# §4. Lagrange Formulierung

## 4.0 Einführung

Ziel ist es, einen einfachen Zugang zu komplizierten mechanischen Systemen zu entwickeln. Nach einer etwas komplizierten Herleitung wird sich der Lagrange-Formalismus als sehr einfach in der Anwendung zeigen. Zudem erlaubt er, einige tiefere Zusammenhänge mit Symmetrieüberlegungen aufzuzeigen.

## 4.1 Zwangsbedingungen

Ein System mit $f$ "Freiheitsgraden" besteht aus $N$ Teilchen, deren mögliche Konfigurationen $x = (\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N)$ zur Zeit $t$ durch $f$ unabängige Lagekoordinaten $q = (q_1 \ldots q_f)$ ($\equiv$generalisierte Koordinaten) beschreibbar sind ($\equiv$Definition von Freiheitsgraden):

$$\vec{x}_i \;=\; \vec{x}_i(q_1 \ldots q_f, t) \qquad (i = 1 \ldots N). \tag{4.1}$$

**Beispiel: Sphärisches Pendel**

Sphärisches Pendel mit fester Seillänge $R$ und mit vorgegebenem Aufhängepunkt $\vec{y}(t)$.

$$\vec{x}(t) \;=\; \vec{y}(t) + R\hat{e}(t),$$

wobei $\hat{e}(t)$ über die Einheitskugel variieren kann, auf der man z.B. die Polarkoordinaten $\vartheta$ und $\varphi$ als Lagekoordinaten benützen kann ($f = 2$). (Notation: der "Hut" auf dem $\hat{e}$ bedeutet, daß es sich um einen Einheitsvektor handelt.)

**Beispiel: Geführte Bewegung**

Teilchen im Schwerefeld auf einer festen Bahn, bestimmt durch zwei "Zwangsbedingungen"

$$y = 0; \qquad\qquad f(x, z) = 0.$$

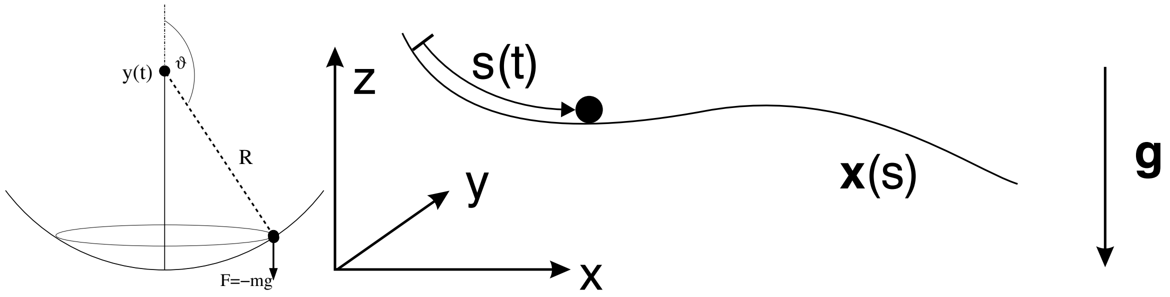


Abbildung 4.1: Links: Das sphärische Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt. Rechts: Die Achterbahn ist mathematisch äquivalent zum geführten Fall auf einer Schiene.

Also bleibt nur ein Freiheitsgrad übrig ($f = 1$).

**Virtuelle Verschiebungen**

"Virtuelle Verschiebungen" (auch virtuelle Verrückungen genannt ) zur Zeit $t$ sind kleine Änderungen der Koordinaten, welche mit den Zwangsbedingungen vereinbar sind. Beim sphärischen Pendel wäre dies eine Auslenkung der Winkel (bei konstantem $r = R$):

$$(r, \vartheta, \varphi) \;\mapsto\; (r, \vartheta + \delta\vartheta, \varphi + \delta\varphi).$$

Bei der Achterbahn wäre dies eine Änderung der Koordinaten $(x, y, z)$ mit

$$(x, 0, z) \;\mapsto\; (x + \delta x, 0, z + \delta z)$$

mit

$$f(x, z) = 0, \qquad \text{und} \qquad f(x + \delta x, z + \delta z) = 0.$$

Es ist klar, dass im letzteren Falle die "virtuellen Verschiebungen" $\delta x$ und $\delta z$ nicht voneinander unabhängig sein können. Per Definition sind jedoch die generalisierten Koordinaten $(q_1 \dots q_f)$ voneinander unabhängig (Freiheitsgrade). Damit ist jede Verschiebung der Form

$$\delta\vec{x}_i \;=\; \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial\vec{x}_i(q,t)}{\partial q_\alpha}\,\delta q_\alpha \tag{4.2}$$

für alle $\{\delta q_\alpha\}$ eine zulässige virtuelle Verschiebung. Die Bezeichnung "virtuell" besagt hier, dass diese Verschiebung nicht durch die Dynamik (Bewegungsgleichungen) verursacht wird, sondern zeitgleich als Gedankenexperiment geschieht.

**Zwangskräfte**

Die “virtuelle Arbeit” ist durch

$$\delta A \;=\; \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{x}_i \;=\; \sum_i \vec{F}_i \cdot \sum_\alpha \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = \sum_\alpha \underbrace{\left(\sum_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{F}_i\right)}_{Q_\alpha} \delta q_\alpha \qquad (4.3)$$

gegeben, wobei $\vec{F}_i$ die augenblickliche Kraft auf das Teilchen $i$ ist. Die $Q_\alpha$ sind die generalisierten Kräfte. “Zwangskräfte” sind per Definition Kräfte, die keine virtuelle Arbeit leisten, da virtuelle Verschiebungen in Richtung einer Zwangskraft per Definition nicht möglich sind. In Beispiel 1 ist die Fadenspannung eine Zwangskraft, in Beispiel 2 die Kräfte, welche das Teilchen auf der vorgegebenen Bahn halten.
Zwangskräfte können á priori nicht angegeben werden, da sie als “Reaktionskräfte” auf die Bewegung des Systems entstehen. Es ist daher wichtig, Bewegungsgleichungen für Systeme mit Zwangsbedingungen zu finden, in welchen die Zwangskräfte gar nicht erst vorkommen. Solche Bewegungsgleichungen sind die →Lagrange-Gleichungen für den Fall von Potentialkräften bzw. die d’Alembert’schen Gleichungen im allg. Fall.

## 4.2 Das d’Alembertsche Prinzip

Zu jedem Zeitpunkt $t$ wirkt auf das Teilchen $i$ die Kraft $\vec{F}_i$, die sich aus

$$\vec{F}_i \;=\; \vec{K}_i + \vec{Z}_i$$

der Zwangskraft $\vec{Z}_i$ und der dynamischen Kraft $\vec{K}_i$ zusammensetzt. Nur die dynamische Kraft trägt zur Bewegung (Beschleunigung) des Teilchens bei. Ziel ist es, die Zwangskräfte aus den Newton’schen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{p}}_i \;=\; \vec{F}_i \;=\; \vec{K}_i + \vec{Z}_i$$

zu eliminieren. Hierfür benutzen wir, dass

$$\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{x}_i \;=\; 0 \qquad\qquad (i = 1 \ldots N)$$

ist, die Zwangskräfte also keine Arbeit verrichten. Folgedessen enthält die virtuelle Arbeit (4.3)

$$\delta A \;=\; \sum_i (\vec{K}_i + \vec{Z}_i)\cdot\delta\vec{x}_i \;=\; \sum_i \vec{K}_i\cdot\delta\vec{x}_i \;=\; \sum_\alpha Q_\alpha \delta q_\alpha$$

keine Zwangskräfte, was wir im folgenden verwenden werden.
Wir gehen von den Newton'schen Bewegungsgleichungen aus und multiplizieren sie mit zulässigen virtuellen Verschiebungen $\delta\vec{x}_i$. Wir erhalten so das "d'Alembert'sche Prinzip"

$$\sum_i \left(\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i\right)\cdot\delta\vec{x}_i \;=\; 0, \tag{4.4}$$

welches wir nun auf verallgemeinerte Koordinaten transformieren wollen.

