§8. Kontinuumsmechanik

8.1 Kontinuums Limes

In der Kontinuumsmechanik geht es um die Beschreibung von mechanischen Systemen, die aus so vielen Massenpunkten zusammengesetzt sind, dass eine Beschreibung der Bewegung der einzelnen Massenpunkte entweder nicht mehr sinnvoll oder nicht mehr möglich ist. Beispiele sind die Dynamik von elastischen Körpern oder die von Flüssigkeiten und Gasen.
Um die Bewegungsgleichungen für ein Ensemble von Massenpunkten herzuleiten, geht man von den Newton'schen Bewegungsgleichungen für die einzelnen Massenpunkte aus und macht dann den "Kontinuumsübergang".

Schwingende Saite

Wir betrachten hierzu die (eindimensionale) schwingende Saite und definieren mit

$$u \;=\; u(x,t)$$

die Auslenkung der Saite aus der Ruhelage am Ort x und zur Zeit t.
Die x-Koordinaten der N Teilchen auf der Saite mit der Länge L sind

$$x_i \;=\; (i-\frac{1}{2})\Delta x, \qquad \Delta x = \frac{L}{N}, \qquad (i = 1\ldots N),$$

wobei wir der Randbedingungen halber $x=0$ und $x=L$ ausgeschlossen haben. Die Saite habe die Gesamtmasse M und die einzelnen Teilchen die Masse Δm_i, mit

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i = M \ .$$

Für eine homogene Saite ist $\Delta m_i \equiv M/N$. Die *Massendichte* $\rho(x)$ ist via

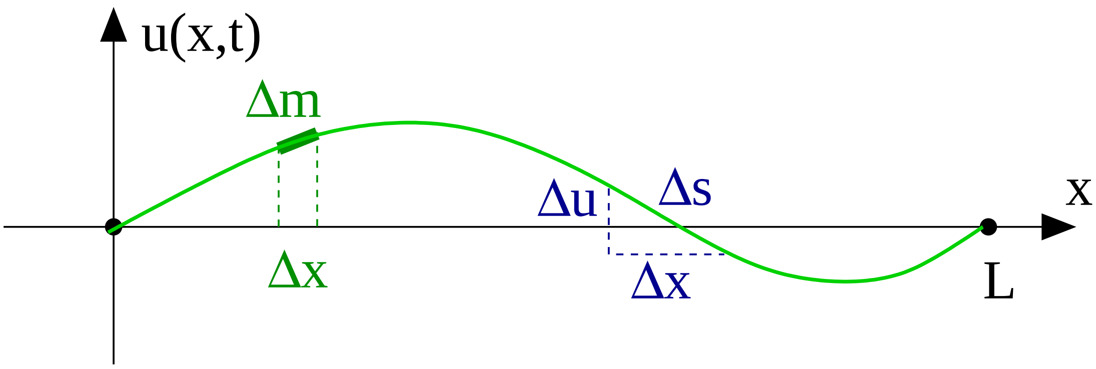

Abbildung 8.1: Eine schwingende Saite mit einem kleine Massenteil Δm und Längenabschnitt Δs.

$$\rho(x) \; = \; \frac{\Delta m_i}{\Delta x}, \qquad\qquad x = x_i$$

definiert. Für eine homogene Kette ist

$$\rho(x) \; \equiv \; \rho \; = \; \frac{MN}{NL} \; = \frac{M}{L}.$$

Lagrangefunktion

Um die Bewegungsgleichungen für die schwingende Saite aufzustellen, müssen wir zuerst die Lagrangefunktion finden. Die kinetische Energie ist

$$T \; = \; \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i}{2} \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 \; = \; \sum_{i=1}^{N} \Delta x \, \frac{\rho}{2} \, \dot{u}_i^2.$$

Wir nehmen nun an, dass zwischen allen Massenpunkten eine Feder mit der Federkonstanten f gespannt sei, so dass die Feder zwischen dem $(i+1)$-ten Teilchen und dem i-ten Teilchen einen Beitrag

$$\frac{f}{2}(\Delta s)^2, \qquad\qquad \Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (u_{i+1} - u_i)^2}$$

zur potentiellen Energie leistet, wobei Δs der Abstand der beiden Teilchen ist (wir betrachten transversale Auslenkungen). Bis auf eine Konstante ist die potentielle Energie also

$$U \;=\; \sum_{i=1}^{N-1} \frac{f}{2}\,(u_{i+1}-u_i)^2 \;=\; \sum_{i=1}^{N-1} \Delta x\,\frac{f\Delta x}{2}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}\right)^2,$$

wobei wir die Beiträge vom 1-ten und dem N-ten Teilchen zum jeweiligen Einspannpunkt vernachlässigt haben, sie tragen im "thermodynamischem Limes" ($N \to \infty$) nicht bei.
Wir schreiben $u_i = u(x_i,t)$ und führen nun den Kontinuumsübergang $N \to \infty$ durch, zunächst für die kinetische Energie:

$$T \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta x\,\frac{\rho(x_i)}{2}\left(\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial t}\right)^2 \;=\; \int_0^L dx\,\frac{\rho(x)}{2}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2.$$

Für den Grenzübergang der potentiellen Energie verwenden wir

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{u_{i+1}(t)-u_i(t)}{\Delta x} \;=\; \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

und setzen zudem

$$f\Delta x \;=\; P, \qquad\qquad f \;=\; \frac{P}{\Delta x},$$

das heißt, wir reskalieren mit N auch die Federkonstante zwischen den Teilchen (eine kürzere Feder wird härter). P kann dann als konstant angenommen werden. Wir erhalten

$$U \;=\; \sum_{i=1}^{N-1} \Delta x\,\frac{P}{2}\left(\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial x_i}\right)^2 \;=\; \int_0^L dx\,\frac{P}{2}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2.$$

Damit wird unsere Lagrangefunktion $\mathcal{L}(u,\dot u,u') = \mathcal{L}(\dot u,u')$ zu

$$\mathcal{L}(\dot u,u') \;=\; T-U \;=\; \int_0^L dx\,\underbrace{\left[\frac{\rho(x)}{2}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 - \frac{P}{2}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]}_{L(u,\dot u,u',x,t)=L(\dot u,u',x)},$$

wobei man $L(\dot u,u',x)$ als "Lagrangedichte" bezeichnet.

