Lösungen der Übungsaufgaben — Theoretische Physik I

WS 04/05 — Prof. Dr. C. Gros

7. Übung

Aufgabe 24

a)

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Die Schwerpunktskoordinaten sind $(x_A/2, y_B/2)$. Somit ist $r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x_A^2 + y_B^2) = l^2$. Der Schwerpunkt bewegt sich auf einem Kreis mit dem Radius l. Das System hat somit nur den Freiheitsgrad φ.

b)

$$\begin{aligned} T &= T_{kin} + T_{rot} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}(ml^2 + I)\dot{\varphi}^2 \\ U &= mgy = mgl\sin\varphi \\ L &= T - U = \frac{1}{2}(ml^2 + I)\dot{\varphi}^2 - mgl\sin\varphi \end{aligned}$$

c)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 = (ml^2 + I)\ddot{\varphi} + mgl\cos\varphi \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\cdot\dot{\varphi}}{\Longrightarrow} \quad 0 &= (ml^2 + I)\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + mgl\dot{\varphi}\cos\varphi \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(ml^2 + I)\dot{\varphi}^2 + mgl\sin\varphi\right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(ml^2 + I)\dot{\varphi}^2 + mgl\sin\varphi = const = mgl\sin\varphi_0$$

d)

$$x = r\cos\varphi \Rightarrow \dot{x} = -r\dot{\varphi}\sin\varphi \Rightarrow \ddot{x} = -r(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$$

Die Ablösebedingung $\ddot{x} = 0$ ist äquivalent zu

$$\dot{\varphi}^2 = -\tan\varphi \cdot \ddot{\varphi} \overset{(1)}{=} -\tan\varphi \cdot \left(-\frac{mgl}{ml^2 + I}\cos\varphi\right) = \frac{mgl}{ml^2 + I}\sin\varphi$$

Dies setzen wir nun in den Energiesatz ein

$$\begin{aligned} (ml^2 + I)\left(\frac{mgl}{ml^2 + I}\sin\varphi\right) + 2mgl(\sin\varphi - \sin\varphi_0) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \sin\varphi &= \frac{2}{3}\sin\varphi_0 \end{aligned}$$

Aufgabe 25

$$S = \int ds = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int L(y')dx$$

Minimieren der Weglänge $\delta S = 0$ ist äquivalent dazu, daß L die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) - 0 = 0 \\ \Rightarrow \quad y''\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{1}{2}y'\frac{2y'y''}{\sqrt{1 + y'^2}^3} &= \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}\left(1 + y'^2 - y'^2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad y'' &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad y(x) &= ax + b \end{aligned}$$

Die Lösung ist eine Gerade.

Aufgabe 26

a.) Die Koordinaten des Massenpunktes sind

$$\begin{aligned}
x &= a\cos(\omega t) + l\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -a\omega\sin(\omega t) + l\dot{\varphi}\cos\varphi \\
y &= -a\sin(\omega t) + l\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = -a\omega\cos(\omega t) - l\dot{\varphi}\sin\varphi \\
\dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \underbrace{a^2\omega^2(\sin^2 + \cos^2)}_{const.\Rightarrow \text{weglassen}} + l^2\dot{\varphi}^2(\sin^2 + \cos^2) + 2al\omega\dot{\varphi}(\underbrace{\cos(\omega t)\sin\varphi - \sin(\omega t)\cos\varphi}_{=sin(\varphi-\omega t)})
\end{aligned}$$

Der Ausdruck $\dot{\varphi}\sin(\varphi - \omega t)$ läßt sich noch weiter vereinfachen, indem man die Eichinvarianz ausnutzt, die besagt, daß man von L eine totale Ableitung nach der Zeit einer beliebigen Funktion f abziehen darf. Dazu betrachten wir $f = \cos(\varphi - \omega t)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\cos(\varphi - \omega t) &= -(\dot{\varphi} - \omega)\sin(\varphi - \omega t) \\
\Leftrightarrow \quad \dot{\varphi}\sin(\varphi - \omega t) &= -\frac{d}{dt}\cos(\varphi - \omega t) + \omega\sin(\varphi - \omega t)
\end{aligned}$$

Dies setzen wir oben ein und streichen die totale Ableitung. Die Lagrange Funktion lautet

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\omega^2\sin(\varphi - \omega t) + mgl\cos\varphi$$

b.) Die Koordinaten des Massenpunktes sind $x = a\cos(\omega t) + l\sin\varphi$, $y = l\cos\varphi$. Die Lagrange Funktion lautet mit dem gleichen Trick wie in a)

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\omega^2\cos(\omega t)\sin\varphi + mgl\cos\varphi$$

Aufgabe 27

Die Koordinaten der beiden Massen m_1 liegen bei $(\pm a\cdot\sin\theta, -a\cdot\cos\theta)$ und die Masse m_2 bei $(0, -2a\cdot\cos\theta)$. Die Rotationsenergie $T_{rot}^{(2)}$ der Masse m_2 ist 0, ihre potentielle Energie ist $V_2 = -2m_2ga\cos\theta$. Für eine der Massen m_1 gilt $T_{rot}^{(1)} = \frac{1}{2}m_1\omega^2a^2\sin^2\theta$ und $V_1 = -m_1ga\cos\theta$. Somit lautet die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= T - V \\
&= m_1\omega^2a^2\sin^2\theta + 2(m_1 + m_2)ga\cos\theta
\end{aligned}$$

und die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&= 2m_1\omega^2 a^2 \sin\theta\cos\theta - 2(m_1+m_2)ga\sin\theta \\
&= 2a\sin\theta(m_1\omega^2 a\cos\theta - (m_1+m_2)g)
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad \theta = 0 \qquad \text{oder} \qquad \theta = \arccos\left(\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 a\omega^2}\right)
$$