§3. Schwingungen

3.0 Einführung

Schwingende Systeme lassen sich für kleine Amplituden im allgemeinen auf ein System linearer Differentialgleichungen zurückführen. Das gedämpfte mathematische Pendel, z.B., wird durch

$$m\,\ddot{x} \;=\; -f\,x - K\,\dot{x} \tag{3.1}$$

beschrieben. Hierbei ist m die Masse, f die Federkonstante und K die Reibungskonstante. Gl. (3.1) lässt sich elmenetar mit dem Ansatz

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}; \qquad m\lambda^2 + K\lambda + f = 0 \tag{3.2}$$

lösen. Unser Ziel ist es hier, einen allgemeinen Formalismus zu entwickeln, der zum einen Gl. (3.2) reproduziert und zum anderen auch auf komplizierte Probleme, wie z.B. ein System von gekoppelten Oszillatoren anwendbar ist. Hierzu werden wir eine Darstellung mit Hilfe von Operatoren und Propagatoren verwenden, wie sie in der Quantenmechanik üblich ist.

3.1 Gedämpftes mathematisches Pendel

Zur Einführung betrachten wir das (gedämpfte) mathematische Pendel, Gl. (3.1). Wir führen einen Vektor

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x}/\alpha \end{pmatrix}; \qquad \alpha = \sqrt{\frac{f}{m}}; \qquad \beta = \frac{K}{2m},$$

ein, mit $\alpha, \beta > 0$. Die Bewegungsgleichung,

$$\ddot{x} \;=\; -\frac{f}{m}x - \frac{K}{m}\dot{x} \;=\; -\alpha^2 x - 2\beta\dot{x},$$

wird dann zu

$$\frac{d}{dt}\,x \;=\; \dot{x} \;=\; \alpha\left(\frac{\dot{x}}{\alpha}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\alpha}\right) \;=\; \frac{\ddot{x}}{\alpha} \;=\; -\alpha\,x - 2\beta\,\left(\frac{\dot{x}}{\alpha}\right),$$

oder in Matrix-Form

$$\dot{z} = A\,z; \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Wir haben also eine Differentialgleichung zweiter Ordnung durch zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzt. Der Vorteil ist die Anwendbarkeit der Methoden der linearen Algebra.
Mit dem Exponentialansatz

$$z = a\,\mathrm{e}^{\lambda t}; \qquad a \in C^2,$$

mit der Eigenschaft $\dot{z} = \lambda z$ finden wir die “Eigenschwingungen” durch Lösung des Eigenwertproblems

$$A\,a \;=\; \lambda a.$$

Nicht-triviale Lösungen (also solche, für die $a \neq 0$ in C^2 ist) sind durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$Det(A - \lambda\mathbf{1}) \;=\; \lambda^2 + 2\beta\lambda + \alpha^2 \;=\; \lambda^2 + \frac{K}{m}\lambda + \frac{f}{m} \;=\; 0$$

gegeben (Vergl. (3.2). Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ ergeben sich zu

$$\lambda_{1,2} \;=\; -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \;=\; -\frac{K}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{2m}\right)^2 - \frac{f}{m}},$$

und die entsprechenden Eigenvektoren zu:

$$z_i \;=\; (\alpha, \lambda_i), \qquad (i = 1, 2). \tag{3.4}$$

Es gibt drei Möglichkeiten:

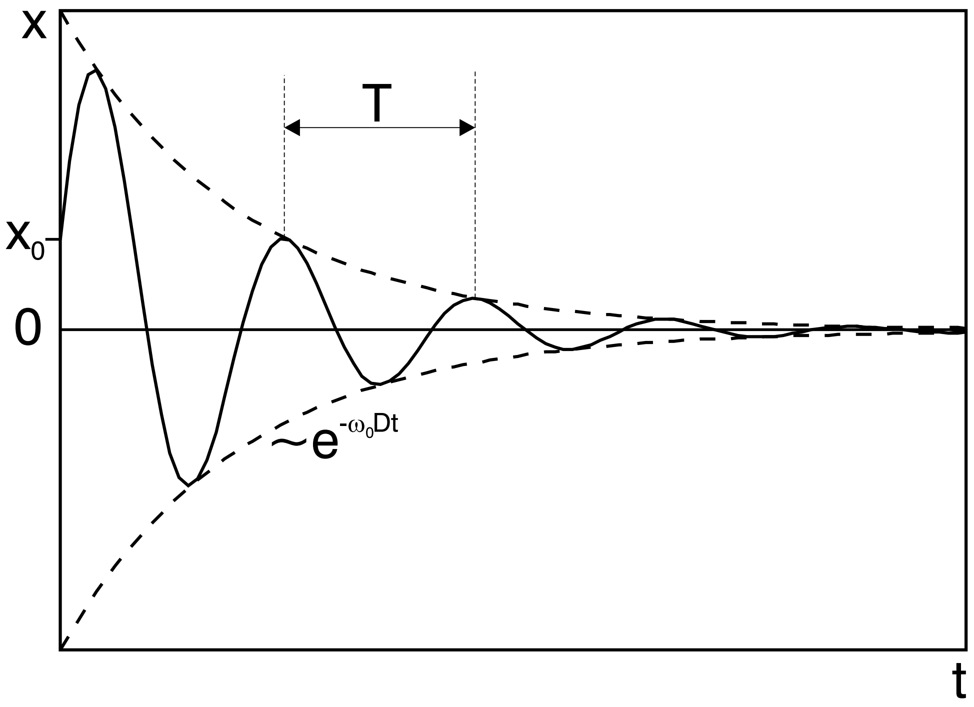

Abbildung 3.1: Illustration einer unterkritischen Schwingung mit einer Schwingunsdauer $T = 2\pi/\omega_0$ und einer Dämpfung $\beta = D\omega_0$.

$$
\begin{array}{lll}
\alpha > \beta, & \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, & \text{unterkritische Dämpfung} \\
\alpha = \beta, & \lambda_{1,2} = -\beta, & \text{kritische Dämpfung} \\
\alpha < \beta, & \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, & \text{überkritische Dämpfung.}
\end{array}
$$

Im Falle der unterkritischen Dämpfung handelt es sich um eine schwach gedämpfte Schwingung mit

$$
\boxed{\omega_0 \;=\; \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \;=\; \sqrt{\frac{f}{m} - \frac{K^2}{4m^2}}}
$$

und einer Halbwertzeit $1/\beta$ für die Amplitude. Für beliebige Anfangsbedingungen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ ist die Lösung (Übung) durch

$$
\begin{aligned}
x(t)\Big|_{\alpha>\beta} &= x(0)\,\mathrm{e}^{-\beta t}\left(\cos\omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) \\
&\quad + \dot{x}(0)\,\mathrm{e}^{-\beta t}\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

gegeben.

Propagator

Mit $z(0) = (x(0), \dot{x}(0)/\alpha)$ definieren wir durch

$$z(t) \;=\; P(t,0)\, z(0)$$

den "Propagator" $P(t,0)\;:\;\{C^2 \mapsto C^2\}$, welcher den Zustand des Systems zur Zeit $t = 0$ auf den zur Zeit t abbildet (propagieren=fortabbilden). Der Propagator ist durch (Übung)

$$P(t,0) \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\beta t}(\cos\omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0}\sin\omega_0 t) & \mathrm{e}^{-\beta t}\frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ -\mathrm{e}^{-\beta t}\frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0 t & \mathrm{e}^{-\beta t}(\cos\omega_0 t - \frac{\beta}{\omega_0}\sin\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

gegeben.

Beispiel

Als weiteres Beispiel diskutieren wir die Gleichung dritten Grades

$$\frac{d^3}{dt^3}x \;+\; a\frac{d^2}{dt^2}x \;+\; b\frac{d}{dt}x + cx \;=\; 0$$

mittels des Vektors $z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}$,

$$\dot{z} \;=\; \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ -a\ddot{x} - b\dot{x} - cx \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} \;\equiv\; Az.$$

Demnach ist auch der Propagator in diesem Beispiel eine 3×3 Matrix und es gibt drei Anfangsbedingungen, $x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0)$. In der Mechanik ist die Bewegungsgleichung dagegen nur zweiter Ordnung und die Bahn ist durch nur zwei Anfangsbedingungen, Ort und Geschwindigkeit, festgelegt.

3.2 Freie Schwingungen

Schwingende Systeme kommen in der Mechanik meistens nicht rein vor, sondern stellen Näherungen für nicht-lineare Systeme um die Gleichgewichtslösung dar. Betrachten wir eine allgemeine Bewegungsgleichung der Form