Prinzip der kleinsten Wirkung

Da die Saite als Grenzfall eines Systems aus vielen Massenpunkten gewonnen wurde, gilt das Hamilton'sche Prinzip

$$\delta S[u] \;=\; \delta \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \int_0^L dx\, L(u,\dot{u},u',x,t) \;=\; 0. \tag{8.1}$$

Um die Variation durchzuführen betrachten wir, wie im §4.4, die Schar von Funktionen $u(x,t,\lambda)$ mit festen Randbedingungen $u(x,t^{(j)},\lambda) = u^{(j)}(x)$ in Zeit und Ort: $u(0,t,\lambda) = u_0(t)$, $u(L,t,\lambda) = u_L(t)$. Dabei soll wiederum $u(x,t,\lambda = 0)$ die physikalische Bahn sein, also die, welche das Funktional (8.1) minimal macht:

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \frac{d}{d\lambda} \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \int_0^L dx\, L(u,\dot{u},u',x,t) \\ &=\; \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \int_0^L dx \left[\frac{\partial L}{\partial u}\frac{du}{d\lambda} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}}_{\downarrow t} \underbrace{\frac{d\dot{u}}{d\lambda}}_{\uparrow t} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial u'}}_{\downarrow x} \underbrace{\frac{du'}{d\lambda}}_{\uparrow x} \right], \end{aligned}$$

wobei einmal nach der Zeit und einmal nach dem Ort partiell zu integrieren ist. Dabei sollen die Randterme

$$0 \;=\; \int_0^L dx \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \frac{du(x,t,\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \right]_{t=t^{(1)}}^{t=t^{(2)}}$$

$$0 \;=\; \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \left[\frac{\partial L}{\partial u'} \frac{du(x,t,\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \right]_{x=0}^{x=L}$$

wegen der festen Randbedingungen verschwinden. Für die Variation der Wirkung $S[u]$ erhalten wir somit

$$0 \;=\; \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \int_0^L dx \left[\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} \right] \delta u,$$

wobei wir $\delta u = \frac{du(x,t,\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}$ gesetzt haben. Da nun $\delta u = \delta u(x,t)$ beliebig ist, muss der Integrand verschwinden; wir erhalten die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \;=\; 0} \tag{8.2}$$

für die Lagrangedichte L.

<u>Homogene Saite</u>

Für die homogene Saite ist $L = (\rho \dot{u}^2 - P(u')^2)/2$ und (8.2) wird zu

$$\rho \ddot{u} - P u'' = 0, \qquad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \tag{8.3}$$

mit der *Wellengeschwindigkeit*

$$c \;=\; \sqrt{\frac{P}{\rho}}.$$

<u>Membran</u>

Die Wellengleichung läßt sich sofort verallgemeinern. Für die homogene Membran (Trommel) ist $u = u(x, y, t)$ die senkrechte Auslenkung. Sie befolgt die zwei-dimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; 0.$$

Falls die Membran horizontal gelagert ist und das Schwerefeld der Erde nicht vernachlässigbar ist, so ist ihre Lagrangedichte

$$L \;=\; \frac{\rho}{2}\dot{u}^2 - \frac{P}{2}(u_x^2 + u_y^2) - g\rho u,$$

wobei $u_x = \partial u/\partial x$ und $u_y = \partial u/\partial y$ ist. Die dazugehörige Lagrange-Gleichung lautet:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; -\frac{g\rho}{P}.$$

Analog gilt für eine homogene schwingende Flüssigkeit (oder Luft: Schallwellen), oder auch für die Komponenten des Elektromagnetischen Feldes im Vakuum (Licht), die drei-dimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0.$$

8.2 Schwingende Saite

Als Beispiel für die Lösung der Wellengleichung (8.3) betrachten wir die eingespannte Saite. Die zu lösenden Gleichungen für $u(x,t)$ sind also

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ddot{u} - c^2 u'' = 0 & \text{Wellengleichung} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{Randbedingung} \\ u(x,0) = F(x),\ \dot{u}(x,0) = G(x) & \text{Anfangsbedingung} \end{array}} \tag{8.4}$$

Zur Lösung des Gleichungssystems (8.4) gehen wir wie in §3.5 vor und betrachten mit dem Separationsansatz

$$u(x,t) = e^{i\omega t} g(x)$$

zunächst die "zeitunabhängige" Bewegungsgleichung

$$k^2 g(x) + g''(x) = 0, \qquad k = \omega/c,$$

deren allgemeine Lösungen durch $\mathrm{e}^{\pm ikx}$ gegeben sind. Mit der Randbedingung $g(0) = 0$ verträglich ist die Superposition

$$g(x) = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{ikx} - \mathrm{e}^{-ikx}\right) = \sin(kx). \tag{8.5}$$

Die zweite Randbedingung verlangt

$$g(L) = 0 = \sin(kL), \qquad k \equiv k_n = \frac{\pi}{L}n, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots .$$

Fouierreihen

Die vollständige (reelle) Lösung ist ein lineare Üeberlagerung der partikulären Lösungen (8.5) und hat also die Form einer Fourierreihe

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \sin(k_n x)\left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right],$$

mit $\omega_n = ck_n$. Die "Entwicklungskoeffizienten" $a_n,\ b_n$ bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen

$$F(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(k_n x), \tag{8.6}$$

$$G(x) = \dot{u}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n b_n \sin(k_n x), \tag{8.7}$$

Da die Anfangsbedingung $F(x)$ beliebig ist, soweit sie mit den Randbedingungen $F(0) = 0 = F(L)$ verträglich ist, folgt aus (8.6), dass sich eine jede Funktion $F(x)$ auf dem Intervall $[0, L]$ durch die *"Fourierreihe"* (8.6) darstellen läßt.

