§5. Der Kreisel

5.1 Körperfestes Koordinatensystem

Wir bezeichnen mit $\vec{x}$ das Laborsystem und mit $\vec{y}$ das (rotierende) körperfeste Koordinatensystem. Es gilt die Transformationsgleichung $\vec{x} = R(t)\vec{y}$, wobei $R(t)$ die Matrix der Rotation $\mathrm{e}^{-t\vec{\omega}\cdot\vec{\underline{J}}}$ ist (siehe §4.6 und beachte für das Vorzeichen im Exponenten, dass $\vec{y}$ das rotierende Koordinatensystem ist). Ferner gilt

$$R^T \dot{R}\,\vec{y} \;=\; \vec{\omega}\times\vec{y}, \qquad\qquad \frac{d}{dt}\vec{y} \;=\; \frac{d}{dt}R\vec{y} \;=\; \dot{R}\vec{y}\;,$$

(siehe §4.6) da das $\vec{y}$-System starr ist, sich also nicht bewegt.

Trägheitstensor

Wir denken uns einen festen (starren) Körper aus vielen Massenpunkten zusammengesetzt und integrieren über die Massenverteilung, wobei $M = \int dm$ die Gesamtmasse ist. Wir betrachten den Drehimpuls im Laborsystem,

$$\begin{aligned}\vec{L} \;&=\; \int dm\,(\vec{x}\times\dot{\vec{x}}) \;=\; \int dm\,(R\vec{y}\times\dot{R}\vec{y}) \\ &=\; R\int dm\,(\vec{y}\times\underbrace{R^T\dot{R}\vec{y}}_{\omega\times\vec{y}}) \;\equiv\; R\vec{S}\;.\end{aligned}$$

Dabei ist $\vec{S}$ (und $\vec{\omega}$) der Drehimpuls (und die Winkelgeschwindigkeit) im mitrotierenden Bezugssystem, dem y-System. $\vec{S}$ ist eine lineare Funktion der ω_k $(k = 1, 2, 3)$:

$$S_i \;=\; \int dm\,[\vec{y}\times(\vec{\omega}\times\vec{y})]_i \;=\; \int dm\,\Big[\vec{y}^{\,2}\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\vec{y})\vec{y}\Big]_i \;\equiv\; \sum_k \theta_{ik}\omega_k, \tag{5.1}$$

wobei der “Trägheitstensor” θ die Komponenten

$$\boxed{\theta_{ik} = \int dm \, \left[\vec{y}^{\,2}\delta_{ik} - y_i y_k\right]} \tag{5.2}$$

hat. Ein rotierender Ring mit Radius R und Gesamtmasse M hat, z.B., $\theta_1 = \theta_2 = MR^2/2$, $\theta_w = MR^2$.

Kinetische Energie

Die Geschwindigkeit eines Massenpunkts ist im Laborsystem $\dot{\vec{x}} = \dot{R}\vec{y}$, im rotierenden System also $R^T\dot{\vec{x}} = R^T\dot{R}\vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}$. Also finden wir für die kinetische Energie

$$T \;=\; \frac{1}{2}\int dm\,(\vec{\omega}\times\vec{y})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{y}) \;=\; \frac{1}{2}\int dm\,\vec{\omega}\cdot[\vec{y}\times(\vec{\omega}\times\vec{y})]\,,$$

wobei die letzte Identität eine Konsequenz der geometrischen Eigenschaften des Kreuzproduktes ist (Übung). Also können wir die kinetische Energie auch in der Form

$$T \;=\; \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{S} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{ik}\,\omega_i\theta_{ik}\omega_k \tag{5.3}$$

schreiben.