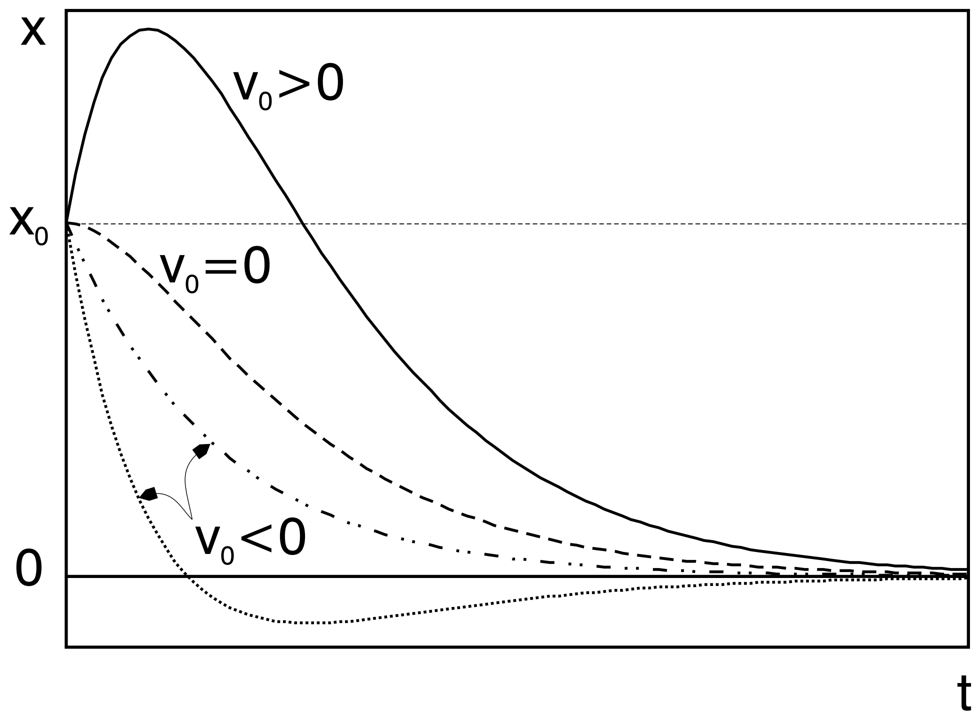

Abbildung 3.2: Illustration einer überkritischen Schwingung mit verschiedenen $v_0 = \dot{x}(0)$.

$$\dot{x} \; = \; a(x) \tag{3.6}$$

(x und a seien Vektorfelder auf R^n). Nehmen wir an, dass eine Lösung $x^0(t)$ von (3.6) bekannt sei. Die Stabilitätsanalyse dieser Lösung erfolgt durch eine Linearsierung,

$$x(t) \; = \; x^0(t) + z(t) \; ,$$

wobei $z(t) \in R^n$ eine kleine Abweichung um die bekannte Trajektorie $x^0(t)$ sei. Wir entwickeln in erster Ordnung in $z(t)$:

$$\dot{x}_i(t) \; = \; \dot{x}_i^0(t) + \dot{z}_i(t) \; = \; a_i(x^0(t)) + \sum_k \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} a_i(x^0(t))}_{A_{ik}(t)} \, z_k(t) \; + \; O(z^2).$$

Da nun $x_i^0(t)$ eine Lösung von (3.6) ist, also $\dot{x}_i^0(t) = a_i(x^0(t))$ gilt, haben wir somit

$$\dot{z}_i(t) \; = \; \sum_k A_{ik}(t) \, z_k(t), \qquad\qquad \dot{z} \; = \; A(t) \, z, \tag{3.7}$$

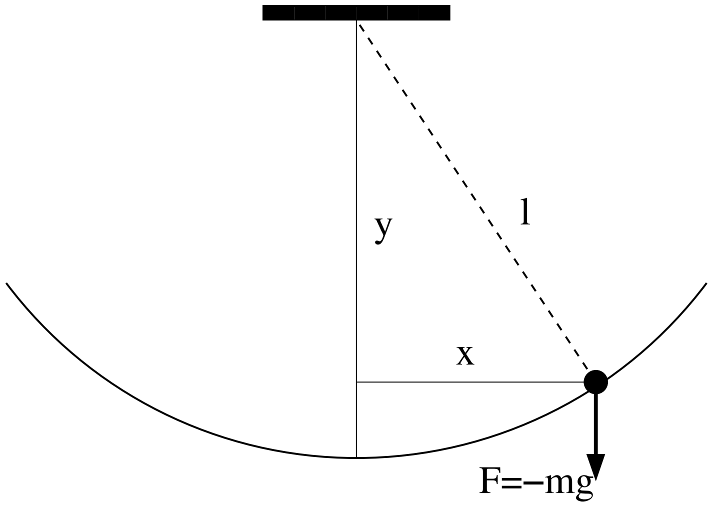

Abbildung 3.3: Das mathematische Pendel.

für (i=1,2). Falls $A(t)$ stetig ist, so existiert für jeden Anfangswert $z(s) \in R^n$ (zur Zeit s) eine eindeutige Lösung $z(t)$.

Beispiel

Wir betrachten das mathematische Pendel mit dem Potential $V = mg(l-y) = mg\left(l - \sqrt{l^2 - x^2}\right)$ und den Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} \;=\; \frac{-mgx}{\sqrt{l^2 - x^2}}\;.$$

Mit $z = (x, \ldots x)$ lässt sich diese Bewegungsgleichung auf eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen, welche um die Ruhelagen $x = 0$ linearisiert werden kann.

