§1. Bewegungsgleichungen

1.0 Naturgesetze

Die Naturgesetze lassen sich als solche nicht herleiten, sie können nach Kuhn nur falsifiziert werden. Dennoch versucht man i.A. ein in sich konsistentes System von Naturgesetzen zu entwickeln, welche auf möglichst wenigen fundamentalen Annahmen beruhen, den grundlegenden Postulaten. Hierbei spielt die Berücksichtigung der Symmetrien von Raum und Zeit eine zentrale Rolle.

1.1 Raum und Zeit

Nach der Erfahrung mit starren Maßstäben ist der physikalische Raum ein euklidischer R^3. In ihm benützen wir kartesische Ortskoordinaten $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Die Zeit t ist erklärt durch einen (per Definition) periodischen Vorgang (Uhr), z.B. durch eine scharfen atomaren Übergang (Spektrallinie). Eine invariante (koordinatenunabhängige) Bedeutung geben wir

(a) dem Zeitabstand $|t_1 - t_2|$ von zwei Ereignissen

(b) dem räumlichen Abstand $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ von zwei gleichzeitigen Ereignissen.

Die damit verträglichen Koordinatentransformationen sind

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a, & \lambda &= \pm 1 \\ \vec{x}' &= R(t)\vec{x} + \vec{b}(t), & R(t) &\in O(3), \end{aligned} \tag{1.1}$$

d.h. wir haben noch die Wahl

– der Zeitrichtung λ

– des Zeitnullpunkts a

– eines beliebig bewegten, kartesischen räumlichen Bezugssytems.

Die Äquivalenz dieser Koordinatensysteme äussert sich darin, dass die Transformationen (1.1) eine Gruppe bilden.

1.2 Galileitransformation

Wir postulieren die Existenz von "Inertialsystemen", in welche für freie Teilchen das Trägheitsgesetz gilt:

$$\ddot{\vec{x}} \;=\; 0.$$

Alle anderen Inertialsysteme ergeben sich hieraus durch die Transformationen (1.1), welche das Trägheitsgesetz invariant lassen. Sie beschreiben den Übergang zu einem (relativ) gleichförmig bewegten Bezugssystem, d.h.

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a, & \lambda &= \pm 1 \\ \vec{x}' &= R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{b}, & R &\in O(3), \end{aligned} \tag{1.2}$$

(Galileitransformationen). Wieder bilden diese Transformationen eine Gruppe: Äquivalenz der Inertialsysteme. Sofern nichts anderes gesagt wird, rechnen wir von nun an stets in einem Inertialsystem.

1.3 Schwerpunktsatz

Die Verallgemeinerung des Trägheitsgesetzes auf N Teilchen mit Koordinaten $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N$ im leeren Raum lautet:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \;=\; \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \;=\; 0 \tag{1.3}$$

($\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i =$ Impuls des Teilchens i). Dabei sind die Massen m_i unveränderliche positive Zahlen, die durch (1.3) bis auf die Wahl der Masseneinheit festgelegt sind. Nach (1.3) sind die Massen additiv, wenn sich mehrere Teilchen zu einem einzigen zusammenschließen, also $m_{1,2} = m_1 + m_2$ und nicht etwa $m_{1,2} = (m_1 + m_2)^2$ (warum nicht?).

1.4 Bewegungsgleichungen

N Teilchen bilden ein mechanisches System, falls ihre Bewegung durch die Anfangsbedingungen

$$\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_N(t_0); \qquad \dot{\vec{x}}_1(t_0), \ldots, \dot{\vec{x}}_N(t_0)$$

zu irgendeiner Zeit t_0 bestimmt ist. Gleichbedeutend sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{p}}_i \;=\; m_i \ddot{\vec{x}}_i \;=\; \vec{F}_i(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1 \ldots \dot{\vec{x}}_N) \tag{1.4}$$

wobei $\vec{F}_i(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1 \ldots \dot{\vec{x}}_N)$ das *Kraftgesetz* ist.

Beispiele

Sonnensystem:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i \;=\; \sum_{k \neq i} -\kappa m_i m_k \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|^3}.$$

System geladener Teilchen:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i \;=\; \sum_{k \neq i} e_i e_k \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|^3}.$$

Teilchen in einem elektromagnetischen Feld:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i \;=\; e\,\vec{E}(\vec{x}, t) \,+\, \frac{e}{c}\,\dot{\vec{x}} \,\times\, \vec{B}(\vec{x}, t).$$

Hierbei sind $\vec{E}(\vec{x}, t)$ und $\vec{B}(\vec{x}, t)$ äußere elektrische und magnetische Felder. Die von den Teilchen selber erzeugten Felder sind hier vernachlässigt.

