§2. Das 2-Körperproblem

2.1 Transformation auf Relativkoordinaten

Die Bewegungsgleichungen der beiden Massenpunkte sind

$$\ddot{\vec{x}}_1 = \frac{-1}{m_1}\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

und

$$\ddot{\vec{x}}_2 = \frac{-1}{m_2}\frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|).$$

Wir führen die Relativkoordinate $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ ein und beachten

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \qquad \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}}.$$

Wir subtrahieren die beiden Bewegungsgleichungen und finden

$$\ddot{\vec{x}} \ = \ \frac{-1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \vec{x}} V(|\vec{x}|), \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{M}{m_1 m_2}, \tag{2.1}$$

wobei μ die reduzierte Masse und $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse ist. (2.1) entspricht der Bewegung eines Teilchens der Masse μ im Potential V. Mit der Schwerpunktskoordinate $\vec{X} = (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/M$ ergeben sich die Transformationsgleichungen

$$\vec{x}_1 = \vec{X} + \frac{m_2}{M}\vec{x}, \qquad \vec{x}_2 = \vec{X} - \frac{m_1}{M}\vec{x}.$$

Drehimpulserhaltung

Ohne äußeres Drehmoment $\vec{M}$ ist nach §1.6 der Gesamtdrehimpuls erhalten und via

$$\frac{d}{dt}\vec{L} \;=\; \frac{d}{dt}\left[\vec{X}\times\vec{P}+\vec{L}_{rel}\right] \;=\; 0$$

auch der relativ-Anteil $\vec{L}_{rel}$, da wir o.B.d.A. den Gesamtimpuls $\vec{P}$ zu Null setzen können. Die Schwerpunktskoordinate $\vec{X}$ ist auch erhalten, denn $\vec{P} = M\dot{\vec{X}}$. O.b.d.A setzen wir auch $\vec{X} = 0$. Damit werden die Transformationsgleichungen zu

$$\vec{x}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{x}, \qquad\qquad \vec{x}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{x}$$

und der relativ-Anteil $\vec{L}_{rel}$ zu

$$\vec{L}_{rel} \;=\; \sum_{i=1,2} m_i(\vec{x}_i - \vec{X})\times\dot{\vec{x}}_i = m_1\,\vec{x}_1\times\dot{\vec{x}}_1 + m_2\,\vec{x}_2\times\dot{\vec{x}}_2$$

$$= \left[m_1\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 + m_2\left(\frac{-m_1}{M}\right)^2\right]\vec{x}\times\dot{\vec{x}} = (m_1+m_2)\,\frac{m_1m_2}{M^2}\,\vec{x}\times\dot{\vec{x}}$$

oder, mit (2.1),

$$\vec{L}_{rel} \;=\; \frac{m_1m_2}{M}\,\vec{x}\times\dot{\vec{x}} \;=\; \mu(\vec{x}\times\dot{\vec{x}}). \tag{2.2}$$

Energieerhaltung

Die Gesamtenergie $T+V$ ist ohne äußere Kräfte erhalten. Nach §1.5 setzt sich die kinetische Energie $T = T_{SP} + T_{rel}$ aus einem Schwerpunktsanteil, T_{SP}, und einem relativ-Anteil, T_{rel}, zusammen. Wegen $\dot{\vec{X}} = 0$ verschwindet $T_{SP} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{X}}^2$ und somit ist $T_{rel}+V$ erhalten. T_{rel} hat die Form

$$T_{rel} \;=\; \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}})^2 \;=\; \frac{m_1}{2}\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{x}}_2^2$$

$$= \left[\frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{-m_1}{M}\right)^2\right]\dot{\vec{x}}^2 \;=\; \frac{1}{2}\mu\,\dot{\vec{x}}^2$$