**Generalisierte Koordinaten**

Ziel ist es, aus (4.4) einen Ausdruck der Form

$$\sum_\alpha g_\alpha(q,\dot{q},t)\,\delta q_\alpha \;=\; 0 \tag{4.5}$$

zu erhalten. Da alle $\delta q_\alpha$ zulässige virtuelle Verschiebungen sind (z.B. auch $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_\beta = 0$ für $\beta = 2\ldots f$), muss dann jeder einzelne Summand in (4.5) verschwinden und aus (4.5) könnten wir dann sofort folgern

$$g_\alpha(q,\dot{q},t) \;=\; 0 \qquad\qquad (\alpha = 1,\ldots f). \tag{4.6}$$

Dies wären dann die gewünschten $f$ unabhängigen Bewegungsgleichungen für unsere $f$ Freiheitsgrade.
Für die Transformation auf generalisierte Koordinaten verwenden wir

$$\delta A \;=\; \sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{x}_i \;=\; \sum_\alpha Q_\alpha\delta q_\alpha$$

(Definition der verallgemeinerten Kräfte $Q_\alpha$) und

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i\cdot\delta\vec{x}_i \;=\; \sum_i \dot{\vec{p}}_i\cdot\sum_\alpha \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \;=\; \sum_\alpha\left(\sum_i \dot{\vec{p}}_i\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha.$$

Das d'Alembert'sche Prinzip (4.4) wird somit zu

$$\sum_\alpha \left( \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha \right) \delta q_\alpha \ = 0 \ . \tag{4.7}$$

Hieraus könnten wir sofort die Bewegungsgleichungen

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1 \dots f) \tag{4.8}$$

ablesen. Dieses Ergebnis befriedigt uns jedoch noch nicht und in der Tat kann man die Bewegungsgleichungen auf eine schönere Form bringen. Man kann zeigen (kommt gleich), dass

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \ = \ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \tag{4.9}$$

ist, wobei

$$T \ = \ \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 \ = \ T(q, \dot{q}, t)$$

die kinetische Energie (in generalisierten Koordinaten) ist. Damit werden (4.8) zu den "d'Alembertschen Gleichungen"

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha \ = \ 0} \qquad (\alpha = 1 \dots f). \tag{4.10}$$

Diese Bewegungsgleichungen sind nun schon sehr viel nützlicher, da es häufig leicht ist, die kinetische Energie in generalisierten Koordinaten anzugeben.
Es bleibt (4.9) herzuleiten. Wir beginnen mit der rechten Seite und verwenden $T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \ = \ \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_\alpha}$$

Wir verwenden nun

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{d}{dt} \vec{x}_i = \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_\alpha}$$

und erhalten somit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_i m_i \left( \ddot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} + \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_\alpha},$$

also (4.9) mit $\dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{x}}_i$.

## 4.3 Lagrange-Funktion

Die d'Alembert'schen Gleichungen (4.10) gelten allgemein, auch für Kräfte, die kein Potential haben. Für den Fall von Potentialkräften,

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1 \ldots f),$$

können wir die "Lagrange-Funktion"

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

definieren, und die d'Alembert'schen Gleichungen werden dann zu den "Lagrange-Gleichungen"

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0} \qquad (\alpha = 1 \ldots f). \tag{4.11}$$

Jedes System, welches in dieser Weise durch eine Lagrange-Funktion beschrieben werden kann, heißt ein "Lagrange'sches System".

### Verallgemeinerten Impuls

Die Lagrange-Gleichungen (4.11) legen nahe, dass es sinnvoll ist, zu jeder verallgemeinerten Koordinate $q_\alpha$ einen "verallgemeinerten Impuls" $p_\alpha$ via

$$\boxed{p_\alpha \equiv \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_\alpha}}$$

zu definieren, denn dann kann man die Lagrange-Gleichungen in der Form $\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ schreiben. Natürlich sind die Lagrange-Gleichungen bei

Wegfall von Zwangsbedingungen mit den Newton'schen Gleichungen identisch.

**Beispiel: Sphärisches Pendel**

Spährisches Pendel (Aufhängepunkt fest) im Schwerefeld. Die beiden generalisierten Koordinaten sind $\varphi$ und $\vartheta$, die Lagrange-Funktion

$$L(\varphi,\vartheta;\dot\varphi,\dot\vartheta) \;=\; \frac{1}{2}mR^2\left(\dot\vartheta^2+\dot\varphi^2\,\sin^2\vartheta\right)-mgR\cos\vartheta$$

kann man unter Verwendung der Transformationsgleichungen

$$x=R\cos\varphi\sin\vartheta, \qquad y=R\sin\varphi\sin\vartheta, \qquad z=R\cos\vartheta$$

aus $L=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)-mgz$ herleiten (Übung). Die beiden Lagrange Gleichungen lauten demnach

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta}-\frac{\partial L}{\partial\vartheta}=0.$$

**Beispiel: Geladenes Teilchen**

Für ein geladenes Teilchen (mit Ladung $e$) in einem äußeren elektrischen und magnetischen Feld sind die Kräfte keine Potentialkräfte. Trotzdem gibt es eine Lagrange-Funktion:

$$L(\vec x,\dot{\vec x},t) \;=\; \frac{1}{2}m\,\dot{\vec x}^2-e\left(\phi(\vec x,t)-\frac{1}{c}\,\dot{\vec x}\cdot\vec A(\vec x,t)\right). \tag{4.12}$$

Dabei sind $\phi(\vec x,t)$ und $\vec A(\vec x,t)$ die elektromagnetischen Potentiale und

$$\vec B=\mathrm{rot}\vec A; \qquad \vec E=-\mathrm{grad}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec A}{\partial t}$$

die Komponenten des elektromagnetischen Feldes. (Bemerkung: Die Möglichkeit $\vec E$ und $\vec B$ so darzustellen wird durch die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen $\mathrm{div}\vec B=0$ und $\mathrm{rot}\vec E+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t}=0$ gegeben, siehe $\rightarrow$Elektrodynamik.)

Die zu (4.12) gehörenden Lagrange-Gleichungen lauten ($k = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(m\dot{x}_k + \frac{e}{c}A_k\Big) &= m\ddot{x}_k + \frac{e}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{e}{c}\sum_i \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\dot{x}_i \\ &= -e\frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \frac{e}{c}\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

oder

$$m\ddot{x}_k = e\underbrace{\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t}\right)}_{E_k} + \frac{e}{c}\underbrace{\sum_i \dot{x}_i\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right)}_{(\dot{\vec{x}}\times\vec{B})_k},$$

was genau der Lorentz-Kraft (siehe §1.4) entspricht.