Entwicklungskoeffizienten

Multiplizieren wir (8.6) mit $\sin(k_m x)$ und integrieren wir über x , so erhalten wir

$$\int_0^L dx\, F(x)\sin(k_m x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^L dx\, a_n \sin(k_n x)\sin(k_m x)$$

Mit der Exponentialdarstellung für die Sinus- und die Cosinus-Funktion erhalten wir Terme der Form

$$\mathrm{e}^{i(\pm k_m \pm k_n)x},$$

die sich gegenseitig wegheben, falls der Exponent $\pm k_m \pm k_n$ nicht verschwindet. Z.B.:

$$\int_0^L dx\,\left(\mathrm{e}^{i(k_m+k_n)x} + \mathrm{e}^{i(-k_m-k_n)x}\right) \;=\; \sum_{\epsilon=\pm1} \frac{1}{i(\epsilon k_m + \epsilon k_n)} \mathrm{e}^{i(\epsilon k_m + \epsilon k_n)x}\Big|_{x=0}^{x=L}$$

$$= \left(\frac{1}{i(k_m+k_n)} + \frac{1}{i(-k_m-k_n)}\right)((\pm 1)-1) \;=\; 0,$$

wobei wir $e^{\epsilon i(k_m+k_n)L} = (\pm 1)$ unabhängig von $\epsilon = \pm 1$ verwendet haben. Wir erhalten also nur für $k_n = k_m$ einen nicht-verschwindenden Beitrag von den beiden Terme, $e^{i(k_m-k_n)x} = 1$ und $e^{i(-k_m+k_n)x} = 1$, also

$$\int_0^L dx\, F(x)\sin(k_m x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^L dx\,\frac{a_n}{(2i)^2}\left(e^{ik_nx}-e^{-ik_nx}\right)\left(e^{ik_mx}-e^{-ik_mx}\right)$$

$$=\; 2L\,\frac{-a_m}{(2i)^2} \;=\; \frac{La_m}{2}$$

Die Entwicklungskoeffizienten a_n lassen sich also aus

$$a_n \;=\; \frac{2}{L}\int_0^L dx\, F(x)\sin(k_n x) \tag{8.8}$$

berechnen und analog die b_n aus

$$b_n \;=\; \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L dx\, G(x)\cos(k_n x). \tag{8.9}$$

Das Gleichungspaar (8.6) und (8.8) ist die Grundgleichung der Fouriertransformation und ist die Verallgemeinerung der diskreten Fouriertransformation aus §3.5 auf kontinuierliche Werte der Variablen x. Die Verallgemeinerung auf ein unendlich großes Intervall $x \in [-\infty, \infty]$ ist auch nicht schwer und Gegenstand der →Elektrodynamik.

8.3 Elastizitätstheorie

Wie denken uns einen Festkörper (Werkstoff) als Sammlung von Massenpunkten (Atome, Moleküle, Mikrokristalle). Die Ruhelage eines Massenpunktes ist $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, die Auslenkung von der Ruhelage $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Dabei ist die Aulenkung eine Funktion des Ortes, also

$$\vec{u} \;=\; \vec{u}(\vec{x}) \;=\; (u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}))$$

ein "Vektorfeld". In §8.1 haben wir gesehen, daß die elastische Energie (potentielle Energie) einer Saite eine quadratische Funktion der infinitesimalen Auslenkung der Saite u' war. Es liegt nahe, diesen Sachverhalt auf die elastische Energie eines Festkörpers zu verallgemeinern, solange die Auslenkung aus der Ruhelage klein (elastisch) ist, also

$$U \;=\; U(\{\partial u_i/\partial x_k\}),$$

Verzerrungstensor

Man kann nun zeigen, daß in den meisten Materialien (solche mit einem "Inversionszentrum") nur die symmetrische Kombination

$$u_{ik} \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{8.10}$$

von Bedeutung ist. Man bezeichnet die u_{ik} als den *"Verzerrungstensor"* (strain tensor).

Elastischer Tensor

Wir führen nun $3^4 = 81$ Zahlen

$$C_{ijkl}, \qquad\qquad (i,j,k,l = 1,2,3)$$

ein, welche man zusammengefaßt den *"elastischen Tensor"* nennt, und definieren die potentielle Energiedichte als

$$U \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} u_{ij}\, C_{ijkl}\, u_{kl}. \tag{8.11}$$

Natürlich sind nicht alle 81 Komponenten des elastischen Tensors voneinander verschieden, z.B. folgt aus (8.11) dass $C_{ijkl} = C_{klij}$ ist. Im allgemeinen gibt es 21 unabhängige Komponenten. Weitere Vereinfachungen ergeben sich aus der Symmetrie (kubisch(3), hexagonal(5), ...) des betrachteten Materials. Für die Lagrangedichte L eines elastischen Materials (ohne Reibung) mit (konstanter) Massendichte ρ erhalten wir dann (mit Summenkonvention)

$$L \;=\; \frac{\rho}{2}\,\dot{\vec{u}}^{2} \;-\; \frac{1}{2}\,u_{ij}\,C_{ijkl}\,u_{kl} \tag{8.12}$$

Spannungstensor

Aus (8.12) kann man mit dem Hamilton'schen Prinzip die Bewegungsgleichungen berechnen. Das ist nicht schwer, doch ein wenig unübersichtlich, der vielen Indizes wegen. Es ist daher in der Elastizitätstheorie üblich, als Zwischenschritt den *"Spannungstensor"* (stress tensor)

$$\sigma_{ij} \;=\; C_{ijkl}\,u_{kl} \;=\; \frac{\partial U}{\partial u_{ij}} \tag{8.13}$$

einzuführen. Die lineare Abhängigkeit (8.13) zwischen dem Spannugstensor σ_{ij} und dem Verzerrungstensor u_{kl} nennt man auch "Hook'sches Gesetz". Der Spannungstensor ist sehr nützlich, da sich die Kraftdichte $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1, f_2, f_3)$ als Divergenz des Spannungstensors

$$\boxed{\rho(\vec{x})\ddot{u}_i(\vec{x}) \;\equiv\; f_i \;=\; \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}} \tag{8.14}$$

dastellen lässt, wobei $\rho(\vec{x})$ die Massendichte ist. Wir wollen (8.14) nicht in voller Allgemeinheit beweisen, sondern als Illustration nur die Variation von einem Term der elastischen Energie betrachten:

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{2^2}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\,C_{1231}\,\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{8}\left(\underbrace{\frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2}}_{\uparrow x_2}\;C_{1231}\;\underbrace{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}_{\downarrow x_2} + \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}_{\downarrow x_1}\;C_{1231}\;\underbrace{\frac{\partial \delta u_3}{\partial x_1}}_{\uparrow x_1}\right)$$

wobei wir uns die Integrale $\int dt dx_1 dx_2 dx_3$ dazudenken. Nun ist der erste Term rechts nach x_2 und der zweite Term rechts nach x_1 partiell zu integrieren, mit dem Resultat

$$-\frac{1}{8}\left(\delta u_1 \underbrace{C_{1231}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_1}}_{\to f_1} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} C_{1231}}_{\to f_3} \delta u_3\right),$$

was in der Tat ein Term von (8.14) ist (bezüglich des Vorzeichens vergleiche (8.2)).

Oberflächenkräfte

Aus (8.14) folgt sofort, dass alle elastischen Kräfte *Oberflächenkräfte* sind ($\equiv$Definition von elastischen Kräften), da nach dem Satz von Gauß

$$\int_{\text{Vol.}} dV\, f_i \;=\; \int_{\text{Vol.}} dV\, \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \;=\; \int_{\text{Oberfl.}} df_j\, \sigma_{ij}.$$

Im isotropen Fall ist der Spannungstensor σ_{ij} diagonal,

$$\sigma_{ij} \;\equiv\; -P\delta_{ij}, \qquad\qquad \vec{f} \;=\; -\vec{\nabla} p\ ,$$

wobei $P = P(\vec{x})$ der Druck (ein skalares Feld) auf ein Volumenelement ist.

Transformation auf Hauptachsen

Weiterhin folgt aus (8.14), dass der Spannungstensor symmetrisch

$$\sigma_{ij} \;=\; \sigma_{ji}$$

ist. Eine Transformation auf Hauptspannungsachsen ist daher immer möglich.

Symmetrien

Als Beispiel für die Reduktion des elastischen Tensors C_{ijkl} durch Symmetrie betrachten wir einen *homogenen Körper*. Bei einem homogenen Körper gibt es (Definition) nur zwei Arten der Deformation: Eine selbstähnliche *homogene Dilatation* (hydrostatische Kompression) und eine *reine Scherung* (Volumen-erhaltend). Hierzu schreibt man den Verzerrungstensor in der Form

$$u_{ik} \;=\; \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\, u_{ll}\right) \;+\; \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\, u_{ll},$$

($u_{ll} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$), wobei der erste Term auf der rechten Seite Volumen-erhaltend ist (Summe der Diagonalelemente ist null). Da für einen isotropen Körper alle Scherungen äquivalent sind, können wir die elastische Energie (8.11) durch nur zwei Konstanten $\mu > 0$ und $K > 0$ parametrisieren (mit Summenkonvention),

$$U = \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ll}^2. \tag{8.15}$$

Dabei nennt man K den "Kompressionsmodul" und μ den "Torsionsmodul" (Schubmodul). Allgemein werden in der Elastizitätstheorie eine Unmenge von Proportionalitätskonstanten eingeführt, welche sich alle in der einen oder anderen Weise auf die C_{ijkl} zurückführen lassen.
Aus (8.15) folgt mit (8.13) der Spannungstensor für isotrope Körper (Übung)

$$\sigma_{ik} = 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right) + K \delta_{ik} u_{ll}.$$

Die Bewegungsgleichung wird somit in Anwesenheit von Volumenkräften $f_i^{(Vol)}$ (Schwerkraft) zu

$$\rho \ddot{u}_i = f_i^{(Vol)} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = f_i^{(Vol)}$$

$$+ \frac{2\mu}{2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)}_{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\Delta u_i} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}}_{\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\vec{u}}} + \left(K - \frac{2}{3}\mu \right) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \delta_{ik}}_{\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\vec{u}},$$

also

$$\boxed{\rho \ddot{u}_i = f_i^{(Vol)} + \mu \Delta u_i + \left(K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \vec{u}} \tag{8.16}$$

Schallwellen

Die Gleichung (8.16) läßt sich in Abwesenheit der Volumenkräfte, $f_i^{(Vol)} = 0$, durch

$$\vec{u}(\vec{x}) \;=\; \vec{a}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}, \qquad\qquad \vec{a} = \text{konst.}.$$

lösen. Einsetzen in (8.16) ergibt

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 \rho \vec{a} \;&=\; \mu(-i\vec{k})^2 \vec{a} \,+\, \left(K + \frac{\mu}{3}\right)(-i\vec{k})(-i\vec{a}\cdot\vec{k}), \\ \omega^2 \rho\, \vec{a} \;&=\; \mu\, \vec{k}^2\, \vec{a} \,+\, \left(K + \frac{\mu}{3}\right)(\vec{a}\cdot\vec{k})\,\vec{k}. \end{aligned}$$

Für jeden Wellenvektor $\vec{k}$ gibt es zwei transversale Wellen mit $\vec{a} \perp \vec{k}$ und der Dispersionsrelation ($k = |\vec{k}|$)

$$\omega(k)\Big|_{trans.} \;=\; \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,k \;\equiv\; c_t\, k$$

und eine longitudinale Welle mit $\vec{a} \parallel \vec{k}$ und mit (betrachte o.B.d.A. $\vec{a} = \hat{k}$)

$$\omega^2 \rho = \mu\, k^2 + \left(K + \frac{\mu}{3}\right) k^2, \qquad\qquad \omega(k)\Big|_{long.} \;=\; \sqrt{\frac{K + 4\mu/3}{\rho}}\,k \;\equiv\; c_l\, k\;.$$