wie schon zuvor. Die Energieerhaltung hat also die Form

$$T_{rel} + V \;=\; \frac{\mu}{2}\dot{\vec{x}}^2 + V(|\vec{x}|) \tag{2.3}$$

2.2 Allgemeines Potential

Da $\vec{L}_{rel}$ erhalten ist und $\vec{x}\cdot\vec{L}_{rel} = \mu\vec{x}(\vec{x}\times\dot{\vec{x}}) = 0$ gilt, folgt damit, dass die Bahn $\vec{x}(t)$ in einer Ebene senkrecht zu $\vec{L}_{rel} \equiv (0,0,l)$ verläuft. Wir führen ebene Polarkoordinaten (r,φ)

$$\vec{x} \;=\; (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$$

ein. Wir können die Erhaltungsgrößen l und $E = T_{rel} + V$ zur Bestimmung der Bahnkurve $\varphi(r)$ und des zeitlichen Durchlaufs $t(r)$ benützen. Mit

$$(0,0,l) \;=\; \frac{\dot{r}}{r}\mu\,\vec{x}\times\vec{x} \;+\; r^2\dot{\varphi}\mu\,(\cos\varphi,\sin\varphi,0)\times(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)$$

werden (2.2) und (2.3) zu

$$l \;=\; \mu\, r^2\,\dot{\varphi} \tag{2.4}$$

$$E \;=\; \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) \;=\; \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U(r), \tag{2.5}$$

wobei

$$U(r) \;\equiv\; \frac{\mu}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + V(r) \;=\; \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r).$$

Da l eine Erhaltungsgröße ist, haben wir also schon $\dot{\varphi}$ eliminiert. Aus (2.5) folgt

$$\dot{r} \;=\; \frac{dr}{dt} \;=\; \sqrt{2/\mu(E - U(r))}. \tag{2.6}$$

Wir integrieren diese Gleichung und erhalten den zeitlichen Durchlauf als Funktion der Erhaltungsgrößen E und l und der Anfangsbedingung $t(r_0)$:

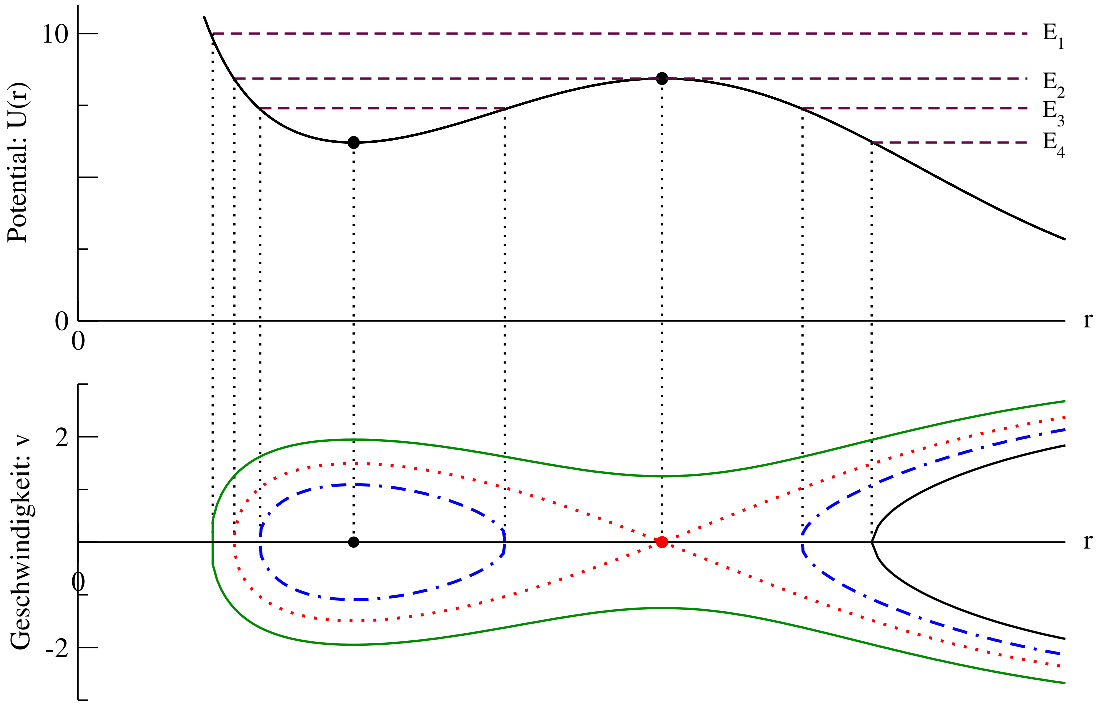

Abbildung 2.1: Streu- und gebundene Bahnen für ein allgemeines abstoßendes Potential $U(r) = l^2/(2\mu r^2) + V(r)$.

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{2/\mu(E - U(r'))}} = \int_{t(r_0)}^{t(r)} dt' = t(r) - t(r_0). \tag{2.7}$$

Weiterhin verwenden wir (2.4) in der Form $\dot{\varphi} = l/(\mu r^2)$. Zusammen mit (2.6) ergibt dies

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{l}{\mu r^2 \sqrt{2/\mu(E - U(r))}} = \frac{l}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U(r))}}. \tag{2.8}$$

Nun können wir die Bahnkurve $\varphi(r)$ direkt aus den Erhaltungsgrössen E und l und der Anfangsbedingung $t(r_0)$ berechnen:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{l\, dr'}{(r')^2 \sqrt{2\mu(E - U(r'))}} = \varphi(r) - \varphi(r_0). \tag{2.9}$$

Wir bemerken also, dass wir zur Lösung des 2-Körperproblems nicht die Differentialgleichung (2.1) zu lösen brauchten, da wir die Konstanten der Bewegung kennen. An einem Beispiel für $U(r)$ illustrieren wir die möglichen Bewegungstypen:

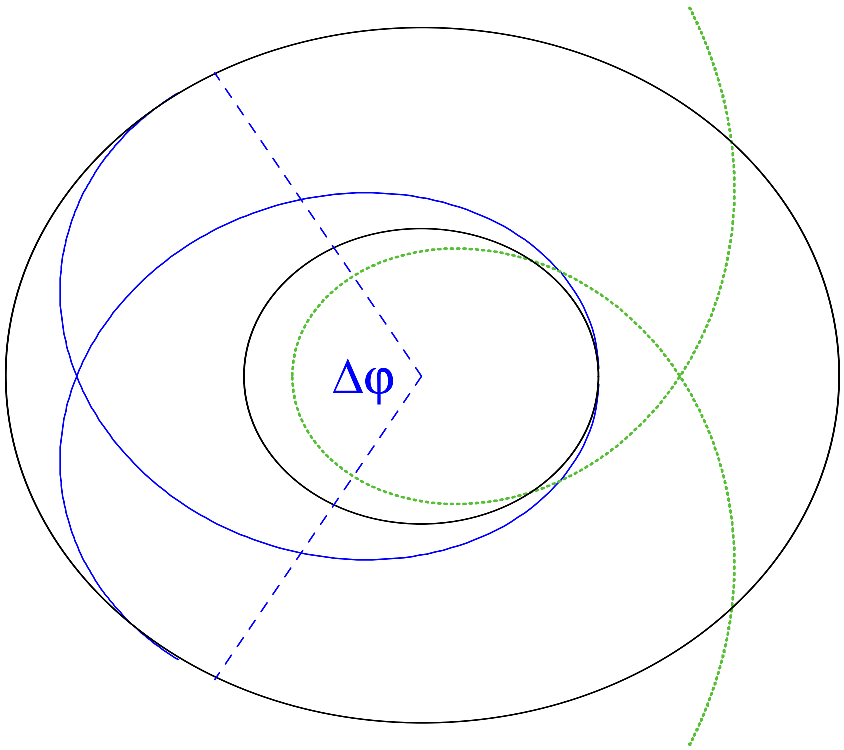

Abbildung 2.2: Bahn im Ortsraum für das Potential aus der Abbildung 2.1, und mit den Energien E_1 und E_3 und der Periheldrehung $\Delta\varphi$.