**Beispiel: Massenpunkt auf rotierender Stange**

Ein Massenpunkt bewege sich radial auf einer rotierenden Stange,

$$x = r(t)\cos\omega t, \qquad y = r(t)\sin\omega t, \qquad z = 0,$$

in Abwesenheit eines externen Potentials. Die kinetische Energie schreibt sich in der generalsierten Koordinaten $r$ als

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) =$$

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) + \frac{m}{2}r^2\omega^2((-\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2)$$

und die Lagrange-Funktion somit als

$$L(\dot{r}, r) = T = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\omega^2.$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - m\omega^2 r = 0, \qquad \ddot{r} = \omega^2 r,$$

mit der Lösung

$$r(t) = a_1 \mathrm{e}^{\omega t} + a_2 \mathrm{e}^{-\omega t}.$$

Wir finden also einen exponentiellen Verlauf.
**Frage**: Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit der Massenpunkt nicht nach außen geschleudert wird?

## 4.4 Prinzip der kleinsten Wirkung

Als "Wirkung" $I$ definiert man die zeitlich integrierte Lagrange-Funktion

$$I[q] \;=\; \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt. \tag{4.13}$$

Die Wirkung ist ein "Funktional" von $q = -q(t)$, da für jede Bahnkurve (physikalisch oder nicht) $I[q]$ einen anderen Wert hat. Man betrachte nun alle die Bahnkurven $q(t)$, welche "festen Randbedingungen" genügen, das heißt für welche

$$q(t^{(1)}) = q^{(1)} \qquad \text{und} \qquad q(t^{(2)}) = q^{(2)},$$

für feste $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ gilt. Man schreibt (4.13) dann auch symbolisch in der Form

$$\boxed{I[q] \;=\; \int_{(1)}^{(2)} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt} \;,$$

wobei die Integralgrenzen die festen Randbedingungen andeuten sollen. Das "Prinzip der kleinsten Wirkung" (Hamilton'sche Extremalprinzip) besagt nun, dass unter allen möglichen Bahnkurven $q(t)$ die physikalisch realisierte diejenige ist, welche die Wirkung $I[q]$ minimisiert (extremal macht). Hierbei ist als "physikalische Bahnkurve" diejenige definiert, welche die Lagrange-Gleichungen erfüllt.
Für den Beweis ist die →Variationsrechnung nötig, da man allgemein mit $\delta I[q]$ die Variation eines Funktionals bezeichnet, also die "Ableitung" von $I[q]$ nach der Bahnkurve $q(t)$. Das Hamilton'sche Extremalprinzip besagt nun, dass

$$\boxed{\delta I[q(t)] \;=\; 0} \tag{4.14}$$

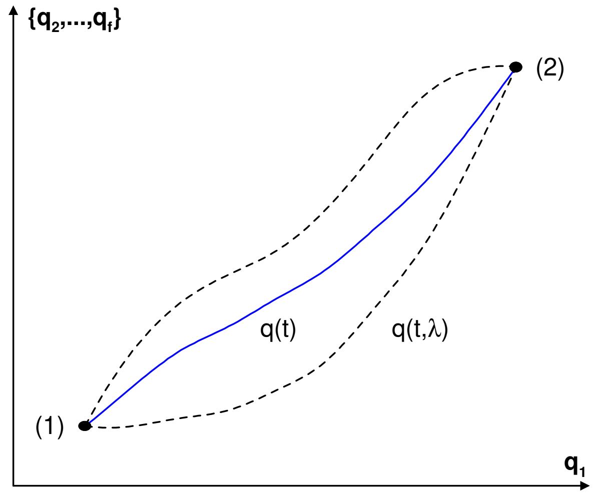


Abbildung 4.2: Variation der Bahn im Raum der verallgemeinerten Koordinaten.

ist. Da man nicht gut nach $q(t)$ differenzieren kann, betrachtet man in der Variationsrechnung eine ein-parametrige Schar von Bahnkurven,

$$q(t,\lambda)$$

wobei man die funktionale Abhängigkeit vom Parameter $\lambda$ zu diesem Zeitpunkt offen lässt, um jede mögliche Bahnkurve mit $q(t,\lambda) = (q_1(t,\lambda),\dots,q_f(t,\lambda))$ beschreiben zu können. O.B.d.A. können wir jedoch annehmen, dass die physikalische Bahn für $\lambda = 0$ realisiert wird. Damit wird das Hamilton'sche Prinzip (4.14) zu

$$\delta I[q(t)] = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d}{d\lambda} I[q(t,\lambda)]\Big|_{\lambda=0} = 0, \tag{4.15}$$

einer einfachen Rechenaufgabe im Differenzieren.

**Variation**

Wir führen die Variation nun aus.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda}\int_{(1)}^{(2)} L\left(q(t,\lambda), \frac{\partial q}{\partial t}(t,\lambda), t\right) dt\Big|_{\lambda=0} \\ &= \int_{(1)}^{(2)} dt \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\frac{\partial q_\alpha}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial t \partial \lambda}\right)_{\lambda=0}. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Bezeichnungen $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}$ und $\delta q_\alpha = \frac{\partial q_\alpha}{\partial \lambda}|_{\lambda=0}$ und integrieren den zweiten Summanden partiell. Wir erhalten

$$0 \;=\; \sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha \Big|_{(1)}^{(2)} \;+\; \int_{(1)}^{(2)} dt \sum_\alpha \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} p_\alpha \right) \delta q_\alpha \qquad (4.16)$$

Nun verschwindet wegen der festen Randbedingungen die Variation der Bahn an Anfangs/End-Punkt:

$$\delta q_\alpha(t^{(j)}) = \frac{d}{d\lambda} q_\alpha(t^{(j)}, \lambda)\Big|_{\lambda=0} \equiv \frac{d}{d\lambda} q_\alpha^{(j)}\Big|_{\lambda=0} = 0 \qquad (j = 1, 2).$$

Damit wird der erste Term auf der rechten Seite von (4.16) zu Null. Ferner bemerken wir, dass wir bisher beliebige Variationen $\delta q_\alpha(t)$ der Bahn zugelassen haben, die mit den Randbedingungen konsistent sind. Insbesondere könnten wir z.B. $\delta q_1(t) = \delta(t - t_0)$ und $\delta q_\beta(t) = 0$ für $\beta = 2 \ldots f$ wählen (mit $t^{(1)} < t_0 < t^{(2)}$ beliebig und $\delta(t - t_0)$ der Dirac'schen Delta-Funktion). Somit ist klar, dass die Klammer auf der rechten Seite von (4.16) für alle Zeiten $t$ und alle $\alpha = 1 \ldots f$ separat verschwinden muss. Also erfüllt die Extremalbahn die "Euler-Lagrange-Gleichungen"

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0} \qquad (\alpha = 1 \ldots f),$$

welche mit den Lagrange-Gleichungen (4.11) identisch sind.

## Äquivalenz-Transformationen

Aus dem Hamilton'schen Prinzip folgt unmittelbar, dass zwei Lagrange-Funktionen $L$ und $L'$ äquivalent sind, falls

$$L - L' = \frac{d}{dt} F(q, t)$$

ist, denn in diesem Fall unterscheiden sich die zugehörigen Wirkungen

$$I[q] - I'[q] = \int_{(1)}^{(2)} \frac{d}{dt} F(q, t) dt = F(q, t)\Big|_{(1)}^{(2)} = \text{const.}$$

nur durch eine Konstante, da die $t^{(i)}$ und die $q^{(i)} = q(t^{(i)}$ fest sind. Dann sind ihre Variationen $\delta I[q] - \delta I'[q] = \delta(\text{const.}) = 0$ gleich. Nach dem Hamilton'schen Prinzip (4.14) führen somit äquivalente Lagrange-Funktionen auf identische Bewegungsgleichungen.