Offensichtlich gilt für die transversale Schallgeschwindigkeit c_t und für die longitudinale Schallgeschwindigkeit c_l die Ungleichung

$$c_l \;\geq\; \sqrt{\frac{4}{3}}\,c_t.$$

8.4 Balkenbiegung

Wir betrachten einen homogenen eingespannten Balken im Schwerefeld der Erde mit der Länge L und Masse $M = \rho L$. Die Auslenkung aus der Horizontalen sei $u(x,t)$.
Die kinetische Energie T und die potentielle Energie haben die Form

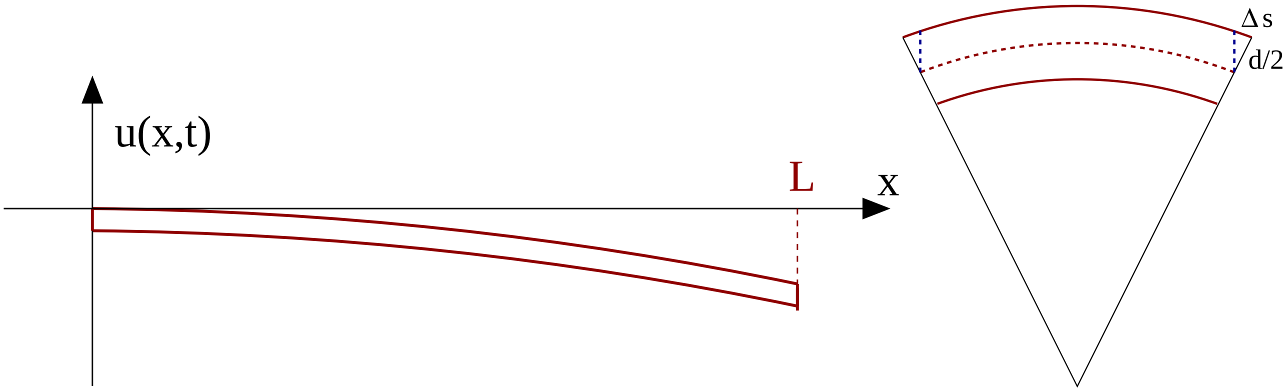

Abbildung 8.2: Der eingespannte Balken.

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^L dx\, \dot{u}^2, \qquad U_f = -\int_0^L dx\, u(x,t) f(x,t),$$

wobei $f(x,t)$ die äußere Kraftdichte ist, z.B. $-g\rho$ für die Schwerkraft. Die elastische Energie für dünne Balken (Dicke $d \to 0$) hat wie üblich die Form

$$U_{el} \;=\; \frac{P}{2} \int_0^L dx \left(\frac{\partial (u - u_0)}{\partial x} \right)^2 \;=\; \frac{P}{2} \int_0^L dx\, \left(u' - u_0' \right)^2$$

wobei $u_0 = u_0(x)$ die Gleichgewichtslage des Balken im äußeren Kraftfeld (Schwerfeld) ist. $u_0(x)$ ist also die statische Lösung der noch zu bestimmenden Euler-Lagrange Gleichungen und U_{el} beschreibt dann kleine Schwingungen um diese Gleichgewichtslage.

Dicker Balken

Die Biegung des Balkens wird durch Rückstellkräfte im Gleichgewicht gehalten, welche von der endlichen Dicke d des Balkens abhängen. Ihr Beitrag zur potentiellen Energie U_d kann wie folgt abgeschätzt werden: Die Mittelfaser des Balkens wird nicht gestaucht oder gestreckt. Zu jedem Punkt x der Horizontalen betrachtet man die Abweichung Δs der Aussenfaser des Balkens von x, gegeben durch

$$\Delta s(x) \;=\; \frac{d}{2} u'(x).$$

Die Stauchung (Dehnung) der Außenfaser zwischen zwei Punkten $x + \Delta x$ und x ist dann durch die Differenz

$$\begin{aligned}\Delta s(x+\Delta x)-\Delta s(x) &= \frac{d}{2}\left(u'(x+\Delta x)-u'(x)\right)\\ &= \frac{\Delta x d}{2}\left(\frac{u'(x+\Delta x)-u'(x)}{\Delta x}\right)=\frac{\Delta x d}{2}u''(x)\end{aligned}$$

gegeben. Nach dem Hook'schen Gesetz ist die elastische Energie proportional zum Quadrat der Stauchung, also nach dem Grenzübergang zu

$$U_d = \frac{Q}{2}\int_0^L dx\,(u'')^2,$$

wobei die elastische Konstante $Q \sim d^2$ ist. Somit haben wir die Lagrangedichte

$$L = T - U_f - U_{el} - U_d$$

und nach Variation der Wirkung erhalten wir die Euler-Lagrange Gleichungen (Übung)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial u''} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0}\,.$$

Mit $f(x,t) = -g\rho$

$$\rho\ddot{u} = -g\rho + P(u''-u_0'') - Qu''''.$$

<u>Statik des Balken</u>

Im statischen Fall $u \to u_0$ (Balkenbiegung) ist also die Gleichung

$$Qu_0'''' = -g\rho \tag{8.17}$$

zu lösen. Die Lösung ist ein Polynom vierten Grades,

$$u_0(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

wobei die Bewegungsgleichung (8.17) zu $24AQ = -g\rho$ führt, und die Integrationskonstanten B, C, D, E durch die Randbedingungen zu bestimmen sind. Für den beidseitig eingespannten Balken (Brücke) sind die Randbedingungen

$$u_0(0) = u_0'(0) = 0 = u_0(L) = u_0'(L)$$

mit der Lösung

$$u_0(x) \ = \ A\, x^2\, (x-L)^2, \qquad\qquad A \ = \ -\frac{g\rho}{24Q}.$$

8.5 Hydrodynamik

Die Hydrodynamik beschäftigt sich mit den Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen. Aus Sicht der Elastizitätstheorie handelt es sich bei Flüssigkeiten um isotrope Körper mit endlichem Kompressionsmodul K , aber mit verschwindendem Schermodul $\mu = 0$. Somit gibt es nach §8.3 nur longitudinale (Dichte-) Wellen, jedoch keine transversalen Wellen. Der Ansatz der Elastizitätstheorie ist offensichtlich für die Hydrodynamik ungenügend, denn offensichtlich passieren in Flüssigkeiten noch andere interessante Dinge außer den Kompressionswellen.