Im "Phasenraum" mit den Koordinaten $r, \dot{r}$ ist die radiale Bewegung für 4 verschiedene Energien dargestellt. Es gibt 2 Typen.

2.3 Gebundene Bahnen

Hier ist $r(t)$ periodisch, mit der Periode (siehe (2.7))

$$T \; = \; 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{\sqrt{2/\mu(E-U(r'))}}. \tag{2.10}$$

In einer Periode nimmt dabei der Winkel φ um den Betrag (siehe (2.9))

$$\Delta\varphi \; = \; 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{l\,dr'}{(r')^2\sqrt{2\mu(E-U(r'))}}. \tag{2.11}$$

zu (Periheldrehung). So ergibt sich im allgemeinen eine "Rosettenbahn" im Ring $r_{min} \leq r \leq r_{max}$, die sich nur für rationale Verhältniße von $\Delta\varphi/(2\pi)$ schließt. Für das Kepler-Problem ist $\Delta\varphi = 0$, relativistische Korrekturen ergeben jedoch eine Periheldrehung (Gemessen wird für den Merkur ein $\Delta\varphi$ von $40''$ pro Jahrhundert).

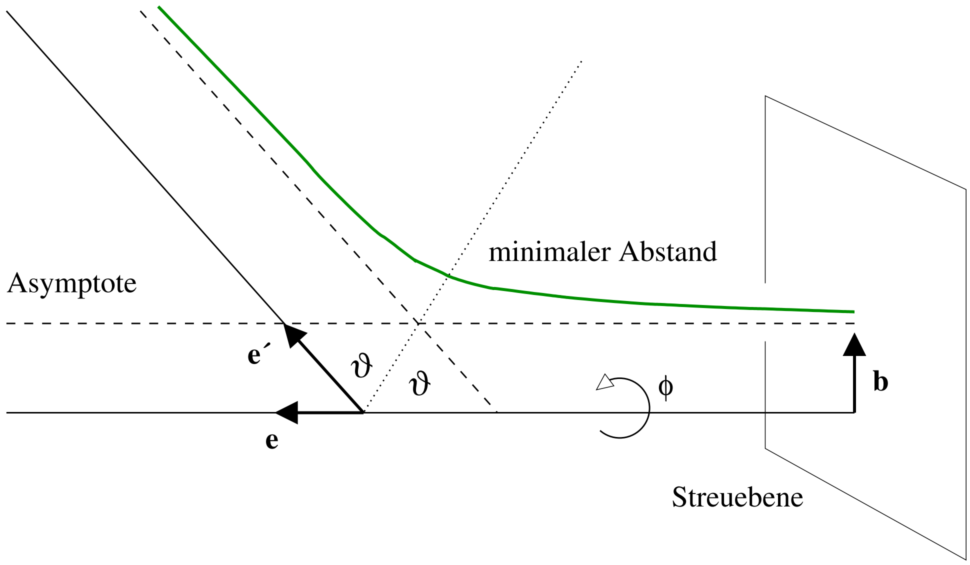

Abbildung 2.3: Die Geometrie des Streuproblems.

2.4 Streubahnen

Für $l = 0$ kreuzen sich die Bahnen der Massenpunkte. Voraussetzung für die Existenz von Streubahnen ist somit $l \neq 0$ sowie $\lim_{r\to\infty} V(r) < \infty$. Nehmen wir $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$ an. Dann gibt es Streubahnen nur für $E \geq 0$. Für große r ist das Potential so schwach, dass die Bahn geradlinig wird. Es existieren also Asymptoten für $t \to \pm\infty$:
Als "Stoßparameter" benützen wir E, $\hat{e}$ und den "Zielfehler" $\vec{b} \perp \hat{e}$. Für $t \to -\infty$ ist $E \to \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{x}}^2$ und

$$l \;=\; \mu\,|\vec{b}|\,|\dot{\vec{x}}| \;=\; \mu\, b\sqrt{2E/\mu} \;=\; b\sqrt{2\mu E}. \tag{2.12}$$