**Beispiel: Eichtransformation**

Als Beipiel betrachten wir die Largrange-Funktion für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld. Das Vektorpotential $\vec{A}$ und das skalare Potential $\phi$ sind nicht eindeutig bestimmt, da eine "Eichtransformation"

$$\vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\chi; \qquad \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}$$

die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht ändert ($\chi = \chi(\vec{x}, t)$ beliebig). Da eine Eichtransformation die physikalischen elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht ändert, müssen die Lagrange-Funktionen vor und nach der Eichtransformation äquivalent sein:

$$L' = L + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \mathrm{grad}\chi\right) = L + \frac{e}{c}\frac{d\chi}{dt}$$

## 4.5 Erhaltungssätze

Falls eine Koordinate $q_\beta$ in $L$ nicht vorkommt, so ist der dazugehörige verallgemeinerte Impuls $p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}$ erhalten, denn nach den Lagrange-Gleichungen ist dann

$$\frac{d}{dt} p_\beta = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial L}{\partial q_\beta} = 0. \tag{4.17}$$

**Beispiel: Ebene Zentralkraft**

Zum Beispiel ist

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

die Lagrange-Funktion in Polarkoordinaten für das ebene Zentralkraftproblem. Da $\varphi$ in $L$ nicht vorkommt, ist

$$p_\varphi \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \;=\; m\, r^2 \dot\varphi \tag{4.18}$$

erhalten: $p_\varphi$ ist der Drehimpuls.
Die Voraussetzung, dass $L$ nicht von $q_\beta$ abhängt, gilt aber nur in passend gewählten Lagekoordinaten. Im obigen Beispiel ist etwa die Drehimpulserhaltung in kartesischen Koordinaten $(x, y, z = 0)$ nicht evident, da dann die Lagrange-Funktion

$$L \;=\; \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2\right) - V(\sqrt{x^2+y^2})$$

sowohl von $x$ wie von $y$ abhängt. Trotzdem sollte es möglich sein, die Drehimpulserhaltung auch in diesem Fall zu erhalten. Dies ist mittels Symmetrieüberlegungen möglich, wie im folgenden gezeigt werden wird.

**Beispiel: Symmetrietransformation**

Falls die Lagrange-Funktion invariant unter einer Schar von Transformationen

$$\phi^\lambda : \begin{cases} q_\beta \mapsto q_\beta + \lambda & \\ q_\alpha \mapsto q_\alpha & \text{für} \quad \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{4.19}$$

ist, dann ist $L$ offensichtlich von $q_\beta$ unabhängig ($0 = \partial L/\partial\lambda \;\Leftrightarrow\; 0 = \partial L/\partial q_\beta$) und somit nach (4.17) $p_\beta$ erhalten. Die Abbildung (4.19) können wir nun verallgemeinern.

**Flüsse und Vektorfelder**

Wir definieren als einen "Fluss" eine ein-parametrige Schar $\phi^\lambda$ von Abbildungen

$$q \mapsto \phi^\lambda(q), \qquad q(\lambda) = \phi^\lambda(q)$$

(in Komponenten: $q_\alpha \mapsto \phi^\lambda_\alpha(q)$) mit den Eigenschaften:

$$\phi^0 = \text{Identität}; \qquad \phi^\lambda \cdot \phi^\mu = \phi^{\lambda+\mu}. \tag{4.20}$$

Jeder Fluss definiert ein "Vektorfeld" (Geschwindigkeitsfeld einer Strömung)

$$v(q) \;=\; \frac{d}{d\lambda}\phi^\lambda(q)\Big|_{\lambda=0}. \tag{4.21}$$

**Satz von Noether**

Falls eine Lagrange-Funktion $L$ eines autonomen (abgeschlossenen) Systems unter einem Fluss $\phi^\lambda$ invariant ist, so ist

$$\boxed{\sum_\alpha p_\alpha v_\alpha(q)} \tag{4.22}$$

erhalten.
Beweis: Wir bemerken, dass sich $\dot q$ unter dem Fluss $\phi^\lambda$ wie

$$\dot q \;\mapsto\; \dot\phi^\lambda(q) \;=\; \frac{d}{dt}\phi^\lambda(q)$$

transformiert. Nach Voraussetzung ist $L$ invariant, also

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \frac{d}{d\lambda}L(\phi^\lambda(q),\dot\phi^\lambda(q))\Big|_{\lambda=0} \;=\; \sum_\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\frac{d\phi^\lambda}{d\lambda}+\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\frac{d\dot\phi^\lambda}{d\lambda}\right]_{\lambda=0}\\
&=\; \sum_\alpha\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}\right)\frac{d\phi^\lambda}{d\lambda}+\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\frac{d}{dt}\frac{d\phi^\lambda}{d\lambda}\right]_{\lambda=0} \;=\; \frac{d}{dt}\sum_\alpha \underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}}_{p_\alpha}\underbrace{\frac{d\phi^\lambda}{d\lambda}}_{v_\alpha}\Big|_{\lambda=0}\\
&=\; \frac{d}{dt}\sum_\alpha p_\alpha v_\alpha(q).
\end{aligned}$$

**Beispiel: Ebene Zentralkraft**

Die Lagrange-Funktion vom ebenen Zentralkraftproblem ist in kartesischen Koordinaten

$$L \;=\; \frac{m}{2}\left(\dot x^2+\dot y^2\right)-V(\sqrt{x^2+y^2}).$$

$L$ ist invariant unter dem Fluss $\phi^\lambda(x,y) \;=\; (\phi^\lambda_x(x,y),\phi^\lambda_y(x,y))$ der Rotationen um die $z$-Achse um den Winkel $\lambda$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \phi_x^\lambda(x,y) \\ \phi_y^\lambda(x,y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\lambda + y\sin\lambda \\ -x\sin\lambda + y\cos\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \tag{4.23}$$

Das Integral der Bewegung (4.22) ist dann (mit $\alpha = x, y$):

$$\sum_\alpha p_\alpha v_\alpha(q) = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{d\lambda} \phi_\alpha^\lambda(q)\Big|_{\lambda=0} = m\dot{x} \underbrace{(+y)}_{v_x} + m\dot{y} \underbrace{(-x)}_{v_y} .$$

In anderen Worten: Der Drehimpuls $m(x\dot{y} - y\dot{x})$ ist erhalten. Das wussten wir schon von (4.18), doch der Satz von Noether erlaubt es uns, die Erhaltungssätze in beliebigen Koordinatensystemen herzuleiten und die wichtige Verbindung mit den damit verbundenen Symmetrien aufzudecken.

**Beispiel: N-Teilchen-System**

Die Lagrange-Funktion von einem autonomen $N$-Teilchen-System

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N)$$

ist invariant unter dem Fluss der Translationen entlang einer beliebigen Richtung $\hat{e}$:

$$\phi^\lambda : \vec{x}_i \mapsto \vec{x}_i + \lambda \hat{e}.$$

Dann ist mit $\vec{v} = \hat{e}$ der Schwerpunktimpuls entlang der $\hat{e}$ Richtung,

$$\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{v} = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \hat{e},$$

erhalten.