Hauptachsensystem

Den Trägheitstensor θ kann man als lineare Abbildung $\theta:\ \vec{\omega}\mapsto\vec{S} = \theta\vec{\omega}$ auffassen. Ferner ist θ symmetrisch, $\theta_{ik} = \theta_{ki}$ und die quadratische Form $(\vec{\omega},\theta\vec{\omega}) = 2T$ positiv definit, da dies die kinetische Energie T ist. Jede reelle, symmetrische Matrix lässt sich vollständig diagonalisieren. Es gibt somit stets ein orthonormiertes System von Eigenvektoren $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ von θ mit positiven Eigenwerten $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Wählt man die $\hat{e}_i$ als Basis des körperfesten Koordinatensystems, so wird die Matrix θ_{ik} diagonal:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

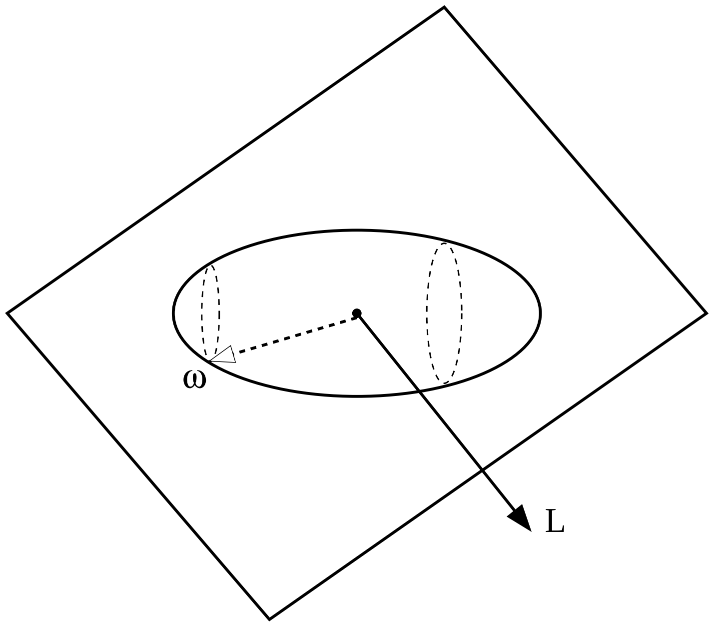

Abbildung 5.1: Die Konstruktion von Poinsot mit dem körperfesten Ellipsoid $(\vec{y}, \theta\vec{y}) = 2E$ und der Labor-festen Ebene $(\vec{x}, \vec{L}) = 2E$

und wir befinden uns im "Hauptachsensystem". (5.1) und (5.3) vereinfachen sich zu

$$S_i = \theta_i \omega_i \qquad (i = 1, 2, 3); \qquad\qquad T = \sum_i \theta_i \omega_i^2. \tag{5.5}$$

Im folgenden benützen wir stets ein Hauptachsensystem.

5.2 Konstruktion von Poinsot

Die Bahnkurve des freien Kreisels $\vec{L}$ =const. lässt sich geometrisch bestimmen durch die "Konstruktion von Poinsot". Dazu betrachten wir die raumfeste (da $\vec{L}$ fest) Fläche

$$(\vec{x}, \vec{L}) \;=\; (\vec{y}, \vec{S}) \;=\; 2E \tag{5.6}$$

und das körperfeste Ellipsoid

$$(\vec{y}, \theta\vec{y}) \;=\; 2E, \tag{5.7}$$

wobei jeweils $\vec{x}$ und $\vec{y}$ als freie Variablen zu sehen sind und E die (erhaltene) kinetische Energie ist.

Wir wollen nun zeigen, dass sich die raumfeste Ebene und das körperfeste Ellipsoid genau in einem Punkt ($\vec{y} = \vec{\omega}$) schneiden. Haben wir dies gezeigt, so folgt, dass das Ellipsoid auf der Ebene abrollt, womit die Bahnkurve gefunden wäre.
Wir beginnen mit der Bemerkung, dass $\vec{y} = \vec{\omega}$ sowohl (5.6) sowie (5.7) löst, da

$$(\vec{\omega}, \vec{S}) \;=\; (\vec{\omega}, \theta\vec{\omega}) \;=\; 2E.$$

Damit ist jedes $\vec{y}$ der Ebene (5.6) von der Gestalt $\vec{y} = \vec{\omega} + \Delta\vec{y}$, mit $(\Delta\vec{y}, \vec{S}) = 0$. Diese Form setzen wir nun in die linke Seite von (5.7) ein:

$$(\vec{\omega} + \Delta\vec{y}, \theta(\vec{\omega} + \Delta\vec{y})) = (\vec{\omega}, \theta\vec{\omega}) + (\vec{\omega}, \theta\Delta\vec{y}) + (\Delta\vec{y}, \theta\vec{\omega}) + (\Delta\vec{y}, \theta\Delta\vec{y})$$

$$= 2E + (\Delta\vec{y}, \theta\Delta\vec{y})$$

da $(\vec{\omega}, \theta\Delta\vec{y}) = (\Delta\vec{y}, \theta\vec{\omega}) = (\Delta\vec{y}, \vec{S}) = 0$. Somit ist (5.7) dann und nur dann erfüllt, wenn $\Delta\vec{y} = \vec{0}$ ist,denn $(\Delta\vec{y}, \theta\Delta\vec{y}) \geq 0$.

5.3 Freier Kreisel

Der Drehimpulssatz $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ (siehe §1.5) gilt im Laborsystem und führt auf die Bewegungsgleichungen für den Kreisel. Für den freien Kreisel verschwindet das Drehmoment $\vec{M} = 0$. Mit $\vec{L} = R\vec{S}$ finden wir

$$0 \;=\; \dot{\vec{L}} \;=\; \dot{R}\vec{S} + R\dot{\vec{S}}$$

und

$$\dot{\vec{S}} \;=\; -R^T\dot{R}\vec{S} \;=\; -\vec{\omega} \times \vec{S}\;. \tag{5.8}$$

Drücken wir nun $\vec{S}$ via (5.5) durch ω_i aus, so erhalten wir (Übung) für die ω_i ein nicht-lineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung, die "Eulerschen Gleichungen":

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_1\dot{\omega}_1 &= (\theta_2-\theta_3)\,\omega_2\omega_3 \\ \theta_2\dot{\omega}_2 &= (\theta_3-\theta_1)\,\omega_3\omega_1 \\ \theta_3\dot{\omega}_3 &= (\theta_1-\theta_2)\,\omega_1\omega_2 \end{aligned}} \tag{5.9}$$

Stabilitätsanalyse

Als ersten (Spezial-)Fall betrachten wir nun
die permanenten Rotationen um eine Hauptachse, z.B.

$$\vec{\omega} \;=\; (\omega_1, 0, 0) \;=\; \text{konst.} \tag{5.10}$$

Wir untersuchen nun die Stabilität dieser Bewegung, indem wir die Eulerschen Gleichungen nach kleinen ω_2 und ω_3 entwickeln.
Linear in ω_2, ω_3 sind die Eulerschen Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} \theta_1\dot{\omega}_1 &= 0 \\ \theta_2\dot{\omega}_2 &= (\theta_3-\theta_1)\,\omega_3\omega_1 \\ \theta_3\dot{\omega}_3 &= (\theta_1-\theta_2)\,\omega_1\omega_2 \end{aligned}$$

Somit bleibt ω_1 weiterhin konstant, und wir haben zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten, ω_2, ω_3:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_2}\omega_1 \\ \frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_3}\omega_1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} . \tag{5.11}$$

Die Eigenwerte λ der Matrix A ergeben sich zu

$$\lambda^2 \;=\; \frac{(\theta_3-\theta_1)(\theta_1-\theta_2)}{\theta_2\theta_3}\,\omega_1^2.$$

Die Eigenwerte λ sind reell, falls θ_1 <u>zwischen</u> θ_2 und θ_3 liegt – dann hat (5.11) exponentiell wachsende Lösungen (Instabilität der permanenten Rotationen um die "mittlere" Hauptachse). Falls θ_1 das kleinste oder größte Hauptträgheitsmoment ist, so sind die Eigenwerte λ

imaginär und das System führt kleine Schwingungen um die Lösung $\vec{\omega} = (\omega_1, 0, 0)$ aus, die somit (marginal) stabil ist.