Erzwungene, gedämpfte Schwingung auf einer Geraden:

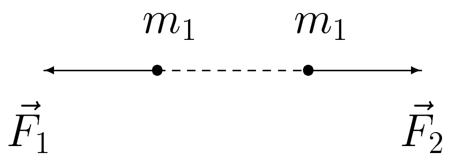
$$m\ddot{x} \;=\; -f\,x - K\,\dot{x} + k(t).$$

Hier ist K eine summarische Beschreibung der Dämpfung, ohne Berücksichtigung der Dynamik des dämpfenden Mediums.

1.5 Kräfte

Die Mechanik liefert keine Theorie der Kräfte. Newton befasst sich mit Kräften, die nur von der Lage $(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N)$ des Systems abhängen und stellt dafür gewisse Postulate auf:

Actio = Reactio



Im (abgeschlossenen) 2-Teilchensystem ist nach (1.3) und (1.4) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Wenn das Kraftgesetz in jedem Koordinatensystem gleich lauten soll (siehe 1.1), so ist es von der Form

$$\vec{F}_1 \;=\; -\vec{F}_2 \;=\; f(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)\,\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}, \tag{1.5}$$

d.h. die Kräfte liegen in der Verbindungsgeraden der beiden Teilchen und hängen nur vom Abstand ab. Solche Kräfte besitzen stets ein Potential $V(r)$, welches durch die Lösung der Gleichung $V'(r) = f(r)$ gegeben ist, mit $r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ und

$$\vec{F}_1 \;=\; -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \;=\; -V'(r)\; \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \vec{x}_1}}_{\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}}\,,$$

also

$$\vec{F}_1 \;=\; -V'(r)\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \tag{1.6}$$

Kräfteparallelogramm

Es gibt 2-Körper-Kräfte (Postulat) und diese sind additiv:

$$\vec{F}_i \;=\; \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|),$$

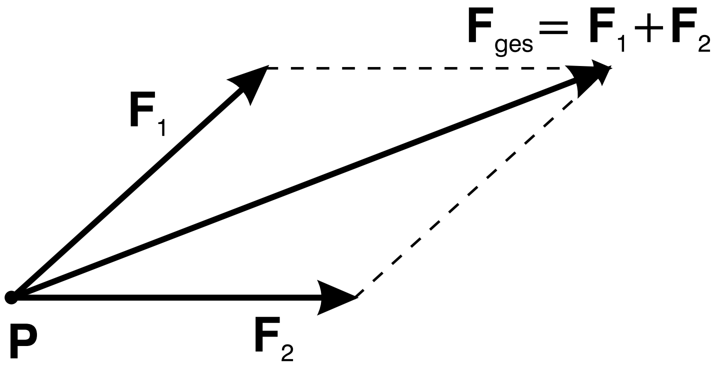


Abbildung 1.1: Das Kräfteparallelogramm.

wobei $\vec{F}_{ik}$ die vom Teilchen k auf das Teilchen i wirkende Kraft ist. Aus (1.6) folgt dann wieder die Existenz eines Potentials

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = -\sum_{k \neq i} V'_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|) \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|}. \quad (1.7)$$

mit

$$V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = \sum_{\text{Paare(i,k)}} V_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|), \quad (1.8)$$

wobei die Paarpotentiale $V_{ik}(r)$ durch aus den Paar-weise wirkenden Kräften durch Integration von $V'_{ik}(r) = -f_{ik}(r)$ berechnet werden kann. Dabei ist

$$\vec{F}_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|) = f_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|) \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|}.$$

Beispiele sind das Sonnensystem und ein System geladener Teilchen. Wir bemerken, dass das Prinzip "Actio = Reactio" paarweise gilt und somit auch der Schwerpunktsatz (1.3) erfüllt ist. Zudem gilt "Actio = Reactio" auch für die resultierende Kraft zwischen 2 beliebigen Teilsystemen.

Mit der Annahme additiver 2-Körper-Kräfte kann man diese statisch (Feder-Kraftmesser) ausmessen. So erst bekommt die Newton'sche Bewegungsgleichung (1.4) einen Sinn: Die statisch ermittelten Kräfte bestimmen die Bewegung.

1.6 Galilei-Invarianz

Wir postulieren, dass die Bewegungsgleichungen eines Systems der Art (1.4) und (1.7) in jedem Inertialsystem gleich lauten. Dieses ist eine á priori nicht zu rechtfertigende Forderung an die Struktur der Naturgesetze. Ob diese Forderung gerechtfertigt ist, lässt sich nur anhand der Konsequenzen experimentell überprüfen. Heute wissen wir, dass die Galilei-Invarianz nur für nicht-relativistische mechanische Systeme gilt.
Ein Beispiel hierfür sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} \;=\; \vec{F}_i(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N). \tag{1.9}$$

Galilei-Invarianz bedeutet, dass sie nach einer Galilei-Transformation im neuen Koordinatensystem die selbe Form haben müssen, d.h.