## 4.6 Infinitesimale Erzeugende

Ein kleiner Exkurs (wichtig für die →Quantenmechanik). Für einen (infinitesimal) kleinen Winkel $\Delta\lambda$ wird die Matrix (4.23) für Drehungen um die $z$-Achse zu

$$\begin{pmatrix} \phi_x^{\Delta\lambda}(x,y) \\ \phi_y^{\Delta\lambda}(x,y) \\ \phi_z^{\Delta\lambda}(x,y) \end{pmatrix}_{\Delta\lambda \ll 2\pi} \approx \begin{pmatrix} x & y\Delta\lambda & 0 \\ -x\Delta\lambda & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\lambda & 0 \\ -\Delta\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei wir die invariante Koordinate $z \mapsto z$ mitgenommen und $\cos\lambda \approx 1 - \lambda^2/2$ sowie $\sin\lambda \approx \lambda - \lambda^3/6$ verwendet haben. Wir definieren nun

$$\begin{pmatrix} 1 & \Delta\lambda & 0 \\ -\Delta\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \Delta\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \underline{1} + \Delta\lambda\, \underline{J}_z \,.$$

Man bezeichnet die antisymmetrische Matrix $\underline{J}_z$ als "infinitesimale Erzeugende" für Drehungen um die $z$-Achse (in der Quantenmechanik wird $\underline{J}_z$ der Drehimpulsoperator (Operator $\simeq$ Matrix) sein).

**Exponentialdarstellung**

Wegen der Gruppeneigenschaft (4.20) von einparametrigen Flüssen kann man eine Drehung um einen Winkel $\lambda$ durch Hintereinanderschalten von $N$ Drehungen um den Winkel $\Delta\lambda = \lambda/N$ erreichen. Für große $N$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi^\lambda &= \lim_{N\to\infty} \underbrace{(\underline{1} + \Delta\lambda\, \underline{J}_z)(\underline{1} + \Delta\lambda\, \underline{J}_z)\ldots(\underline{1} + \Delta\lambda\, \underline{J}_z)}_{\text{N Terme}}\, \vec{x} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\underline{1} + \frac{\lambda}{N}\, \underline{J}_z\right)^N \vec{x} \;=\; \mathrm{e}^{\lambda \underline{J}_z}\, \vec{x}, \end{aligned}$$

wobei die Exponentialfunktion einer Matrix durch ihre Taylorreihe $\mathrm{e}^{\lambda \underline{J}_z} = \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} \underline{J}_z^n$ definiert ist.

**Allgemeine Drehungen**

Man kann diese Formel verallgemeinern (ohne Beweis). Nehmen wir an, wir wollen um eine Achse $\hat{e}$ eine Drehung um den Winkel $\varphi$ durchführen. Man kann nun zeigen, dass diese Drehung durch

$$\vec{x} \;\mapsto\; \mathrm{e}^{\vec{\varphi}\cdot \underline{\vec{J}}}\, \vec{x}$$

gegeben ist mit $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{\varphi} = \varphi\hat{e}$ und den Erzeugenden

$$\underline{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{J}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere erfüllt die Transformation $R(t)\vec{x} \equiv \mathrm{e}^{t\vec{\omega}\cdot\vec{\underline{J}}}\,\vec{x}$ die Gleichung

$$R^T \dot{R}\,\vec{x} \;=\; \underbrace{R^T R}_{=\mathbf{1}}(\vec{\omega}\cdot\vec{\underline{J}})\,\vec{x} \;=\; -\vec{\omega}\times\vec{x},$$

siehe §1.7 (beachte die andere Definition (Vorzeichen) von $\vec{\omega}$ in §1.7)

## 4.7 Energieerhaltung

Aus den Lagrange-Gleichungen folgt

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right) = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_\alpha (\dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha + p_\alpha \ddot{q}_\alpha) \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha .\end{aligned}$$

Falls also die Variable $t$ in $L$ nicht explizit vorkommt, so ist

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L} \quad \text{erhalten.}$$

Man kann diesen Erhaltungssatz auch mit dem Satz von Noether in Zusammenhang bringen, indem man mit $t = q_0$ die Zeit als zusätzliche Variable betrachtet und die Invarianz der Lagrange-Funktion unter Translationen in der Zeit betrachtet. Falls also die Lagrange-Funktion von der Wahl des Zeitnullpunktes unabhängig ist, dann ist die verallgemeinerte Energie $\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$ erhalten.

**Beispiel**

Wir betrachten eine Lagrange-Funktion der Form

$$L \;=\; T(q,\dot{q}) - V(q) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \;-\; V(q)\;,$$

wobei die kinetische Energie also eine homogene, quadratische Form in $\dot{q}_1 \ldots \dot{q}_f$ ist (allgemeiner Fall). Also ist

$$\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha \;=\; \sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha \;=\; 2T,$$

und unsere Erhaltungsgröße ist die Gesamtenergie:

$$\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \;=\; 2T - (T-V) \;=\; T+V$$

**Beispiel**

Für ein Teilchen in einem statischen äußeren elektromagnetischen Feld (4.12) ist (Übung)

$$\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \;=\; \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + e\phi(\vec{x})$$

die erhaltene Gesamtenergie. Fragen:

- Warum kommt in der Gesamtenergie das Magnetfeld $\vec{B}$, bzw. das Vektorpotential $\vec{A}$ nicht vor?
- Wie lautet der generalisierte Impuls $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}$?

## 4.8 Prinzip von Euler-Maupertuis

Das Prinzip von Hamilton besagte, dass die Variation der Wirkung $I[q(t)] = \int_{(1)}^{(2)} L\,dt$ für die physikalische Bahn $q(t)$ verschwindet. Dabei waren für die Variation nur solche Bahnen zugelassen, für welche bei festen Anfangs- und Endzeiten $t^{(1)}, t^{(2)}$ die Endpunkte der Bahn, $q^{(1)} = q(t^{(1)})$ und $q^{(2)} = q(t^{(2)})$ fest vorgegeben waren.

**Variation der Endzeiten**

Wir wollen nun die Klasse der zugelassenen Bahnen verallgemeinern: Der Anfangs/Endpunkt der Bahn, $q_1$ und $q_2$ sollen immer noch fest vorgegeben sein, doch dem System wird jetzt erlaubt, zu einer *beliebigen* Zeit $t^{(1)}$ zu starten und zu einer beliebigen Zeit $t^{(2)}$ anzukommen. Damit ist $t^{(1)} = t^{(1)}(\lambda)$ und $t^{(2)} = t^{(2)}(\lambda)$ für eine beliebige Bahn $q(t,\lambda)$. Wir betrachten die Variation der Endpunkte

$$\Delta t^{(j)} = \frac{dt^{(j)}(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}, \qquad \delta q_\alpha^{(j)} = \frac{dq_\alpha(t^{(j)},\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}, \qquad (j=1,2)$$

$$\Delta q_\alpha^{(j)} \; = \; \frac{d}{d\lambda} q_\alpha(t^{(j)}(\lambda),\lambda)\Big|_{\lambda=0} \; = \; \delta q_\alpha^{(j)} + \dot q_\alpha \Delta t^{(j)}\, . \tag{4.24}$$