Symmetrischer Kreisel

Wir betrachten nun die allgemeine Bewegung des freien *symmetrischen Kreisels* (=2 gleiche Trägheitsmomente). Sei die y_1-Achse die Figurenachse, also $\theta_2 = \theta_3$. Die Eulerschen Gleichungen lauten

$$\begin{array}{rcl} \theta_1 \dot{\omega}_1 & = & 0 \\ \dot{\omega}_2 & = & -\alpha\omega_3 \\ \dot{\omega}_3 & = & \alpha\omega_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cl} \rightarrow & \omega_1 = \text{konst., also} \\ & \alpha = \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_3}\omega_1 = \text{konst.} \\ & \end{array}$$

Dies zeigt, dass sich $\vec{\omega}$ im körperfesten System mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit α um die Figurenachse dreht.

5.4 Die Eulerschen Winkel

Als Lagekoordinaten werden in der Theorie des starren Körpers gerne die sog. "Eulerschen Winkel" verwendet. Hierbei stellt man eine beliebige Rotation R des Körpers als Produkt dreier aufeinander folgender Rotationen R_φ, R_ϑ und R_ϕ dar:

$$R = R_\psi \cdot R_\vartheta \cdot R_\varphi. \tag{5.12}$$

Die genaue Definition der Eulerschen Winkel ist nicht eindeutig festgelegt. Wir verwenden die folgende: Die drei Drehungen sind:

	Drehachse	Drehwinkel
1. Drehung R_φ:	x_3	φ
2. Drehung R_ϑ:	K	ϑ
3. Drehung R_ψ:	y_3	ψ,

wobei die "Knotenlinie" K das Bild der x_1-Achse nach der ersten Drehung ist.

Als Rotationsmatrizen haben wir also

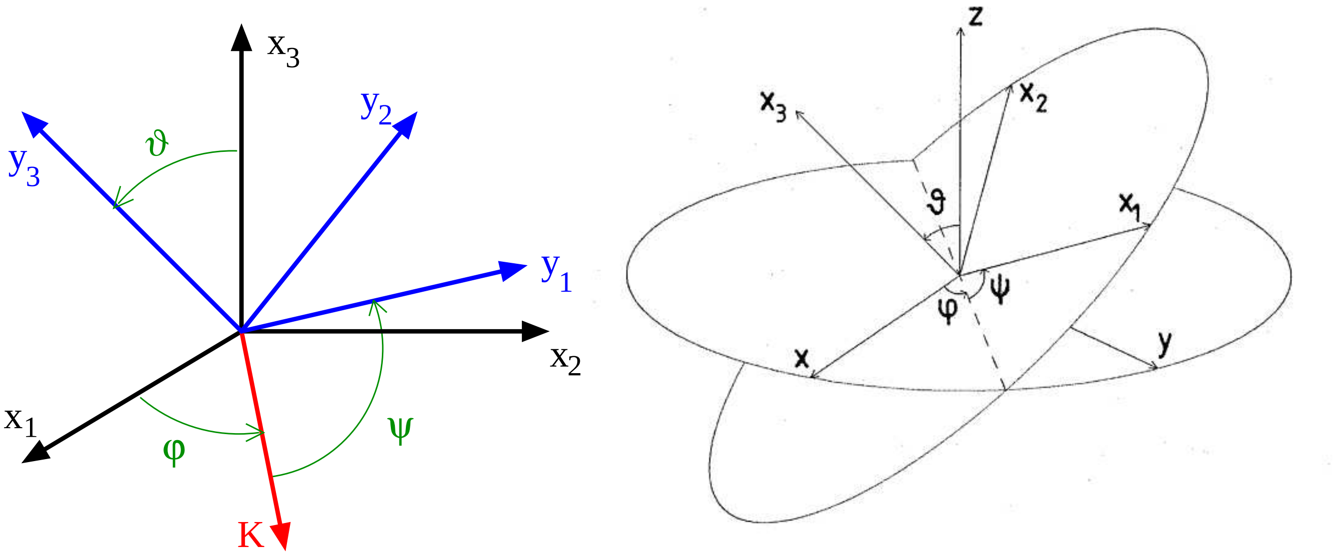

Abbildung 5.2: Die Euler'schen Winkel.