So bestimmen $b = |\vec{b}|$ und E den Drehimpuls l und den Streuwinkel χ via $\chi = \pi - 2\vartheta$:

$$\vartheta \;=\; \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{l\,dr'}{(r')^2\sqrt{2\mu(E - U(r'))}}. \tag{2.13}$$

Bei fester "Einfallsenergie" E und Einfallsrichtung $\hat{e}$ entspricht jedem Punkt $\vec{b}$ in der Stoßparameterebene $P \perp \hat{e}$ ein Punkt $\hat{e}\,'$ auf der Einheitskugel. Die Dynamik definiert also eine Abbildung

$$\vec{b} \;\longrightarrow\; \hat{e}\,'(\vec{b}).$$

Unter dieser Abbildung geht ein Flächenlement $d\sigma = b\,db\,d\phi$ von P (hier ist ϕ der ebene Winkel in P) in ein Raumwinkelelement $d\Omega = \sin\chi\,d\chi\,d\phi$ (in Kugelkoordinaten) über. Als "differentiellen Streuquerschnitt" (siehe Kern/Teilchenphysik) definiert man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{b}{\sin\chi}\frac{db}{d\chi}\right| = \left|\frac{b}{\sin\chi}\left(\frac{d\chi}{db}\right)^{-1}\right|, \tag{2.14}$$

wobei $\chi(b)$ durch (2.12) und (2.13) gegeben ist. Betrachtet man viele Stöße mit festem E und $\hat{e}$, deren Stoßparameter $\vec{b}$ die Ebene P mit einer Dichte ρ bedecken, so ist $\rho\,\frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\Omega$ die Zahl der Stöße mit $\hat{e}' \in d\Omega$.

2.5 Das Keplerproblem

$$V(r) = -\frac{\kappa m_1 m_2}{r} = -\frac{\kappa\mu M}{r}$$

Als Variable benützen wir $s = 1/r$ und finden aus (2.8)

$$\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{r^2}{l}\sqrt{2\mu(E-U(r))}.$$

Mit $U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$ haben wir

$$\frac{ds}{d\varphi} = -\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\kappa\mu^2 M}{l^2}s - s^2} \equiv -\sqrt{(s_2 - s)(s - s_1)},$$

wobei wir mit $s_1 \leq s_2$ die beiden Nullstellen des Radikanden bezeichnet haben, also

$$\frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{\kappa\mu^2 M}{l^2}; \qquad \frac{s_1 s_2}{2} = -\frac{\mu E}{l^2}.$$

Wir stellen fest, dass wir reelle Lösungen für $ds/d\varphi$ nur für $s_1 \leq s \leq s_2$ haben. Somit können wir s durch einen Winkel β darstellen:

$$s = \frac{s_1 + s_2}{2} + \frac{s_2 - s_1}{2}\cos\beta. \tag{2.15}$$

Hieraus folgt

$$\frac{ds}{d\varphi} \;=\; -\frac{s_2 - s_1}{2} \sin\beta \, \frac{d\beta}{d\varphi}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{d\varphi} &= -\sqrt{(s_2 - s)(s - s_1)} \\
&= -\sqrt{(\frac{s_2 - s_1}{2} - \frac{s_2 - s_1}{2}\cos\beta)(\frac{s_2 - s_1}{2} + \frac{s_2 - s_1}{2}\cos\beta)} \\
&= -\frac{s_2 - s_1}{2}\sqrt{1 - \cos^2\beta} = -\frac{s_2 - s_1}{2}\sin\beta
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$\frac{ds}{d\varphi} \;=\; -\frac{s_2 - s_1}{2} \sin\beta \, \frac{d\beta}{d\varphi} \;=\; -\frac{s_2 - s_1}{2} \sin\beta .$$