Kontinuitäts-Gleichung

Die Hydrodynamik beruht auf der Annahme, dass sich eine Flüssigkeit durch zwei Variablen beschreiben läßt, zum einen der Massendichte

$$\rho(\vec{x}, t)$$

und dem Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\vec{x}, t)$$

der konstituierenden Massenpunkte. In einer inkompressiblen Flüssigkeit ist die Massendichte konstant, i.a. jedoch variabel. Da man in der Hydrodynamik i.a. auch keine abgeschlossene Volumina betrachtet, gibt es auch keine erhaltene Gesamtmasse $\int d^3x\rho(\vec{x},t)$. Anstelle der *globalen* Massenerhaltung betrachtet man in der Hydrodynamik die *"Kontinuitätsgleichung"*

$$\boxed{\dot{\rho} + \mathrm{div}\vec{j} \ = \ 0} \qquad\qquad j(\vec{x},t) = \rho(\vec{c},t)\vec{v}(\vec{c},t), \tag{8.18}$$

wobei man $\vec{j}$ als die *"Stromdichte"* bezeichnet. Die Kontinuitätsgleichung (8.18) ist eine direkte Folge der *lokalen* Massenerhaltung. Integrieren wir (8.18) über ein kleines Volumen ΔV mit Oberfläche ΔF, so erhalten wir

$$\int_{\Delta V} dV\dot{\rho} \ = \ -\int_{\Delta V} dV\mathrm{div}\vec{j} \ = \ -\int_{\Delta F} d\vec{F}\cdot\vec{j},$$

wobei wir den Satz von Gauß verwendet haben. Das bedeutet aber nun, dass die totale Massenänderung im Volumen ΔV,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Delta V} dV\rho$$

gleich dem negativen totalen Massenfluss

$$\int_{\Delta F} d\vec{F}\vec{j}$$

aus dem Volumen raus (durch die Oberfläche) ist. Diese Gleichung muss natürlich für jedes noch so kleine Volumen ΔV gelten, somit auch in der differentiellen Form (8.18).

Euler-Gleichung

Nun wollen wir die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Masse $\Delta m = \rho\Delta V$ in einem kleinen Volumenelement ΔV aufstellen:

$$\Delta m\frac{d}{dt}\vec{v}(\vec{x},t) \ = \ \rho(\vec{x},t)\Delta V\frac{d}{dt}\vec{v}(\vec{x},t) \ = \ \Delta\vec{K}_{ext} + \Delta\vec{K}_{Druck}, \tag{8.19}$$

wobei wir die Kraft $\Delta K = \Delta\vec{K}_{ext} + \Delta\vec{K}_{Druck}$ auf das Volumenelment in einen *externen* Anteil ΔK_{ext} und einen Druckanteil ΔK_{Druck} aufgespaltet haben. Ein Beispiel ist das Schwerefeld mit der Kraftdichte $\vec{f} = -\rho g \hat{e}_z$ und der Kraft

$$\Delta \vec{K}_{ext}(\vec{x}, t) \;=\; \vec{f}(\vec{x}, t)\Delta V.$$

Die druckabhängige Komponente der Kraftdichte ist genau dann verschieden von Null, wenn der Druck auf das Volumenelement ΔV auf der einen Seite größer als auf der gegenüberliegenden Seite ist, wenn also der Druck $P = P(\vec{x}, t)$ nicht konstant ist. Wir betrachten eine kleines kartesisches Volumenelement $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ mit der Oberfläche F. Dann ist (Kraft=Druck $\times$ Fläche)

$$\begin{aligned} \Delta \vec{K}_{Druck} \;=\; -\int_F d\vec{F} P \;&=\; -\hat{e}_x \Delta y \Delta z \left[P(x + \Delta x) - P(x)\right] \\ -\hat{e}_y \Delta x \Delta z \left[P(y + \Delta y) - P(y)\right] &- \hat{e}_z \Delta x \Delta y \left[P(z + \Delta z) - P(z)\right] \\ &=\; -(\mathrm{grad}\, P)\Delta V. \end{aligned}$$

Zuletzt finden wir für

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(\vec{x}, t) \;=\; \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\dot{z} \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + (\vec{v} \cdot \mathrm{grad})\vec{v}.$$

Wir setzen nun die Ausdrücke für ΔK_{ext}, ΔK_{Druck} und dv/dt in (8.19) ein und erhalten

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \mathrm{grad})\vec{v}\right) \;=\; -\mathrm{grad}\, P + \vec{f}} \qquad (8.20)$$

die *“Euler-Gleichung”* der Hydrodynamik, welche die Dynamik *idealer* Flüssigkeiten (ohne Reibung) beschreibt. In realen Flüssigkeiten sind natürlich immer (innere) Reibungskräfte vorhanden (z.B $\sim \eta \Delta \vec{v}$), analog der Reibungskraft $-\gamma \dot{\vec{x}}$ beim gedämpften harmonischen Oszillator in §3. Mit Reibungskräften heißen die Bewegungsgleichungen dann *“Navier-Stokes Gleichungen”*.

Zustands-Gleichung

Wir bemerken, daß die Euler-Gleichung (8.20) zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (8.18) 4 partielle Differentialgleichungen für 5 reelle Felder $\rho(\vec{x},t)$, $\vec{v}(\vec{x},t)$, $P(\vec{x},t)$ darstellen. Offensichtlich fehlt noch ein Zusammenhang zwischen $\rho, \vec{v}$ und dem Druck P. Im allgemeinen ist der Druck eine Funktion der Dichte, also

$$P \;=\; P(\rho(\vec{x},t)), \tag{8.21}$$

und weiteren externen Parametern, wie z.B. der Temperatur T. Der Zusammenhang (8.21) wird *"Zustandsgleichung"* genannt, die Zustandsgleichung hängt sehr stark von der Art der Flüssigkeit ab (siehe →Thermodynamik). Ein Beispiel ist die sogenannte *polytrope* Zustandsgleichung

$$P \;\sim\; \rho^{\gamma}, \tag{8.22}$$

welche eine Kompressibilität κ der Form

$$\kappa \;=\; -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} \;=\; \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P} \;=\; \frac{1}{\gamma P} \tag{8.23}$$

impliziert. Der Exponent γ kann alle möglichen Werte annehmen:

γ	System
∞	inkompressible Flüssigkeit
$\gg 1$	reale Flüssigkeit
1	ideales Gas (isotherm)
$\neq 1$	ideales Gas (adiabatisch)

wobei isotherm bedeutet, dass das System eine konstante Temperatur hat und adiabatisch, dass das System energetisch abgeschlossen ist. Details werden in der →Thermodynamik behandelt.