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad R_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

$$R_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus kann man mit (5.12) die Rotationsmatrix berechnen (Übung).

Winkelgeschwindigkeiten

Wichtig ist der Zusammenhang zwischen den Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im $y-$System, $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ und den Winkelgeschwindigkeiten der Eulerschen Winkel, $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Diese kann man entweder aus aus $R^T\dot{R}\vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}$ gewinnen oder aus aus dem Additionstheorem für Winkelgeschwindigkeiten

$$\vec{\omega} \;=\; \dot{\varphi}\hat{e}_\varphi \,+\, \dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta \,+\, \dot{\psi}\hat{e}_\psi \;,$$

wobei $\hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_\vartheta$ und $\hat{e}_\psi$ die Einheitsvektoren der Rotationsachsen sind, deren $y-$Komponenten durch (Übung)

$$\begin{aligned}
\hat{e}_\varphi &= (\sin\vartheta\sin\psi, \sin\vartheta\cos\psi, \cos\vartheta) \\
\hat{e}_\vartheta &= (\cos\psi, -\sin\psi, 0) \\
\hat{e}_\psi &= (0, 0, 1)
\end{aligned}$$

gegeben sind.

5.5 Schwerer, symmetrischer Kreisel

Wir setzen $\theta_1 = \theta_2$ (y_3-Achse = Figurenachse) und nehmen an, dass der Schwerpunkt auf der y_3-Achse liegt und die körperfeste Koordinate $(0, 0, l)$ hat ($l > 0$ fest). In den Eulerschen Winkeln wird die kinetische Energie zu

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\theta_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) \,+\, \frac{1}{2}\theta_3\omega_3^2 \\
&= \frac{1}{2}\theta_1\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) \,+\, \frac{1}{2}\theta_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta\right)^2 .
\end{aligned}$$

Wenn die x_3-Achse in der Vertikalen liegt, so ist die potentielle Energie $V = mgl\cos\vartheta$ und die Lagrangefunktion $L = T - V$ wird zu

$$L \;=\; \frac{\theta_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) \,+\, \frac{\theta_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta\right)^2 \,-\, mgl\cos\vartheta \;. \qquad (5.14)$$

Erhaltungssätze

Da L nicht von t, φ, ψ abhängt, besitzt das System die drei Erhaltungsgrößen

$$T + V \;=\; E \qquad (5.15)$$

$$p_\varphi \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \;=\; \dot\varphi(\theta_1 \sin^2\vartheta + \theta_3\cos^2\vartheta) + \dot\psi\theta_3\cos\vartheta \;\equiv\; M_z \qquad (5.16)$$

$$p_\psi \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} \;=\; \theta_3\,(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta) \;\equiv\; M_3\;, \qquad (5.17)$$

deren Konstanten wir mit E, M_z und M_3 bezeichnen. p_φ und p_ψ sind die Projektionen des Drehimpulses auf $\hat e_\varphi$ (Vertikale) und $\hat e_\psi$ (Figurenachse) respektive. $T+V$ und p_φ sind auch beim allgemeinen schweren Kreisel erhalten, p_ψ jedoch nur beim symmetrischen Kreisel.

Bewegungsgleichungen

Aus (5.16) und (5.17) erhalten wir

$$\dot\psi \;=\; \frac{M_3}{\theta_3} - \dot\varphi\cos\vartheta, \qquad (5.18)$$

$$\dot\varphi \;=\; \frac{M_z - M_3\cos\vartheta}{\theta_1\sin^2\vartheta} \qquad (5.19)$$

d.h. $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ sind durch ϑ bestimmt. Kennen wir also erst einmal $\vartheta(t)$, können wir aus Integration von (5.19) und (5.18) $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ erhalten.