Daraus folgt $d\beta/d\varphi = 1$ oder $\beta = \varphi$ (bis auf eine Konstante). Damit wird (2.15) zur Bahngleichung,

$$s \;=\; \frac{s_1 + s_2}{2}\left(1 + \frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1}\cos\varphi\right) \;\equiv\; \frac{1}{d}\,(1 + \epsilon\cos\varphi),$$

und wir brauchen nur noch einzusetzen (mit $s = 1/r$):

$$r(\varphi) \;=\; \frac{d}{1 + \epsilon\cos\varphi}, \tag{2.16}$$

$$d = \frac{2}{s_1 + s_2} \;=\; \frac{l^2}{\kappa\mu^2 M},$$

$$1 - \epsilon^2 \;=\; \frac{4 s_1 s_2}{(s_1 + s_2)^2} \;=\; -E\frac{2l^2}{\kappa^2\mu^3 M^2}.$$

(2.16) ist die Gleichung eines Kegelschnitts, mit einem der Brennpunkte in $r = 0$, und zwar für

$E < 0$	$: \epsilon < 1 :$	Ellipse
$E = 0$	$: \epsilon = 1 :$	Parabel
$E > 0$	$: \epsilon > 1 :$	Hyperbel

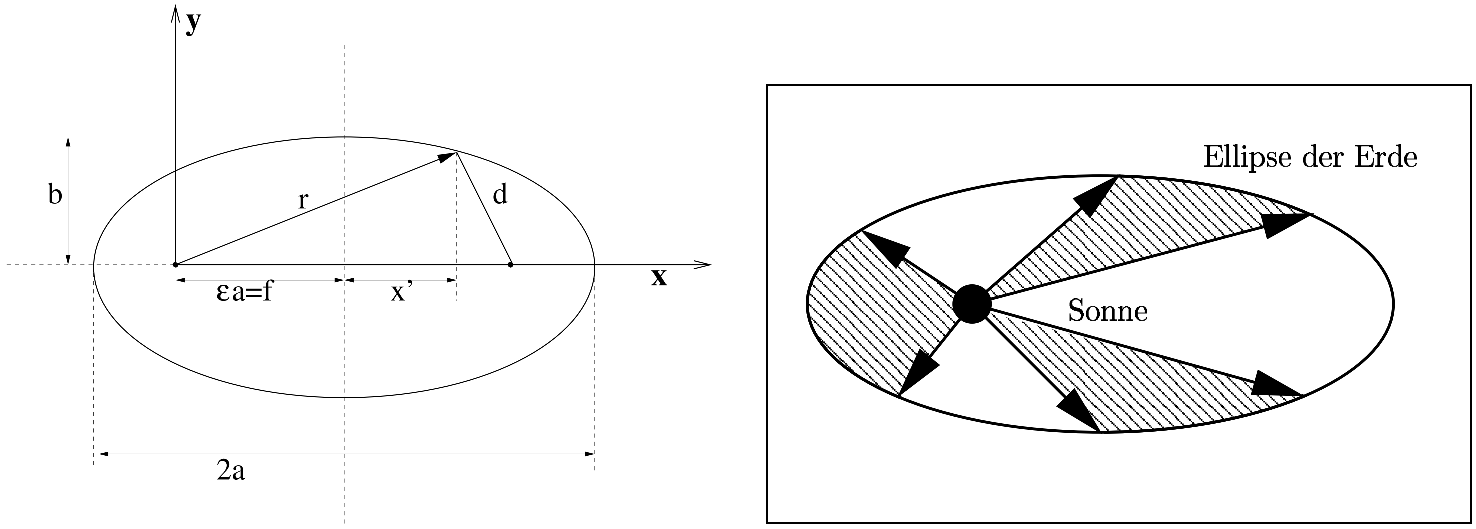

Abbildung 2.4: Die Geometrie einer Ellipse und der Keplerische Flächensatz.