8.6 Beispiele zur Hydrodynamik

Wir betrachten nun einige Anwendungen zur Dynamik idealer Flüssigkeiten.

Ruhende Flüssigkeit im Schwerefeld

Dies ist der Grenzfall der *"Hydrostatik"*, es gilt

$$\rho(\vec{x},t) = \rho(\vec{x}), \qquad \vec{v}(\vec{x},t) = 0, \qquad P(\vec{x},t) = P(\vec{x}),$$

und die Kontinuitätsgleichung (8.18) ist immer erfüllt. Im homogenen Schwerefeld ist $\vec{f} = -\rho g \hat{e}_z$ und die Euler-Gleichung (8.20) wird wegen der Translationsinvarianz in x und y Richtung zu

$$\mathrm{grad} P = -\rho g \hat{e}_z, \qquad \frac{d}{dz} P(z) = -\rho(z) g. \tag{8.24}$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit ist $\rho \equiv \rho_0$ konstant und

$$P(z) \;=\; P_0 - \rho_0 g z.$$

Druckverteilung in der Atmosphäre

Für ein ideales Gas ist $\gamma = 1$ in der Zustandsgleichung (8.22):

$$VP \;=\; N N_a k_B T \;,$$

wobei k_B die Boltzmann-Konstante, N_a die Advogardo-Zahl und N die Molanzahl ist. Sei m die Masse eines Gas-Moleküls und ρ die Massendichte, dann erhalten wir

$$mP \;=\; \frac{N N_a m}{V} k_B T \;=\; \frac{M}{V} k_B T \;=\; \rho\, k_B T \;.$$

Die Euler-Gleichung (8.24) wird damit zu

$$\boxed{\frac{dP}{dz} \;=\; -\frac{mg}{k_B T}\, P \;.}$$

Die Integration ergibt die barometrische Höhenformel

$$P(z) \;=\; P_0\, \mathrm{e}^{-mgz/(k_B T)} \;\approx\; \mathrm{e}^{-z/8km}$$

für die Höhenabhängigkeit des Luftdruckes, unter der (falschen) Annahme einer konstanten Lufttemperatur von $T \approx 300K$.

Rotierende Flüssigkeit im Schwerfeld

Wir betrachten eine inkompressible Flüssigkeit (Wasser) in einem mit Winkelgeschwindigkeit ω um die $z-$ Achse rotierenden Eimer. Nach dem Einstellvorgang wird es aufgrund der residuellen Reibungskräfte zu einem statischen Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\vec{x}) \;=\; \vec{\omega} \times \vec{x}$$

kommen. In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) haben wir

$$\hat{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \hat{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \hat{e}_z = (0, 0, 1)$$

und

$$\rho = \rho_0, \qquad \vec{\omega} = \omega\hat{e}_z, \qquad \vec{v} = \omega r\hat{e}_\varphi, \qquad \vec{f} = -g\rho_0\hat{e}_z.$$

Die Kontinuitätsgleichung ist erfüllt und für das Geschwindigkeitsfeld gilt $\partial\vec{v}/\partial t = 0$ und

$$(\vec{v}\cdot\mathrm{grad})\vec{v} \;=\; \omega r\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\omega r\hat{e}_\varphi) \;=\; \omega^2 r\frac{\partial\hat{e}_\varphi}{\partial\varphi} \;=\; -\omega^2 r\hat{e}_r\;.$$

Wegen der Rotationssymmetrie ist $P = P(r, z)$. Die Euler-Gleichung wird zu

$$-\rho_0\,\omega^2 r\hat{e}_r \;=\; -\frac{\partial P}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{\partial P}{\partial z}\hat{e}_z - \rho_0 g\hat{e}_z,$$

beziehungsweise zu

$$\frac{\partial P}{\partial r} \;=\; \rho_0\omega^2 r \qquad\qquad \frac{\partial P}{\partial z} \;=\; -\rho_0 g,$$

mit der Lösung

$$P(r, z) \;=\; P_0 \,+\, \rho_0\left(-gz + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right).$$

Die Oberfläche der Flüssigkeit ist durch die Isobare (Fläche konstanten Drucks)

$$z(r) \;=\; \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \frac{1}{g\rho_0}(P_0 - P)$$

gegeben, wobei $P \approx 1$bar gleich dem äußeren Luftdruck ist. Die Oberfläche ist also ein Rotationsparaboloid.

Bernoulli-Gleichung

Wir betrachten eine allgemeine stationäre Strömung einer inkompressiblen Füssigkeit in Abwesenheit eines äußeren Kraftfeldes, also

$$\vec{f} = 0, \qquad \rho(\vec{x}, t) = \rho_0, \qquad \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}), \qquad P(\vec{x}, t) = P(\vec{x}).$$