Wir berechnen nun, analog zu (4.16), die Variation

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} L\, dt \; = \; L\Delta t\Big|_{(1)}^{(2)} + \sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha\Big|_{(1)}^{(2)} + 0$$

$$= \Big[\sum_\alpha p_\alpha \Delta q_\alpha - (\sum_\alpha p_\alpha \dot q_\alpha - L)\Delta t\Big]_{(1)}^{(2)} = -E\Delta t\Big|_{(1)}^{(2)} = -\delta \int_{(1)}^{(2)} E\, dt,$$

wobei wir (4.24) verwendet haben, mit der Annahme, dass die Gesamtenergie $E = \Sigma_\alpha p_\alpha \dot q_\alpha - L$ erhalten ist, und dass die Endpunkte der Bahn fest sind, also $\Delta q_\alpha\big|_{(1)}^{(2)} = 0$. Mit $E = T + V$ finden wir

$$0 \; = \; \delta \int_{(1)}^{(2)} (L+E)\, dt \; = \; \delta \int_{(1)}^{(2)} (T - V + T + V)\, dt \; = \; \delta \int_{(1)}^{(2)} 2T\, dt. \tag{4.25}$$

**Metrischer Tensor**

Wir nehmen nun an, dass die kinetische Energie eine positiv definite quadratische Form ist,

$$T \; = \; \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q) \dot q_\alpha \dot q_\beta \qquad \text{mit} \qquad T(q,\dot q) > 0, \qquad \forall q, \dot q\ .$$

Im Konfigurationsraum definieren wir nun durch

$$ds^2 \; = \; \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q) dq_\alpha dq_\beta \tag{4.26}$$

das Bogenelement $ds$ eine Metrik. Im $\mathrm{R}^3$ ist das Bogenelement in karthesischen Koordinaten durch $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ gegeben und der metrische Tensor ist $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ (mit $\alpha, \beta = x, y,$). Im $R^2$ ist das Bogenelement in ebenen Polarkoordinaten durch $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$ gegeben und der metrische Tensor ist $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ (mit $\vec{q} = (r, \phi)$).

**<u>Geometrie der Bahnkurve</u>**

Die Bogenlänge einer Kurve $q(t)$ ist durch

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q) \frac{dq_\alpha}{dt}\frac{dq_\beta}{dt} \tag{4.27}$$

bestimmt. Also haben wir

$$ds = \sqrt{\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta}\, dt = \sqrt{2T}\, dt = \sqrt{2(E - V(q))}\, dt. \tag{4.28}$$

Es gilt also allgemein: Für eine Bewegung zu fester Energie $E$ bestimmt die geometrische Gestalt der Bahnkurve im Konfigurationsraum via (4.28) auch den zeitlichen Durchlauf, denn $dt = ds/\sqrt{2(E - V(q))}$ (Vergleiche auch §2.1).

Die geometrische Gestalt der Bahn lässt sich aus einem Variationsprinzip gewinnen, dem Prinzip von "Euler-Maupertuis":

$$\boxed{\delta \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{E - V(q)}\, ds = 0}\,, \tag{4.29}$$

wobei wir Gleichung (4.25) und (4.28) verwendet haben (denn $2T dt = \sqrt{2T} ds = \sqrt{2(E - V)} ds$). Die Variation ist hierbei bei festen Endpunkten der Bahn im Konfigurationsraum auszuführen.

Bemerke:

In (4.29) kommt die Zeit nicht mehr vor und $ds$ ist durch (4.26) als Funktion der $dq_\alpha$ gegeben. Alternativ kann man hier $s$ auch als Kurvenparameter auffassen, also $q_\alpha = q_\alpha(s)$ betrachten, wobei $s$ in der Metrik (4.26) die Länge der Kurve $q(s)$ ist.

**Beispiel: Geodätische Linien**

Für $V(q) = 0$ ist $\delta \int_{(1)}^{(2)} ds = 0$, d.h. die Bahnen zu jeder Energie $E$ sind durch die kürzeste Verbindung (geodätische Linien in der Metrik (4.26)) zwischen den beiden Punkten $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ gegeben. Die Bewegung findet also auf Geraden (im freien Raum) oder Großkreisen (auf einer Kugel) statt.

**Fermat'sche Prinzip**

Die Lagrange-Funktion für ein Teilchen im einem Potential $V(\vec{x})$ ist

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}).$$

Die Metrik (4.26) ist dann (bis auf unwesentliche Zahlenfaktoren) die gewöhnliche euklidische Metrik im $R^3$ und das Variationsprinzip lautet

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \underbrace{\sqrt{E - V(\vec{x})}}_{\equiv n(\vec{x})} \, ds = 0. \tag{4.30}$$

Fasst man $n(\vec{x})$ als Brechungsindex eines optisch inhomogenen Mediums auf, so ist dies das "Fermat'sche Prinzip für die Lichtstrahlen".

**Strahlengleichungen**

Um die Variation von (4.30) ausführen zu können müssen wir noch eine kleine Schwierigkeit überwinden, die darin besteht, dass das Integral $\int(\ldots)ds$ keine festen Grenzen hat, da ja die geometrische Länge der Bahn á priori nicht festgelegt ist.

Wir führen nun einen Bahnparameter $\tau$ ein, so dass die Bahn $q_\alpha(\tau)$ die Randbedingungen $q^{(j)} = q(\tau^{(j)})$ $(j = 1, 2)$, für feste $\tau^{(j)}$ erfüllt. Nach (4.26) wird dann das Bahnelement wegen $ds^2 = d^2\vec{x}$ $(g_{\alpha\beta} = 1)$ zu

$$ds = \sqrt{\dot{\vec{x}}^2} d\tau \qquad\qquad (\cdot = \frac{d}{d\tau}).$$

Damit wird (4.30) zu

$$\delta \int_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} \underbrace{n(\vec{x})\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}}_{L(\vec{x},\dot{\vec{x}})} \, d\tau = 0 \, .$$

Die Differentialgleichungen für die gesuchten Extremalkurven sind nun nichts anderes als die Lagrange-Gleichungen zur Lagrange-Funktion $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$, d.h.

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}\left(n\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(n\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3),$$

oder

$$\frac{d}{d\tau}\left(n\frac{\dot{x}_k}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}}\right) - \sqrt{\dot{\vec{x}}^2}\,\frac{\partial n}{\partial x_k} \;=\; 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{4.31}$$

Man kann verifizieren, dass (4.31), für $n(\vec{x}) = \sqrt{E - V(\vec{x})}$, zu den Newton'schen Gleichungen $m\ddot{x}_k = -\frac{\partial}{\partial x_k}V(\vec{x})$ äquivalent ist (Übung). Führen wir wieder die Kurvenlänge $s$ als Kurvenparameter ein, so erhalten wir mit $\frac{1}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}}\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{ds}$

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{x}}{ds}\right) - \text{grad}\; n = 0.$$

Dies ist die "Strahlengleichung der geometrischen Optik".

**Übergang zur Quantenmechanik**

Also gibt es eine formale Analogie zwischen der Mechanik eines Massenpunktes in einem Potential $V(\vec{x})$ und der geometrischen Optik (Lichtwellen) in einem Medium mit dem Brechungsindex $n(\vec{x}) = \sqrt{E - V(\vec{x})}$. Diese Analogie kann man als Ausgangspunkt für die Wellenmechanik von Schrödinger benützen, in welcher die Massenpunkte zu Materiewellen werden (siehe die →Quantenmechanik).