Propagtor

Die lineare Abbildung

$$P(t,s): \qquad z(s) \to z(t)$$

heißt Propagator oder “Bewegungsabbildung” des Systems (wichtig insbesondere in der →Quantenmechanik). Es gilt

$$P(t,r)\,P(r,s) \;=\; P(t,s)$$

$$P(s,s) \;=\; \mathbf{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,P(t,s) \;=\; A(t)\,P(t,s)$$

Die letzten beiden Gleichungen sind zu der Integralgleichung

$$P(t,s) \;=\; \mathbf{1} + \int_s^t dt_1\, A(t_1)\, P(t_1,s)$$

äquivalent. Sie lässt sich iterativ lösen:

$$P(t,s) \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \ldots \int_s^{t_{n-1}} dt_n\, A(t_1)\, A(t_2) \ldots A(t_n).$$

Autonome Systeme

Das System heißt "autonom" (zeitunabhängig), falls A nicht von der Zeit t abhängt (in (3.6) Linearisierung um eine Gleichgewichtslage $x^0(t)$=konst). Dann hängt $P(t,s)$ nur von der Differenz der Zeiten $t-s$ ab und wir setzen $P(t) \equiv P(t,0)$. Es gilt

$$P(t)\, P(s) \;=\; P(t+s)$$

$$P(0) \;=\; \mathbf{1}$$

(Gruppeneigenschaften von $P(t)$) und

$$\frac{d}{dt} P(t) \;=\; A\, P(t)$$

$$P(t) \;=\; \mathbf{1} + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \ldots \;=\; \mathrm{e}^{At}.$$

Die letzte Gleichung besagt, dass $P(t)$ "die durch A erzeugte einparametrige Gruppe" ist. Aus der Exponentialdarstellung von $P(t)$ kann man direkt nachvollziehen, dass

$$\frac{d}{dt}P(t) \;=\; \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}AA^{n-1} = AP(t)$$

gilt.

Beispiel

Für $\beta = 0$ hat die Matrix für den gedämpften harmonischen Oscillator die Form (3.3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \alpha^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\alpha^2 \mathbf{1}.$$

Es gilt also allgemein

$$A^{2n} = (-1)^n \alpha^{2n} \mathbf{1}, \qquad A^{2n+1} = (-1)^n \alpha^{2n} A, \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Mit diesen Formeln lässt sich die Exponetialreihe für den Propagator aufsummieren:

$$\begin{aligned} P(t) \;=\; \mathbf{e}^{At} \;&=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} A^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} A^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} (-1)^m \alpha^{2m} \mathbf{1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} (-1)^m \alpha^{2m} A \\ &= \cos(t\alpha)\, \mathbf{1} + \frac{\sin(t\alpha)}{\alpha} A \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & \sin(\alpha t) \\ -\sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit §3.1 (für $\beta = 0$ ist $\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha$).

3.3 Spektralzerlegung

Mit dem Ansatz $z(t) = a e^{\lambda t}$ ($a \in C^n$) findet man die Eigenschwingungen des autonomen Systems $\dot{z} = Az$. Die Lösungen des resultierenden Eigenwertproblems, $Aa = \lambda a$ (in C^n) sind durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $Det(A - \lambda \mathbf{1}) = 0$ gegeben.
Falls die Eigenvektoren z_i ($i = 1, \ldots n$) den ganzen C^n aufspannen, dann ist jede Lösung von $\dot{z} = Az$ eine Linearkombination von Eigenschwingungen. Die Matrix A heißt dann "diagonalisierbar", da A in einer Basis von Eigenvektoren $\{z_1, \ldots, z_n\}$ diagonal ist:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (\lambda_1 \ldots \lambda_n = \text{Eigenwerte}).$$

Dies ist z.B. der Fall, wenn das charakteristische Polynom n verschiedene Wurzeln hat, also alle λ_i paarweise voneinander verschieden sind. Definieren wir nun einen "Projektionsoperator" P_λ (Matrix) als lineare Abbildung $C^n \mapsto C^n$, welche die Eigenvektoren zum Eigenwert λ invariant lässt und alle anderen annihiliert:

$$P_\lambda \, z_\mu \;=\; \begin{cases} z_\lambda, & \mu = \lambda \\ 0, & \mu \neq \lambda \end{cases}$$

Dann hat die diagonalisierbare Matrix A die "Spektralzerlegung"

$$\boxed{A \;=\; \sum_{\lambda\in\sigma} \lambda \, P_\lambda} \tag{3.8}$$

wobei σ die Menge der Eigenwerte ist (trivial: $Az_\lambda = \lambda z_\lambda$). Die Projektionsoperatoren P_λ haben folgende Eigenschaften (Übung):

$$P_\lambda P_\mu = \delta_{\lambda\mu} P_\lambda, \qquad AP_\lambda = P_\lambda A = \lambda P_\lambda, \qquad \sum_{\lambda\in\sigma} P_\lambda = 1. \tag{3.9}$$

Beispiel

Eine 3×3 Matrix hat die diagonale Form

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \;=\; \lambda_1 P_{\lambda_1} + \lambda_2 P_{\lambda_2} + \lambda_3 P_{\lambda_3}$$

mit den Projektoren

$$P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anhand dieses Beispiels kann man die allgemeinen Eigenschaften (3.9) leicht verifizieren.