Ellipsen

Die große Halbachse a ergibt sich aus $2a = d/(1+\epsilon) + d/(1-\epsilon)$ zu $d = a(1-\epsilon^2)$; die kleine Halbachse b ist (Übung) $b = a\sqrt{1-\epsilon^2} = \sqrt{a}\sqrt{d}$.

Die Umlaufzeit ergibt sich aus (2.10) (Übung) oder aus dem "Flächensatz":

Die Änderung der Fläche F unter einer Kurve $r(\varphi)$ ist $dF = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$. Somit ist mit $\dot\varphi = l/(\mu r^2)$ (2.4) die Flächengeschwindigkeit $\dot F$

$$\dot F \;=\; \frac{1}{2}r^2\dot\varphi \;=\; \frac{l}{2\mu}$$

konstant, im Einklang mit dem zweiten Kepler'schen Gesetz (Flächensatz). Die Gesamtfläche πab der Ellipse ist durch

$$\pi ab \;=\; \dot F T \;=\; \frac{l}{2\mu}T$$

gegeben, und die Umlaufzeit T somit durch

$$T \;=\; \frac{2\pi ab\mu}{l}.$$

Verwenden wir nun noch, dass $ab = d^{1/2}a^{3/2}$, dann haben wir mit dem Ausdruck für $d = l^2/\kappa\mu^2 M$

$$T \;=\; \frac{2\pi a^{3/2}\mu}{l}\frac{l}{\mu\sqrt{\kappa M}} \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa M}}\,a^{3/2},$$

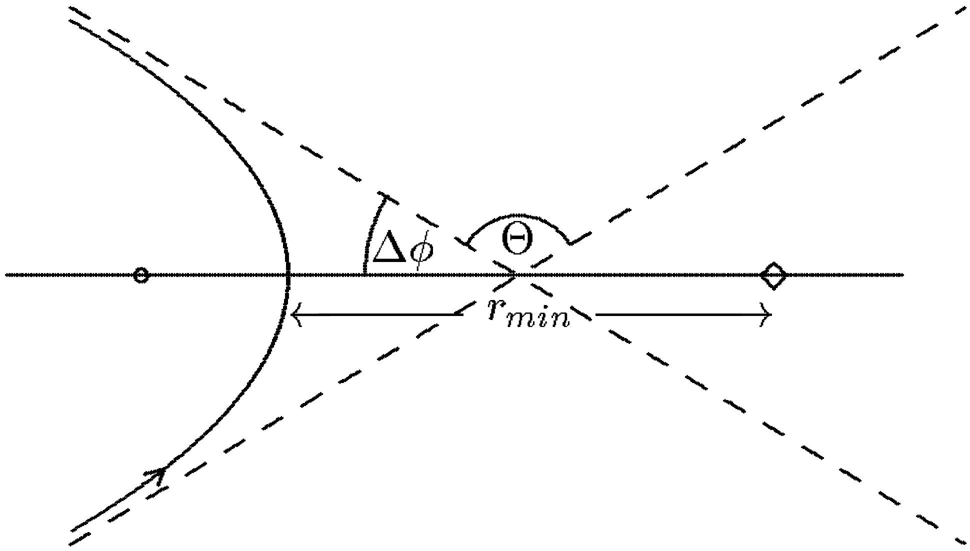

Abbildung 2.5: Hyperbolische Streubahnen.

das dritte Kepler'sche Gesetz hergeleitet.