## 4.9 Variation mit Nebenbedingungen

Die Lagrange-Gleichungen (4.11) gelten in den generalisierten Koordinaten $(q_1 \ldots q_f)$. In dieser Darstellung sind für ein N-Teilchen-System alle $r = 1 \ldots R$ Zwangsbedingungen der Form

$$g_r(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N) \;=\; 0, \qquad (r = 1 \ldots R)$$

von vornherein berücksichtigt worden. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist

$$f \; = \; 3N - R.$$

Häufig ist es jedoch wünschenswert, die Bewegungsgleichungen in der ursprünglichen Koordinaten $\{\vec{x}_i\}$ zu formulieren und lösen, also

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i \; = \; \vec{K}_i + \vec{Z}_i, \qquad (i = 1 \ldots N), \tag{4.32}$$

wobei wir die Kraft wie in §4.2 aufgeteilt haben:
$\vec{K}_i$ : dynamische Kraft,
$\vec{Z}_i$ : Zwangskraft.
Bei dem Versuch (4.32) zu lösen sieht man sich der Schwierigkeit gegenüber, dass die Zwangskraft als Reaktionskraft á priori nicht bekannt ist. Diese Schwierigkeit lässt sich beheben, da man die Richtung, wenn auch nicht die Stärke der Zwangskräfte á priori berechnen kann. Dazu bemerken wir

**(i)** Die Zwangsbedingungen

$$g_r(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N), \qquad (r = 1 \ldots R) \tag{4.33}$$

definieren im $R^{3N}$ Flächen $F_r$ . Die erlaubten Bahnen liegen in der Schnittmenge aller $R$ Flächen, siehe Abbildung 4.3.

**(ii)** Wir zerlegen die Zwangskräfte in $R$ Komponenten,

$$\vec{Z}_i \; = \; \sum_{r=1}^{R} \vec{Z}_i^{(r)} \; .$$

Die Komponenten $\vec{Z}_i^{(r)}$ sind dabei senkrecht auf den jeweiligen Flächen $F_r$, da sie keine Arbeit leisten.

**(iii)** Für beliebige erlaubte Variationen der Bahn $\delta\vec{x}_i$ gilt

$$0 \; = \; \delta g_r(\vec{x}_i \ldots \vec{x}_N) \; = \; \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g_r}{\partial \vec{x}_i} \cdot \delta\vec{x}_i \; .$$

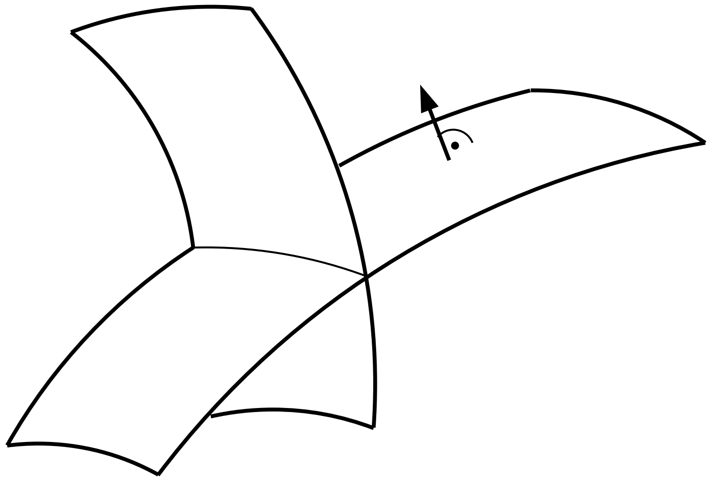

Abbildung 4.3: Illustration von zwei Zwangsbedingungen.

Also ist der Gradient

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} g_r(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N) \quad \perp \quad F_r$$

senkrecht auf der Fläche $F_r$.

**Lagrange-Parameter**

Wir finden also, dass

$$\vec{Z}_i = \sum_{r=1}^{R} \lambda_r(t) \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} g_r(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N), \tag{4.34}$$

wobei wir mit den $\lambda_r(t)$ (unbekannte) Proportionalitätskonstanten eingeführt haben, den sogenannten "Lagrange-Parametern". Damit haben wir eine Möglichkeit gefunden (4.32) zu lösen. Man geht folgendermaßen vor:

Löse die Gleichung

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{K}_i + \sum_{r=1}^{R} \lambda_r \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} g_r(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N), \qquad (i = 1 \ldots N) \tag{4.35}$$

für beliebige Lagrange-Parameter $\lambda_r$ und setze dann die so erhaltenen Lösungen

$$\vec{x}_i(t, \lambda_1 \ldots \lambda_R), \qquad (i = 1 \ldots N)$$

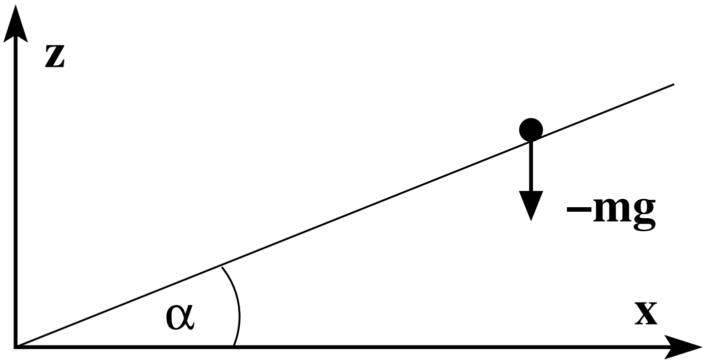


Abbildung 4.4: Massenpunkt auf der schiefen Ebene.

in (4.33) ein und bestimme aus den hieraus resultierenden $R$ Gleichungen die Werte für die Lagrange-Parameter $\lambda_r(t)$.

**Beispiel: Schiefe Ebene**

Wir betrachten die schiefe Ebene mit Steigungswinkel $\alpha$.
Es gilt

$$\sin\alpha/\cos\alpha \;=\; \tan\alpha \;=\; z/x \;,$$

das heißt wir haben die Zwangsbedingung

$$g(x,z) \;=\; x\sin\alpha - z\cos\alpha \;=\; 0 \;.$$

Mit dem Potential $V = gzm$ werden die Euler-Lagrange-Gleichungen (4.35)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} \;&=\; \lambda\frac{\partial g}{\partial x} \;=\; \lambda\sin\alpha \;, \\ m\ddot{z} \;&=\; \lambda\frac{\partial g}{\partial z} - g\lambda m \;=\; -\lambda\cos\alpha - gm \;. \end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned} x(t,\lambda) \;&=\; \frac{\lambda\sin\alpha}{2m}\,t^2 + \dot{x}(0)\,t + x(0), \\ z(t,\lambda) \;&=\; -\frac{\lambda\cos\alpha + gm}{2m}\,t^2 + \dot{z}(0)\,t + z(0). \end{aligned}$$

Wir setzen nun einfachheitshalber

$$x(0) = 0 = \dot{x}(0), \qquad z(0) = 0 = \dot{z}(0)$$

und setzen die Lösung in die Zwangsbedingung ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} x \sin\alpha - z\cos\alpha &= \frac{\lambda \sin\alpha}{2m}\, t^2 \sin\alpha + \frac{\lambda\cos\alpha + gm}{2m}\, t^2 \cos\alpha \\ &= \frac{\lambda}{2m}\, t^2 + \frac{gm\cos\alpha}{2m}\, t^2 = 0. \end{aligned}$$