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}'_i}{dt^2} \;=\; \vec{F}'_i(\vec{x}'_1 \ldots \vec{x}'_N).$$

Dies ist für $\vec{x}'_i = R\vec{x}_i + \vec{b}$ der Fall, falls

$$\vec{F}'_i(\vec{x}'_1 \ldots \vec{x}'_N) \;=\; R\vec{F}_i(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N). \tag{1.10}$$

Für die additiven Zweikörperkräfte (1.7) ist dies der Fall.
Anders ausgedrückt: Mit $\vec{x}_i(t)$ ist auch die Galileitransformierte $\vec{x}'_i(t')$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen. Dies gilt auch für die Operation der Zeitumkehr:

$$t' = -t, \qquad \vec{x}'(t') = \vec{x}(t).$$

Also ist mit $\vec{x}(t)$ auch $\vec{x}(-t)$ eine Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung (1.9), da diese zweiter Ordnung in der Zeit ist und somit keine Zeitrichtung auszeichnet. Dies ist nicht bei dissipativen Systemen, wie der z.B. gedämpften Schwingung, der Fall.

1.7 Erhaltungssätze

Aus (1.4) folgen

(a) Impulssatz

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i \;=\; \sum_i \vec{F}_i, \qquad \frac{d}{dt}\vec{P} \;=\; \vec{F}. \tag{1.11}$$

Dabei lässt sich der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ als

$$\vec{P} \;=\; \sum_i m_i \frac{d}{dt}\vec{x}_i \;=\; M\frac{d}{dt}\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{x}_i \;=\; M\dot{\vec{X}}$$

schreiben, wobei $M \;=\; \sum_i m_i$ die Gesamtmasse und

$$\vec{X} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{x}_i$$

die Schwerpunkt-Koordinate ist.

(b) Drehimpulssatz

Der Drehimpuls eines Massenpunktes ist $\vec{L}_i = \vec{x}_i \times \vec{p}_i$. Der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ befolgt die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\vec{L} \;=\; \sum_i \underbrace{\dot{\vec{x}}_i \times \vec{p}_i}_{m_i\dot{\vec{x}}_i\times\dot{\vec{x}}_i=0} + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i \;=\; \vec{M}, \tag{1.12}$$

wobei das totale Drehmoment $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$ ist mit $\vec{M}_i = \vec{x}_i \times \vec{F}_i$. Der Gesamtdrehimpuls lässt sich in den Drehimpuls des Schwerpunktes $\vec{L}_{SP} \;=\; \vec{X} \times \vec{P}$ und in den relativ-Drehimpuls $\vec{L}_{rel} \;=\; \sum_i(\vec{x}_i - \vec{X}) \times \vec{p}_i$ zerlegen:

$$\begin{aligned}\vec{L} \;&=\; \sum_i (\vec{x}_i - \vec{X} + \vec{X}) \times \vec{p}_i \\ &=\; \underbrace{\sum_i \vec{X} \times \vec{p}_i}_{\vec{X}\times\vec{P}} + \sum_i (\vec{x}_i - \vec{X}) \times \vec{p}_i \;=\; \vec{L}_{SP} + \vec{L}_{rel}.\end{aligned}$$

(c) Energiesatz

Die Bwegungsgleichung für die totale kinetische Energie $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2$ ist

$$\frac{d}{dt} T \;=\; \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \;=\; \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \ddot{\vec{x}}_i \;=\; \sum_i \dot{\vec{x}}_i \vec{F}_i. \tag{1.13}$$

Somit ist $\sum_i \dot{\vec{x}}_i \vec{F}_i$ die *Leistung*, welche das System von Massenpunkten in Form von kinetischer Energie aufnimmt. Auch die kinetische Energie lässt sich zerlegen:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}} + \dot{\vec{X}})^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \underbrace{\sum_i m_i (\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}}) \dot{\vec{X}}}_{(\sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i - M \dot{\vec{X}}) \dot{\vec{X}} = M(\dot{\vec{X}} - \dot{\vec{X}}) \dot{\vec{X}} = 0} + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}})^2. \end{aligned}$$

Also setzt sich auch die kinetische Energie aus einem relativ-Anteil, T_{rel}, und der kinetischen Energie des Schwerpuntes, T_{SP}, zusammen:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}})^2 = T_{SP} + T_{rel}.$$

Für additive Zweikörperkräfte lässt sich die Leistung mit (1.6) auch als

$$\sum_i \vec{F}_i \dot{\vec{x}}_i \;=\; -\sum_i \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N) \dot{\vec{x}}_i \;=\; -\frac{dV}{dt}$$

schreiben. Gleichung (1.13) kann dann in die Form eines Energiesatzes umgeschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}(T + V) \;=\; 0. \tag{1.14}$$

Man sagt auch, das System sei konservativ. Für Systeme, in welchen Reibungskräfte wirken, ist die totale Energie $T + V$ nicht erhalten, solche Systeme nennt man dissipativ.

