8. Übung

Aufgabe 28

Mit $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ folgt

$$\begin{aligned}
v &= \frac{3}{5}c \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{5}{4} \\
x &= x' = 10m \\
y &= y' = 15m \\
z &= \gamma\Big(z' + vt'\Big) = \frac{5}{4}\left(20 + \frac{9}{5}4\right) m = 34m \\
t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}z'\right) = \frac{5}{4}\left(4 + \frac{1}{5}20\right) 10^{-8}s = 1 \cdot 10^{-7}s.
\end{aligned}$$

Aufgabe 29

In Σ gilt:

$$z_1 = z_2 \;;\; t_2 - t_1 = 4s.$$

Σ' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v gegenüber Σ

$$\begin{aligned}
t_2' - t_1' &= \gamma\left[t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(z_2 - z_1)\right] = \gamma 4s \stackrel{!}{=} 5s \\
\Rightarrow \;\gamma &= \frac{5}{4} \;\Rightarrow\; \gamma^{-2} = \frac{16}{25} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
\Rightarrow \;v &= \frac{3}{5}c.
\end{aligned}$$

Dies ergibt den räumlichen Abstand in Σ':

$$\begin{aligned}
z_2' - z_1' &= \gamma\Big[z_2 - z_1 - v(t_2 - t_1)\Big] \\
&= -\gamma v(t_2 - t_1) = \frac{5}{4}\,\frac{3}{5} 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\;(4s) \\
&= 0,9 \cdot 10^9 m.
\end{aligned}$$

Aufgabe 30

Σ und Σ' seien zwei Inertialsysteme, die sich mit der Geschwindigkeit $v = 0,8c$ in z-Richtung relativ zueinander bewegen. Σ sei das Ruhesystem der Erde, Σ' das des Raumschiffes. Die Koordinatenursprünge sollen genau dann zusammenfallen, wenn das Raumschiff den Abstand d von der Erde hat. Das Raumschiff befinde sich im Ursprung von Σ'. Es gilt:

$$z' = \gamma(z - vt) \; ; \; t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right).$$

In Σ wird das Signal im Raum-Zeit-Punkt

$$z_0 = -d \; ; \; t_0 = 0$$

ausgesendet, in Σ' dagegen bei:

$$z'_0 = -\gamma d \; ; \; t'_0 = \gamma\frac{v}{c^2}d.$$

Das Signal hat in Σ' die Geschwindigkeit c und erreicht das Schiff nach der Zeitspanne:

$$\Delta t' = \frac{\gamma d}{c}. \qquad \text{(Lösung zu b))}$$

Die Signalankunft hat in Σ die Koordinaten:

$$\begin{aligned} z_1 &= \text{Schiffsposition zur Zeit } t_1, \\ z_1 &= vt_1. \end{aligned}$$

Wir suchen t_1. In Σ' gilt für den Punkt (z_1, t_1):

$$\begin{aligned} z'_1 &= \gamma(z_1 - vt_1) = 0 \\ t'_1 &= \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}z_1\right) = \gamma t_1\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{t_1}{\gamma}. \end{aligned}$$

Die Laufzeit beträgt also vom Schiff aus gesehen:

$$\Delta t' = t'_1 - t'_0 = \frac{t_1}{\gamma} - \frac{\gamma d}{c^2}v.$$

Wir setzen die beiden Ausdrücke für $\Delta t'$ gleich und lösen nach t_1 auf:

$$t_1 = \frac{\gamma^2 d}{c}\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{d}{c - v}.$$

Da $t_0 = 0$ ist, folgt für die Laufzeit, gemessen auf der Erdstation:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{d}{c - v}. \qquad \text{(Lösung zu a))}$$

Zahlenwerte:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \left(1-(0,8)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{3} = 1,667 \\
\Rightarrow \quad \Delta t' &= 3\,700\,s \;\approx 1h \\
\Delta t &= 11\,100\,s \;\approx 3h.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 31

Σ ist das Ruhesystem des Beobachters, Σ' das der Rakete. Die Koordinatensysteme seien so gewählt, dass die beiden Ursprünge zur Zeit $t = t' = 0$ mit P_0 zusammenfallen.

a) $t'_a = 0$; $t'_e = L_0/c$.

b) Σ bewegt sich relativ zu Σ' mit $(-v)$:

$$
\begin{aligned}
z &= \gamma\,(z' + vt')\ ;\ \ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}z'\right) \\
t_a &= 0, \\
t_e &= \gamma\left(t'_e + \frac{v}{c^2}z'_e\right) = \gamma\left[\frac{L_0}{c} + \frac{v}{c^2}(-L_0)\right] \\
&= \gamma\frac{L_0}{c}(1-\beta) = \frac{L_0}{c}\sqrt{\frac{(1-\beta)^2}{1-\beta^2}} \\
&= \frac{L_0}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.
\end{aligned}
$$

c) $z_0 = 0 \;\Rightarrow\; z'_0 + vt'_0 = 0$. Hierbei ist z'_0 die Position des Raketenendes in Σ', d.h.:

$$
z'_0 = -L_0 \;\Rightarrow\; t'_0 = \frac{L_0}{v}.
$$

Gesucht ist t_0:

$$
\begin{aligned}
t_0 &= \gamma\left(t'_0 + \frac{v}{c^2}z'_0\right) \\
&= \gamma\frac{L_0}{v}\left(1-\beta^2\right) \\
&= \frac{L_0}{\gamma v}.
\end{aligned}
$$