Gedämpfter harmonischer Oszillator

Im Falle des gedämpften harmonischen Oszillators sind die Eigenvektoren $z_i = (\alpha, \lambda_i)$, $(i = 1, 2)$ linear unabhängig, solange $\lambda_1 \neq \lambda_2$, also für $\alpha \neq \beta$. In diesem Fall hat die Lösung die Form

$$x(t) \;=\; c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

wobei sich $c_1, c_2 \in C$ durch die Anfangsbedingugnen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ ausdrücken lassen (vergl. (3.5)).
Für $\alpha = \beta$ fallen nicht nur die beiden Eigenwerte zusammen, $\lambda_1 = \lambda_2$, sondern nach (3.4) auch die Eigenvektoren, $z_1 = z_2$, und A ist nicht mehr diagonalisierbar. Die Lösung $x(t)$ lässt sich dennoch durch den Grenzübergang $\omega_0 \to 0$ gewinnen (Übung):

$$x(t)\Big|_{\alpha=\beta} \;=\; x(0)\,(1 + \beta t)\,\mathrm{e}^{-\beta t} + \dot{x}(0)\,t\,\mathrm{e}^{-\beta t}$$

Dissipation

Allgemein gilt für den Dämpfungsexponenten $\mathrm{Re}\lambda$

$$\mathrm{Re}\,\lambda \;=\; \begin{cases} -\beta, & 0 \leq \beta \leq \alpha \\ -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, & \beta > \alpha \geq 0 \end{cases},$$

also immer $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$. Die Ursache für die Dämpfung ist der dissipative Term $-K\dot{x}$ in der Differentialgleichung, dessen Leistung stets negativ ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{f}{2}x^2\right) \;&=\; m\dot{x}\ddot{x} + fx\dot{x} \;=\; \dot{x}(-fx - K\dot{x}) + fx\dot{x} \\ &=\; -K\dot{x}^2 \;\leq\; 0\,. \end{aligned}$$

Die Energie $\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{f}{2}x^2$ ist also nicht erhalten, sie nimmt kontinuierlich ab, sie wird "dissipiert". (In Wirklichkeit geht die Energie nicht verloren, sie wird nur auf ein anderes System übertragen, welches in der Beschreibung (3.7) nicht mitgenommen wurde.) Allgemein heißt ein System $\dot{z} = Az$ "dissipativ" falls es eine positiv definite quadratische Form (z, z) gibt, die nie zunehmen kann:

$$\frac{d}{dt}(z,z) \;=\; (Az,z)+(z,Az) \;\leq\; 0 \;, \tag{3.10}$$

für alle z. Dies schließt unbeschränkt wachsende Lösungen aus, also muss $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ sein, für alle $\lambda \in \sigma$. In diesem Fall ist die Lösung $x^0(t)$, um welche die ursprüngliche Differentialgleichung $\dot{x} = a(x)$ linearisiert wurde, stabil. In der Sprache der →Stabilitätsanalyse bezeichnet man λ auch als “Liapunov-Exponenten”.
Falls (z,z) sogar eine Erhaltungsgröße ist, so ist $P(t) = \mathrm{e}^{At}$ (in dieser Metrik) eine 1-parametrige Gruppe von Drehungen des R^n. Nach (3.10) ist A antisymmetrisch und daher (in C^n) stets diagonalisierbar. Mit A ist auch $-A$ konservativ, also sind alle Eigenwerte rein imaginär.

3.4 Erzwungene Schwingungen

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{z}(t) \;=\; A(t)z(t) \;+\; b(t)$$

ist durch die “Duhamel-Formel”

$$z(t) \;=\; P(t,s)z(s) \;+\; \int_s^t d\tau P(t,\tau)b(\tau) \tag{3.11}$$

gegeben (Übung), wobei $P(t,s)$ der Propagator des homogenen Systems ist. Für eine harmonische Anregung

$$b(t) \;=\; b\,\mathrm{e}^{i\omega t} \qquad (b \in C^n)$$

erhält man als Lösung

$$z(t) \;=\; \mathrm{e}^{At}\,[z(0)-a(\omega)] \;+\; \mathrm{e}^{i\omega t}a(\omega) \;, \tag{3.12}$$

mit (Achtung: Reihenfolge der Matrizen!)

$$a(\omega) \;=\; (i\omega - A)^{-1}b \;.$$

Man kann (3.12) entweder aus der Duhamel Formel gewinnen (Übung) oder direkt verifizieren, was wir nun machen wollen. Die Anfangsbedingung $z(t=0) = z(0)$ ist offensichtlich von 3.12 erfüllt. Ferner gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}z(t) \;&=\; A\,\mathrm{e}^{At}[z(0)-a(\omega)] \;+\; i\omega\,\mathrm{e}^{i\omega t}a(\omega) \\
&=\; A\,\underbrace{\left(\mathrm{e}^{At}[z(0)-a(\omega)]+\mathrm{e}^{i\omega t}a(\omega)\right)}_{=z(t)}+b\,\mathrm{e}^{i\omega t} \\
&\qquad +\underbrace{\left(i\omega\,\mathrm{e}^{i\omega t}a(\omega)-A\mathrm{e}^{i\omega t}a(\omega)-b\mathrm{e}^{i\omega t}\right)}_{=0} \\
&=\; A\,z(t) \;+\; b(t)
\end{aligned}
$$