Abgeschlossene konservative Systeme

Konservative Systeme mit $\vec{F} = 0$ und $\vec{M} = 0$ nennt man *abgeschlossen.* Beispiele sind Systeme von Massenpunkten mit additiven Zweikörperkräften. Abgeschlossene konservative Systeme haben die folgenden 10 Erhaltungsgrößen (Integrale der Bewegung):

$\vec{P}$	3 Impulse
$\vec{X} - \vec{P}t/M$	3 Schwerpunktsbewegungen
$\vec{L}$ (oder $\vec{L}_{rel}$)	3 Drehimpulse
$T + V$ (oder $T_{rel} + V$)	Energie

Satz von Noether

Etwas allgemeiner gilt (siehe später, Satz von Noether): Das mechanische System

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) \tag{1.15}$$

hat genau dann die oben genannten 10 Erhaltungsgrößen, falls V unter jeder beliebigen euklidischen Transformation invariant ist:

$$V(R\vec{x}_1 + \vec{b}, \dots R\vec{x}_N + \vec{b}) = V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N), \tag{1.16}$$

für alle $R \in SO(3)$ = Gruppe der Drehungen mit $det\ R = 1$ und für alle $\vec{b} \in R^3$. (Man zeige, dass dies mit $\vec{F} = 0$ und $\vec{M} = 0$ gleichbedeutend ist). Weiterhin kann man zeigen, dass die Energieerhaltung aus der Invarianz des Systems unter Zeittranslationen $t \to t' = t + a$ folgt.

1.8 Beschleunigte Bezugssyteme

Falls ein Bezugssytem y kein Inertialsytem ist, dann muss man die gültige Bewegungsgleichung in diesem System durch Transformation der Bewegungsgleichung in einem Inertialsytem x berechnen. Beispiel:

Massenpunkt in einem rotierenden Bezugssystem

Die Bewegungsgleichung im Inertialsystem

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

transformiert sich durch Einsetzen der Transformationsgleichung

$$\vec{x} \;=\; R(t)\vec{y} \,+\, \vec{b}(t)$$

zu

$$m\,(\,R\,\ddot{\vec{y}} + 2\dot{R}\,\dot{\vec{y}} + \ddot{R}\,\vec{y} + \ddot{\vec{b}}\,) \;=\; \vec{F}.$$

Multiplikation mit R^{-1} von links ($R^T = R^{-1}$ für eigentliche Rotationen) ergibt

$$m\ddot{\vec{y}} \;=\; \vec{F}' - 2m\Omega\,\dot{\vec{y}} - mR^T\ddot{R}\,\vec{y} - m\vec{a},$$

mit:

$$\begin{array}{rcll} \vec{F}' & = & R^T\vec{F} & \text{y-Komponente der Kraft.} \\ \vec{a} & = & R^T\ddot{\vec{b}} & \text{y-Komponente der Beschleunigung des Punktes } y \equiv 0. \\ \Omega & = & R^T\dot{R} & \text{Eine antisymmetrische } 3 \times 3 \text{ Matrix.} \end{array}$$

Erzeugende für Drehungen

Die erzeugende Ω ist antisymmetrisch, denn aus $R^T R = 1$ folgt

$$R^T\dot{R} + \dot{R}^T R \;=\; \Omega + \Omega^T \;=\; 0.$$

Also hat Ω die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $R^T\dot{R}\,\vec{y} = \Omega\,\vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}$ und

$$\vec{\omega} \;=\; (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

die *vektorielle Winkelgeschwindigkeit* im y-System. Wir brauchen noch

$$R^T\ddot{R} \;=\; \frac{d}{dt}R^T\dot{R} - \dot{R}^T\dot{R} \;=\; \dot{\Omega} - \dot{R}^T R R^T\dot{R} \;=\; \dot{\Omega} + \Omega^2.$$

Damit ist

$$R^T\ddot{R}\,\vec{y} \;=\; \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}).$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung im y-System:

$$m\ddot{\vec{y}} = \vec{F}' - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}}) - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{y}) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) - m\vec{a}. \quad (1.17)$$

Die rechts neben $\vec{F}'$ auftretenden Kräfte heißen Scheinkräfte, insbesondere

$$\boxed{\begin{aligned} -2m(\vec{\omega} \times \vec{y}) &= \text{Corioliskraft} \\ -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) &= \text{Zentrifugalkraft.} \end{aligned}}$$