Die Bestimmungsgleichung für die "Nutationsbewegung" $\vartheta(t)$ erhalten wir, indem wir (5.19) und (5.18) in (5.15) einsetzen:

$$E' \;=\; E - \frac{M_3^2}{2\theta_3} \;=\; \frac{\theta_1}{2}\dot\vartheta^2 + \frac{(M_z - M_3\cos\vartheta)^2}{2\theta_1\sin^2\vartheta} + mgl\cos\vartheta. \qquad (5.20)$$

Wir führen eine Variablentransformation $u = \cos\vartheta$ ($\dot u = -\dot\vartheta\sin\vartheta$) durch und setzen

$$a = \frac{M_z}{\theta_1}; \qquad b = \frac{M_3}{\theta_1}; \qquad \alpha = \frac{2E'}{\theta_1}; \qquad \beta = \frac{2mgl}{\theta_1}\;. \qquad (5.21)$$

Dann lautet (5.20)

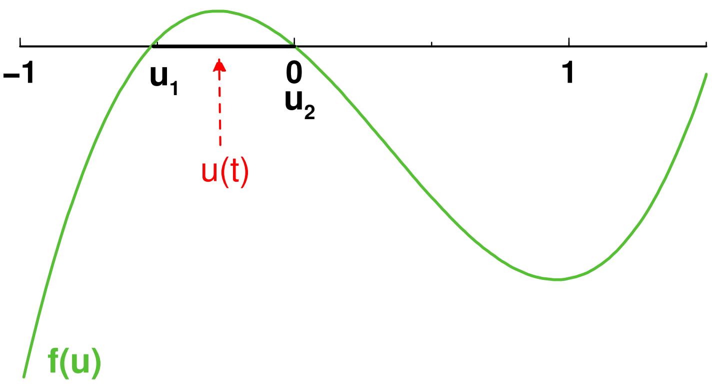

Abbildung 5.3: Qualitativer Verlauf der Funktion $f(u)$, siehe Gl. (5.22).

$$\dot{u}^2 \;=\; (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (a-bu)^2 \;\equiv\; f(u) \tag{5.22}$$

mit der Lösung

$$t(u) - t(u_0) \;=\; \int_{u_0}^{u} \frac{du'}{\sqrt{f(u')}}. \tag{5.23}$$

Hieraus ergibt sich $u(t)$ und $\vartheta(t) = \cos^{-1} u(t)$.

Diskussion der Lösungen

Die Funktion $f(u)$ hat die Eigenschaften

$$f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 \le 0, \qquad f(u) \sim \beta u^3, \quad (u \to \pm\infty)$$

Aufgrund der Anfangsbedingungen muss ferner $f(u) = \dot{u}^2$ irgendwo im Intervall $-1 \le u = \cos\vartheta \le +1$ größer als Null sein.
Daraus ergibt sich, dass $u_1 \le u \le u_2$ der Bereich energetisch zulässiger Lösungen ist. Dabei sind u_1 und u_2 Nullstellen erster Ordnung von $f(u)$. $u(t)$ pendelt periodisch zwischen u_1 und u_2 mit der Periode

$$T = 2\int_{u_1}^{u_2} \frac{du'}{\sqrt{f(u')}}.$$

Dieselbe Periode hat

$$\dot{\varphi} \;=\; \frac{M_z - M_3\cos\vartheta}{\theta_1 \sin^2\vartheta} \;=\; \frac{a-bu}{1-u^2}\;.$$

$\dot{\varphi}$ wechselt das Vorzeichen nur, falls $u_1 < a/b < u_2$. Der Grenzfall $u_1 = a/b$ ist ausgeschlossen, denn dann wäre auch $u_1 = \alpha/\beta$, d.h.