Die dazugehörige Euler-Gleichung

$$\rho_0(\vec{v} \cdot \mathrm{grad})\vec{v} \;=\; -\mathrm{grad} P$$

läßt sich elementar (Übung) zu

$$\frac{\rho_0}{2}\mathrm{grad}(\vec{v}^{\,2}) - \rho_0 \vec{v} \times \mathrm{rot}\, \vec{v} \;=\; -\mathrm{grad} P \tag{8.25}$$

umformen. Wie in §4.5 definiert das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ via

$$\frac{d}{d\lambda}\vec{x}(\lambda) \;=\; \vec{v}(\vec{x}) \tag{8.26}$$

eine Stromline $\vec{x}(\lambda)$ zu der einparametrigen Schar von Abbildungen

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}(\lambda)$$

mit dem Scharparameter λ. Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ ist in jedem Punkt zur Stromlinie tangential. Wir multiplizieren nun die Euler-Gleichung (8.25) mit $\vec{v}$ und beachten, daß $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \mathrm{rot}\, \vec{v}) = 0$ ist. Wir erhalten

$$0 \;=\; \vec{v} \cdot \left(\frac{\rho}{2}\mathrm{grad}(\vec{v}^{\,2}) + \mathrm{grad}\, P\right) \;=\; \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} \cdot \mathrm{grad}\left(\frac{\rho}{2}(\vec{v}^{\,2}) + P\right)\;,$$

also mit $df(\vec{x})/d\lambda = (\vec{\nabla} f) \cdot \partial\vec{x}/\partial\lambda$

$$0 \;=\; \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\rho}{2}\vec{v}^{\,2} + P\right).$$

Damit erhalten wir die *"Bernoulli-Gleichung"*

$$\boxed{\left(\frac{\rho}{2}\vec{v}^{\,2} + P\right) = \text{konstant entlang einer Stromlinie}}$$

Hierbei bezeichnet man $\rho_0\vec{v}^{\,2}/2$ als den *"Staudruck"*. Die Bernoulli-Gleichung erklärt einige bekannte Phänomene. So sinkt an einer Verengungsstelle (z.B. in einem Rohr) der Druck $P(\vec{x})$, da dort die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}(\vec{x})$ erhöht ist. Aus dem gleichen Grunde werden zwei nebeneinander her fahrende Schiffe zueinander angezogen.

Potentialströmung

Eine *"wirbelfreie"* Strömung ist durch

$$\text{rot}\,\vec{v}(\vec{x}) \;=\; 0$$

definiert. Demnach gibt es ein skalares Geschwindigkeitspotential $\Phi(\vec{x})$ mit

$$\vec{v}(\vec{x}) \;=\; \text{grad}\,\Phi(\vec{x}).$$

Daher auch die Bezeichnung *"Potentialströmung"*. Für eine inkompressible Flüssigkeit $\rho(\vec{x}) \equiv \rho_0$ folgt dann aus der Kontinuitätsgleichung (8.18)

$$0 \;=\; \text{grad}\,\vec{v} \;=\; \Delta\Phi$$

die sogenannte *Laplace-Gleichung.* Zu der Laplace-Gleichung gehören noch Randbedingungen. Für Flüssigkeiten verschwindet die Normalkomponente $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ am Rand. Damit lassen sich einige Dinge berechnen, z.B. das Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Strömung durch ein Rohr oder die wirbelfreie Umströmung eines Körpers.

Schallwellen

Der gewöhnliche Schall ergibt sich aus einer Linearisierung der hdyrodynamischen Gleichung für Luft um die Gleichgewichtslösung

$$\rho(\vec{x},t) = \rho_0, \qquad \vec{v}(\vec{x},t) = 0, \qquad P(\vec{x},t) = P_0.$$

Wir nehmen sofort an, dass die Abweichungen von der Gleichgewichtslösung harmonisch sind, also die Form

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho\, \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\cdot x)}, \qquad \vec{v} = \Delta\vec{v}\, \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\cdot x)}, \qquad P = P_0 + \Delta P\, \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\cdot x)}$$

annehmen. Die Kontinuitätsgleichung (8.18) wird somit zu

$$i\omega\Delta\rho \;-\; i\vec{k}\cdot\Delta\vec{v}\rho_0 \;=\; 0. \tag{8.27}$$

In der Euler-Gleichung (8.20) ist der Term $\sim (\vec{v}\cdot \mathrm{grad})\vec{v}$ zweiter Ordnung in Δv und kann somit vernachlässigt werden. Wir erhalten somit für die linearisierte Euler-Gleichung

$$i\omega\rho_0\Delta\vec{v} \;-\; i\vec{k}\Delta P \;=\; 0. \tag{8.28}$$

Die differentielle Zustandsgleichung

$$\Delta P \;=\; \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S \Delta\rho \;=\; \frac{\Delta\rho}{\rho_0\kappa_S} \tag{8.29}$$

ergibt nun einen Zusammenhang zwischen ΔP und $\Delta\rho$. Hierbei ist die Kompressibilität κ_S (siehe (8.23)) mit einem Index S versehen worden, um anzudeuten, dass bei Schallwellen die Kompression so schnell erfolgt, daß die adiabatische (ohne Energieaustausch) Kompression von Bedeutung ist.

Wir setzen nun (8.29) in (8.28) ein und schreiben (8.27) und (8.28) in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \omega & -\rho_0\vec{k} \\ -\frac{\vec{k}}{\rho_0\kappa_S} & \omega\rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\rho \\ \Delta\vec{v} \end{pmatrix} \;=\; 0. \tag{8.30}$$

Für transversale Wellen mit $\vec{k} \perp \Delta\vec{v}$ folgt sofort $\omega \equiv 0$ (vergleiche §8.1). Wir interessieren uns also für longitudinale Wellen mit $\vec{k} \parallel \Delta\vec{v}$. Mit $\vec{k} = k\hat{e}_z$ und $\Delta\vec{v} = \Delta v\hat{e}_z$ wird (8.30) zu

$$\begin{pmatrix} \omega & -\rho_0 k \\ -\frac{k}{\rho\kappa_S} & \omega\rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\rho \\ \Delta v \end{pmatrix} = 0 \tag{8.31}$$

einem homogenen linearen Gleichungssystem für die beiden Unbekanten $\Delta\rho$ und Δk. Es gibt nicht-triviale Lösungen nur, wenn die Determinante verschwindet, also wenn

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\rho_0\kappa_S} = c_S^2 k^2$$

ist, was die Schallgeschwindigkeit

$$c_S = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\kappa_S}}$$

definiert. Zu bemerken ist, dass die Dispersionsrelation $w(k) = c_S k$ linear ist, die Schallgeschwindigkeit $c_S \approx 320 m/s$ somit nicht von der Frequenz des Schalls abhängt. Anderenfalls wäre die akustische Kommunikation (Sprache) stark erschwert.