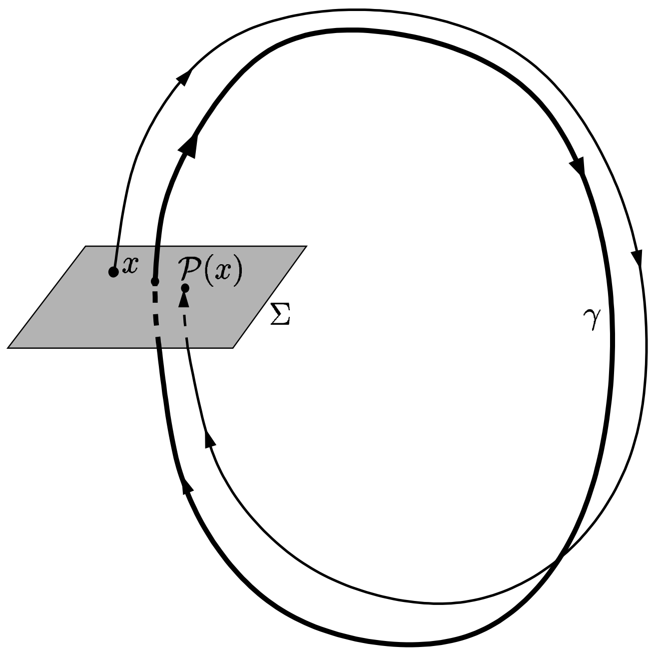

Abbildung 9.6: Illustration der Poincaré Abbildung.

und dem nächsten Durchstoßungspunkt zugeordnet. Es ist also eine diskrete Abbildung, ganz analog zur logistischen Abbildung aus §9.2. Ähnlich wie dort kann man dann mit Hilfe von P das mögliche Auftreten von Chaos untersuchen.