mit $b(t) = b\mathrm{e}^{i\omega t}$ (nach Voraussetzung) da der Term

$$
\begin{aligned}
i\omega\,\mathrm{e}^{i\omega t}a(\omega) - A\mathrm{e}^{i\omega t}a(\omega) - b\mathrm{e}^{i\omega t} \;&=\; \mathrm{e}^{i\omega t}\,(i\omega - A)\;a(\omega) - b\mathrm{e}^{i\omega t} \\
&=\; \mathrm{e}^{i\omega t}\left[(i\omega - A)\;(i\omega - A)^{-1}b - b\right] \;=\; \mathrm{e}^{i\omega t}\,[b-b] \;=\; 0
\end{aligned}
$$

verschwindet

Beispiel

Für den gedämpften harmonischen Oszillator ist

$$
\begin{aligned}
i\omega - A \;&=\; \begin{pmatrix} i\omega & -\alpha \\ \alpha & i\omega + 2\beta \end{pmatrix}, \\
\frac{1}{i\omega - A} \;&=\; \begin{pmatrix} i\omega + 2\beta & \alpha \\ -\alpha & i\omega \end{pmatrix} \frac{1}{i\omega(i\omega+2\beta)+\alpha^2}.
\end{aligned}
$$

Für $\beta > 0$ verschwindet der erste Term in (3.12) für große Zeiten ($t \to \infty$, Einschwingvorgang) und es bleibt nur die erzwungene Schwingung übrig. Wir haben

$$
\begin{aligned}
z(t)\Big|_{t\to\infty}^{\beta>0} \;&=\; \mathrm{e}^{i\omega}a(t) \;=\; \mathrm{e}^{i\omega}\frac{1}{i\omega - A}b, \\
\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \;&=\; \frac{\mathrm{e}^{i\omega t}}{i\omega(i\omega+2\beta)+\alpha^2} \begin{pmatrix} i\omega + 2\beta & \alpha \\ -\alpha & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Also, z.B. für $b_2 = 0$ (keine Kopplung der treibenden Kraft an $\dot{x}/\alpha$, nur an den Ort)

$$x(t) \;=\; \mathrm{e}^{i\omega t}\frac{i\omega + 2\beta}{(i\omega)^2 + 2\beta i\omega + \alpha^2}\,b_1 \;=\; \mathrm{e}^{i\omega t}\frac{i\omega + 2\beta}{(i\omega - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)}\,b_1.$$

Dabei ist (wie erwartet) $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ für $\alpha > \beta$, es gibt also Resonanzen für $\omega = \pm\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

Resonanzen

Allg. gilt: Wenn A strikt dissipativ ist, also $\operatorname{Re}\lambda < 0$, für alle Eigenwerte λ, so ist der erste Term in (3.12) exponentiell abklingend und nach dem "Einschwingvorgang" bleibt für $t \to \infty$ nur noch die erzwungene Schwingung

$$z(t) \;=\; \mathrm{e}^{i\omega t} a(\omega)$$

übrig. Der Frequenzverlauf der Amplitude $a(\omega)$ zeigt typische Resonanzen. Falls A diagonalisierbar ist, so ist nach (3.8)

$$(i\omega - A)^{-1} \;=\; \sum_{\lambda\in\sigma} \frac{P_\lambda}{i\omega - \lambda},$$

denn dann gilt

$$(i\omega - A)^{-1}\,(i\omega - A) \;=\; \sum_{\lambda\in\sigma} \frac{P_\lambda(i\omega - \lambda)}{i\omega - \lambda} \;=\; \sum_{\lambda\in\sigma} P_\lambda \;=\; \mathbf{1}.$$

Für Anregungsfrequenzen $i\omega$ nahe einer Resonanz λ_0 dominiert der entsprechende Term und die erzwungene Schwingung wird durch die Anregung einer einzigen Eigenmode dominiert:

$$z(t)\Big|_{\omega\approx\lambda_0} \;=\; \frac{\mathrm{e}^{i\omega t}}{i\omega - \lambda_0} P_{\lambda_0} b \;\equiv\; \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - \delta)}\,P_{\lambda_0} b.$$

Für die $\boxed{\text{Phase } \delta}$ und die $\boxed{\text{Amplitude } 1/\gamma}$ findet man für den Fall einer schwach gedämpften Schwingung, $\lambda_0 = -\beta + i\omega_0$,

$$\frac{1}{i\omega - \lambda_0} = \frac{1}{i(\omega - \omega_0) + \beta} = \frac{-i(\omega - \omega_0) + \beta}{(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2} = \frac{\mathrm{e}^{-i\delta}}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2}},$$