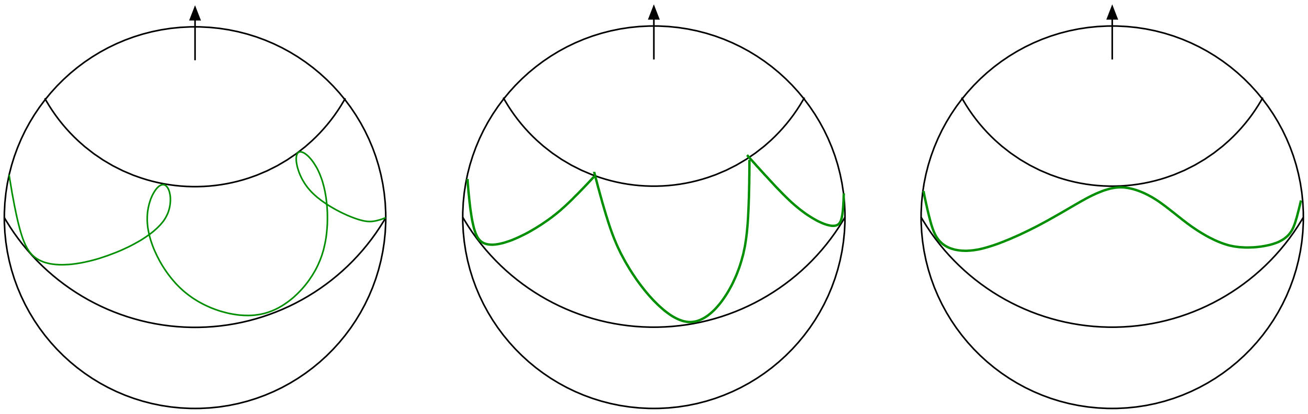

Abbildung 5.4: Schematische Illustration der Nutationsbewegung des schweren, symmetrischen Kreisels. Links: $u_1 < a/b < u_2$, Mitte: $a/b = u_2$, Rechts: $a/b > u_2$.

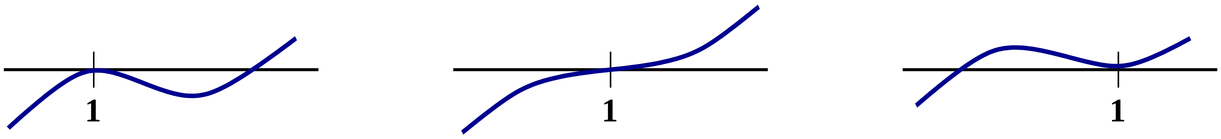

Abbildung 5.5: Illustration der Funktion $(1-u)^2\,[2\alpha - a^2]$. Links: $2\alpha < a^2$, Mitte: $2\alpha = a^2$, Rechts: $2\alpha > a^2$.

$\alpha - \beta u = \beta(\alpha/\beta - u) = \beta(u_1 - u)$ und $f(u)$ negativ im Intervall $[u_1, u_2]$. Für die Richtung der Figurenachse gibt es somit drei Bewegungstypen, die wir auf der Einheitskugel darstellen können:

Stabilität des senkrecht stehenden schweren Kreisels

Der Kreisel rotiere um die $x_3 = y_3$-Achse. Dann ist

$$E' = mgl; \qquad M_3 = M_z = M, \qquad \text{also}$$
$$\alpha = \beta = \frac{2mgl}{\theta_1}; \qquad a = b = \frac{M}{\theta_1}, \qquad \text{und}$$

$$\dot{u}^2 = f(u) = (1-u)^2\left[\alpha(1+u) - a^2\right] \approx (1-u)^2\left[2\alpha - a^2\right] \qquad (u \approx 1)$$

hat eine doppelte Nullstelle bei $u = 1$. Der Verlauf hängt vom Vorzeichen von $(2\alpha - a^2)$ ab:

Für $2\alpha > a^2$ (d.h. $M^2 < 4\theta_1 mgl$) ist die Lösung $u = 1$ instabil, da links von $u = 1$ ein energetisch erlaubtes Intervall mit $f(u) = \dot{u}^2 > 0$ anschließt. Der senkrecht aufgesetzte Spielkreisel beginnt also zu wackeln, sobald M^2 durch Reibungsverluste unter die Stabilitätsgrenze $4\theta_1 mgl$ sinkt.