Nun haben wir den Lagrange-Parameter bestimmt,

$$\lambda \;=\; -gm\cos\alpha,$$

und können diesen Wert in die allgemeine Lösung einsetzen, also

$$\begin{aligned} x(t)\Big|_{\lambda=-gm\cos\alpha} &= -\frac{g}{2}\cos\alpha\sin\alpha\, t^2, \\ z(t)\Big|_{\lambda=-gm\cos\alpha} &= -\frac{g}{2}\underbrace{\left(-\cos^2\alpha + 1\right)}_{\sin^2\alpha}\, t^2. \end{aligned}$$

**Variationsprinzip**

Die Gleichung (4.35) lässt sich aus einem Variationsprinzip ableiten:

$$\delta\int_{(1)}^{(2)} dt L^*(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1 \ldots \dot{\vec{x}}_N) \;=\; 0\ ,$$

mit einer verallgemeinerten Lagrange-Funktion

$$L^* \;=\; L(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1 \ldots \dot{\vec{x}}_N) \;-\; \sum_{r=1}^{R} \lambda_r g_r(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N)\ ,$$

denn die dazugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \;=\; \frac{\partial L^*}{\partial \vec{x}_i}, \qquad\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \;=\; \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i}}_{\vec{K}_i} - \underbrace{\sum_{r=1}^{R} \lambda_r \frac{\partial g_r}{\partial \vec{x}_i}}_{\vec{Z}_i},$$

und sind also mit (4.35) identisch.

## 4.10 Variationsrechnung

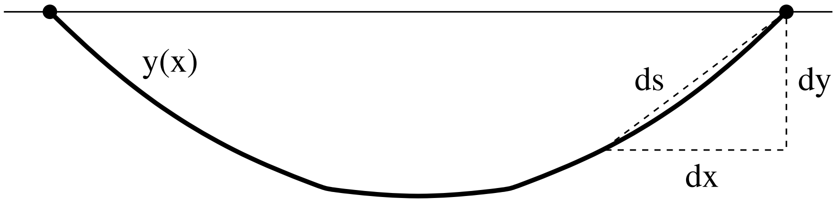


Abbildung 4.5: Die durchhängende Kette im Schwerefeld.

Das Hamilton'sche Extermalprinzip (4.14) ist nur eine physikalische Anwendung einer allgemeinen mathematischen Methode, der "Variationsrechnung". Bei der Varitionsrechnung geht es darum, eine Funktion

$$y(x) \;=\; (y_1(x) \ldots y_N(x))$$

zu finden, welche ein gewisses Funktional

$$I[y] \;=\; \int_{x_0}^{x_1} dx\, F(y, y', x)$$

unter Berücksichtigung gewisser Nebenbedingungen (Zwangsbedingungen)

$$g_r(y, y') \;=\; 0, \qquad\qquad (r = 1 \ldots R)$$

minimiert. Aus den vorhergehenden Betrachtungen wissen wir, dass hierfür das Funktional

$$I^*[y] \;=\; \int_{x_0}^{x_1} dx\, \Big(F(y, y', x) - \sum_r \lambda_r g_r(y, y')\Big) \;\equiv\; \int_{x_0}^{x_1} dx\, F^*(y, y', x)$$

minimal sein muss. Die dazugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen lauten mit ($x \leftrightarrow t$, $y \leftrightarrow q$, $y' \leftrightarrow \dot{q}$) wie immer

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y_i'} - \frac{\partial F^*}{\partial y_i} = 0}\;, \qquad\qquad (i = 1 \ldots N). \qquad (4.36)$$

**Beispiel: Durchhängende Kette**

Wir betrachten eine durchängende Kette mit der festen Gesamtlänge $L$.

Die Kette sei fest aufgehängt und wird im Schwerefeld eine Form $y(x)$ annehmen, welche die potentielle Energie,

$$V = \int_{x_o}^{x_1} dx\, g\mu\, y(x)\sqrt{1+(y')^2} \tag{4.37}$$

minimiert. Hierbei ist $\mu$ die Masse der Kette pro Längeneinheit. Gl. (4.37) erhalten wir aus

$$V = \int_{x_o}^{x_1} ds\, g\mu, \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2(1 + \frac{dy}{dx}^2).$$

Die Nebenbedingung der festen Länge ist durch

$$L = \int_{x_o}^{x_1} ds = \int_{x_o}^{x_1} dx\sqrt{1+(y')^2}$$

gegeben. Im folgenden werden wir o.B.d.A. die Einheiten $g\mu = 1$ verwenden. Wir müssen also das Funktional

$$I^*[y] = \int_{x_0}^{x_1} dx\, F^*(y, y', x), \qquad F^* = (y-\lambda)\sqrt{1+(y')^2}$$

minimieren.

**Verallgemeinerte Energie**

Wir können das Minimum von $I^*[y]$ via der Euler-Lagrange Gleichungen (4.36) finden oder wir können bemerken, dass das $F(y, y', x) = F(y, y')$ nicht von $x \leftrightarrow t$ abhängt und somit nach §4.7 die verallgemeinerte Energie erhalten ist:

$$L = L(q, \dot q) \quad \Longrightarrow \quad \dot q\,\frac{\partial L}{\partial \dot q} - L \;\text{ erhalten},$$

$$F^* = F^*(y, y') \quad \Longrightarrow \quad y'\,\frac{\partial F^*}{\partial y'} - F^* \;\text{ erhalten}.$$

Also

$$(y-\lambda)\frac{y'y' + 1 - 1}{\sqrt{1+(y')^2}} - (y-\lambda)\sqrt{1+(y')^2} = a, \qquad -\frac{y-\lambda}{\sqrt{1+(y')^2}} = a\ ,$$

wobei $a$ eine Konstante ist. Diese Differentialgleichung kann man nach $y'$ auflösen und integrieren (Übung). Man erhält für die Form der Kette

$$y(x) \;=\; \lambda + a\cosh\left(\frac{x}{a}+b\right),$$

wobei die Integrationskonstanten $a$ und $b$, sowie der Lagrange-Parameter $\lambda$ durch

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1, \qquad L = \int_{x_o}^{x_1} dx\,\sqrt{1+(y')^2}$$

festgelegt sind. Mit der Wahl

$$(x_0, y_0) \;=\; (-1, 0), \qquad (x_1, y_1) \;=\; (1, 0)$$

erhält man

$$b \;=\; 0, \qquad \lambda \;=\; -a\cosh\left(\frac{1}{a}\right).$$

Damit hat die Lösung die Form

$$\boxed{y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - a\cosh\left(\frac{1}{a}\right)}\,, \qquad y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Die Nebenbedingung wird zu

$$L = \int_{-1}^{1} dx\,\sqrt{1+(y')^2} = \int_{-1}^{1} dx\,\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} = \int_{-1}^{1} dx\,\cosh\left(\frac{x}{a}\right),$$

also

$$\boxed{L \;=\; 2a\sinh\left(\frac{1}{a}\right)}\,.$$

Diese Gleichung hat keine (!) Lösung für $L < 2$ und zwei Lösungen für $L > 2$, eine Lösung entspricht der nach unten hängenden Kette, die andere (maximale potentielle Energie) dem optimalen Torbogen.