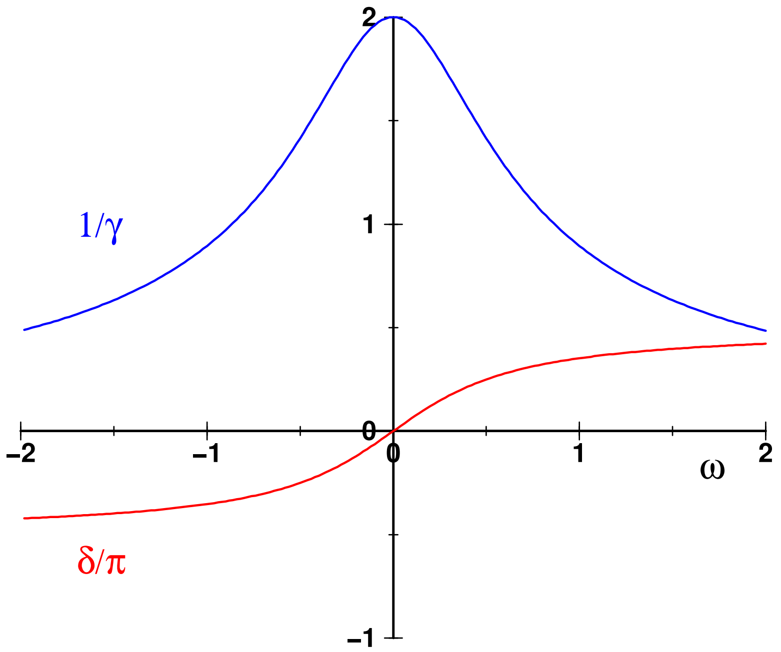

Abbildung 3.4: Verlauf der Amplitude $1/\gamma$ und der Phase δ durch die Resonanz $\omega_0 = 0$ einer erzwungenen Schwingung (mit $\beta = 0.5$).

also

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2}; \qquad \delta = \arctan\frac{\omega - \omega_0}{\beta}.$$

Aus der Breite der Resonanz kann man also die Zerfallskonstante β der resonanten Eingenschwingung entnehmen. Für einen rein imaginären Eigenwert, $\lambda_0 = i\omega_0$ divergiert $a(\omega)$. Natürlich kann es vorkommen, dass $P_{\lambda_0} b = 0$ ist, dann ist diese Resonanz nicht durch die äußere Störung $\mathrm{e}^{i\omega t} b$ anregbar.

3.5 Fourierzerlegung

Wir betrachten eine lineare Kette von N Massenpunkten, je mit Masse m, welche durch Federn mit der Federkonstante f verbunden sind. Die Auslenkungen aus den Ruhelagen der Massenpunkte bezeichnen wir mit $x_0(t) \ldots x_{N-1}(t)$. Die Kette soll sich schließen, also $x_0(t) \equiv x_N(t)$. Die Bewegungsgleichungen lauten für $\quad n = 0 \ldots (N-1)$

$$m\ddot{x}_n = f(x_{n+1} - x_n) + f(x_{n-1} - x_n) = f(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n). \quad (3.13)$$

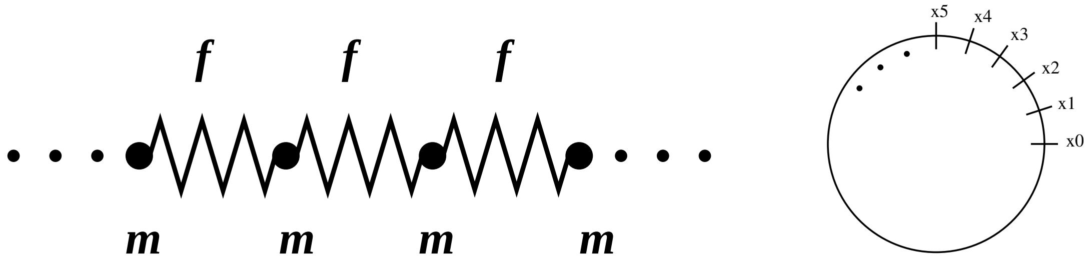

Abbildung 3.5: Illustration einer Kette von Massenpunkten m welche untereinander mit Federn der Federkonstante f verbunden sind. Die unendlich lange Kette kann man sich auch als Ring mit periodischen Randbedingungen vorstellen.