Hyperbeln

Nach (2.16) geht $r \to \infty$ für $\cos\varphi_c = -1/\epsilon$. Im Grenzfall $\epsilon \to 1$ (Parabel) ist $\varphi_c = \pm\pi$ und die Bahnkurve führt für $t \to \infty$ wieder in die Einfallsrichtung zurück.
Mit $\varphi_c + \vartheta = \pi$ ist also $\cos\vartheta = 1/\epsilon$. Mittels (2.12) führen wir den Stoßparameter b ein, $l = b\sqrt{2\mu E}$, und finden

$$\tan^2\vartheta \;=\; \frac{1-1/\epsilon^2}{1/\epsilon^2} \;=\; \epsilon^2 - 1 \;=\; \frac{2E}{\kappa^2\mu^3M^2}\,l^2 = \frac{2E}{\kappa^2\mu^3M^2}\,b^2 2\mu E.$$

Mit $\vartheta = (\pi-\chi)/2$ ist

$$\tan\vartheta \;=\; \mathrm{cotan}(\chi/2) \;=\; \frac{2E}{\kappa\mu M}\,b. \tag{2.17}$$

Für die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts (2.14) brauchen wir

$$\frac{db}{d\chi} \;=\; \frac{\kappa\mu M}{2E}\frac{-1}{2\sin^2(\chi/2)}$$

Wir finden somit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \;=\; \left|\frac{b}{\sin\chi}\frac{db}{d\chi}\right| \;=\; \left|\frac{b}{2\sin(\chi/2)\cos(\chi/2)}\frac{\kappa\mu M}{4E}\frac{-1}{\sin^2(\chi/2)}\right|.$$

Verwenden wir nun noch (2.17) für b, dann erhalten wir die *Rutherford'sche Streuformel*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\kappa\mu M}{4E\sin^2(\chi/2)}\right)^2 .$$

Für geladene Teilchen erscheint das Produkt $e_1 e_2$ der Ladungen anstelle von $\kappa\mu M$.

2.6 Der Virialsatz

Wir kehren wieder zum allgemeinen Streuproblem zurück und nehmen an, dass das Potential $V(\vec{x})$ eine homogene Funktion $n-ten$ Gerades von $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ist, also

$$V(\lambda\vec{x}) = \lambda^n V(\vec{x}), \tag{2.18}$$

für alle Skalenfaktoren $\lambda \in R$. Dann gilt für alle λ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} V(\lambda\vec{x}) &= \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} V(\lambda\vec{x}) = \vec{x}\cdot\frac{d}{d\vec{x}} V(\lambda\vec{x}) \\ &= \frac{d}{d\lambda}\lambda^n V(\vec{x}) = n\lambda^{n-1} V(\vec{x}). \end{aligned}$$

Speziell für $\lambda = 1$ erhalten wir die Beziehung

$$\vec{x}\cdot\frac{d}{d\vec{x}} V(\vec{x}) = n\, V(\vec{x}), \tag{2.19}$$

aus welcher wir (Beweis folgt) den "Virialsatz"

$$\boxed{2 < T > = n < V >} \tag{2.20}$$

herleiten können. Dabei sind $< T >$ und $< V >$ die Mittelwerte der kinetischen, bzw. der potentiellen Energie für gebundene Bahnen,

$$< T > = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2(t) \tag{2.21}$$

und

$$< V > = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \sum_i V(\vec{x}_i(t)). \qquad (2.22)$$

Kepler-Problem

Für das Kepler-Problem $V(\vec{x}) \sim |\vec{x}|^{-1}$ ist $n = -1$ und

$$2 < T > = - < V > .$$

Zum Beweis von (2.20) betrachten wir

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i + \sum_i \vec{x}_i \cdot \dot{\vec{p}}_i$$
$$= 2T - \sum_i \vec{x}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V = 2T - nV,$$

wobei wir (2.18) in der Verallgemeinerung

$$V(\lambda\vec{x}_1, \ldots, \lambda\vec{x}_N) = \lambda^n V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$$

verwendet haben. Wir mitteln nun und finden

$$2 < E > -n < V > = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{d}{dt} \sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{p}_i$$
$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \sum_i \vec{x}_i(t) \cdot \vec{p}_i(t)\Big|_{t=0}^{t=\tau} \to 0$$

für begrenzte Bahnen.