Wir finden als Lösung laufende Wellen der Form

$$x_n(t) \;=\; \mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{e}^{-ikn}. \tag{3.14}$$

Wegen der Randbedingung sind nicht alle Werte für den Wellenvektor k zugelassen, denn es muss

$$x_0(t) = x_N(t), \qquad 1 = \mathrm{e}^{-ik0} = \mathrm{e}^{-ikN}$$

gelten. Die erlaubten Werte von k sind also ganze Vielfache von $2\pi/N$,

$$k \;=\; \frac{2\pi}{N}\,l, \qquad\qquad (l = 0, 1 \ldots (N-1)),$$

da größere Werte von l zu keinen neuen Funktionen führen ($\exp[ik_1 n] = \exp[ik_2 n]$ für $k_1 - k_2$ Vielfache von 2π). Wir setzen nun den Ansatz (3.14) in die Bewegungsgleichung (3.13) ein:

$$m(i\omega)^2\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{e}^{-ikn} \;=\; f\,[\mathrm{e}^{-ik(n+1)} + \mathrm{e}^{-ik(n-1)} - 2\mathrm{e}^{-ikn}]\,\mathrm{e}^{i\omega t},$$

$$m(i\omega)^2 \;=\; f\,[\mathrm{e}^{-ik} + \mathrm{e}^{ik} - 2] \;=\; f\,[2\cos k - 2],$$

$$(\omega)^2 \;=\; \frac{f}{m}\,2\left[1 - \cos^2\frac{k}{2} + \sin^2\frac{k}{2}\right] \;=\; 4\frac{f}{m}\sin^2\frac{k}{2}.$$

Also finden wir für die "Dispersionsrelation" $\omega(k)$ der elastischen Wellen (Schallwellen) mit der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$:

$$\omega(k) \;=\; 2\sqrt{\frac{f}{m}}\,|\sin\frac{k}{2}|, \qquad\qquad k = \frac{2\pi}{N}(0\ldots(N-1)).$$

Wir können nun eine Beziehung zum Eigenwertproblem herstellen. Lässt man die räumliche Abhängigkeit der Lösung offen und macht man nur einen harmonischen Ansatz für den zeitlichen Teil der Lösung, also

$$x_n(t) \;=\; \mathrm{e}^{i\omega t}x_n,$$

so erhält man eine "zeitunabhängige Bewegungsgleichung" für die x_n,

$$\omega^2 x_n \;=\; -\frac{f}{m}\left[x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_2\right]$$

welche man mit $x = (x_0 \ldots x_{N-1})$ auch in Matrixform

$$\omega^2 x = Ax, \qquad\qquad A = \frac{f}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \\ 1 & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

schreiben kann. Mit anderen Worten ist die gesuchte Lösung x ein Eigenvektor zu der symmetrischen Matrix A. Die respektiven Eigenwerte $\lambda = \omega^2$ bestimmen damit die Frequenz ω. Wir wissen schon, dass die normierten Eigenvektoren $x(k)$ durch

$$x(k) \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}}\left(1, \mathrm{e}^{ik}, \mathrm{e}^{2ik}, \mathrm{e}^{3ik}, \ldots, \mathrm{e}^{(N-1)ik}\right)$$

gegeben sind, mit $\lambda = \omega^2 = 4\frac{f}{m}\sin^2\frac{k}{2}$. Hieraus schließen wir, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten, und damit auch zu verschieden k-Werten, orthogonal sind, wie man auch direkt nachprüfen kann, indem man das Skalarprodukt

$$(x(k)|x(p)) \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} x_n^*(k) x_n(p)$$

ausrechnet:

$$(x(k)|x(p)) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{i(k-p)n} \;=\; \begin{cases} 1, & k=p \\ \frac{\mathrm{e}^{i(k-p)N}-1}{\mathrm{e}^{i(k-p)}-1} = 0, & k \neq p \end{cases}$$

da $(k-p)N = \frac{2\pi}{N}(l_k - l_p)N$ ein ganzes Vielfaches von 2π ist, und somit $\exp[i(k-p)N] = 1$. Wir haben also die Orthogonalitätsrelationen

$$(x(k)|x(p)) \;=\; \delta_{k,p} \tag{3.15}$$

gefunden, und mit

$$\delta_{k,p} \;=\; \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{i(k-p)n} \tag{3.16}$$

eine Darstellung der Dirac'schen Delta-Funktion. Da alle N Eigenvektoren $x(k)$ orthogonal sind, sind sie auch vollständig, bilden also im C^N eine orthonomierte Basis. Somit lässt sich jeder Vektor $y \in C^N$ in dieser Basis darstellen, mit Entwicklungskoeeffizienten $y(k)$:

$$y \;=\; \sum_{l=0}^{N-1} y(k)\, x(k), \qquad\qquad k = \frac{2\pi}{N} l.$$

In Komponenten haben wir

$$y_n \;=\; \sum_{l=0}^{N-1} y(k)\, x_n(k) \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} y(\frac{2\pi}{N} l)\, \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{N} ln}$$

die Dartellung von y_n als (diskrete) "Fourierreihe". Diese Fourierreihe kann man auch umdrehen (Übung) und man findet mit der Darstellung (3.16) der Dirac'schen Deltafunktion

$$y(k) \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y_n\, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{N} ln}.$$

Diese Überlegungen lassen sich auch auf schwingende Systeme verallgemeinern, die nicht aus diskreten Massepunkten sondern aus einem Kontinuum aufgebaut sind (schwingende Saite, Trommel, ...). Die entsprechenden Eigenschwingungen bilden dann wieder eine vollständige Basis.